Mathematics In The Modern World

通俗数学名著译丛

现代世界中的数学

Morris Kline
/ 主编

齐民友 等
/ 译

上海教育出版社
SHANGHAI
EDUCATION
PUBLISHING HOUSE

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

01-49
29

通俗数学名著译丛

现代世界中的数学

Morris Kline
/ 主编

齐民友 等
/ 译

上海教育出版社
SHANGHAI
EDUCATION
PUBLISHING HOUSE

北方工业大学图书馆
00578705

Morris Kline

Mathematics In The Modern World

—Readings From Scientific American

W. H. Freeman and Company

© Scientific American, Inc.

根据弗里曼出版社 1968 年版译出

图书在版编目（C I P）数据

现代世界中的数学 / （美）克莱因主编；齐民友等译.
上海：上海教育出版社，2004. 12
（通俗数学名著译丛 / 史树中，李文林主编）
ISBN 7-5320-9693-9

Ⅰ. 现...　Ⅱ. ①克...②齐...　Ⅲ. 数学－普及读物
Ⅳ. 01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第142104号

通俗数学名著译丛

现代世界中的数学

——《科学美国人》文集

M·克莱因　主编

齐民友等　译

上海世纪出版集团
上 海 教 育 出 版 社 出版发行

易文网：www.ewen.cc

（上海永福路 123 号　　邮政编码：200031）

各地新华书店经销　　上海新华印刷有限公司印刷

开本 787 × 980　1/12　印张 57　插页 5　字数 911,000

2004 年 12 月第 1 版　　2004 年 12 月第 1 次印刷

印数 1－5,000 本

ISBN 7-5320-9693-9/O·0034　定价：65.00 元

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，已阔步迈进了 21 世纪.

回顾过去的一个世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位. 数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献. 同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志. 因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学. 现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20 世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路. 面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步. 这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础. 随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视. 早在 60 年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今. 改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力. 但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距. 我国数学要率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务. 为此，借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版，正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物，推动国内的数学普及与传播工作，为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量. 丛书的选题计划，是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的. 所选著述，基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作. 它们在内容上包括了不同的种类，有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用；有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧；有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系；等等，试图为人们提供全新的观察视角，以窥探现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多彩.

丛书的读者对象，力求定位于尽可能广泛的范围. 为此丛书中适当纳入了不同层次

的作品，以使包括大、中学生；大、中学教师；研究生；一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益．即使是对于专业数学工作者，本丛书的部分作品也是值得一读的．现代数学是一株分支众多的大树，一个数学家对于他所研究的专业以外的领域，也往往深有隔行如隔山之感，也需要涉猎其他分支的进展，了解数学不同分支的联系．

需要指出的是，由于种种原因，近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气．在这样的情况下，上海教育出版社按照国际版权公约，不惜耗资购买版权，组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》，这无疑是值得称道和支持的举措．参加本丛书翻译的专家学者们，自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的．

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内还不多见．值得高兴的是，这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持，特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词，使我们深受鼓舞．到目前为止，这套丛书已出版了 13 种，印数大多逾万，有的已经是第四次印刷，这对编译者来说确是令人欣慰的信息．我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作，使《通俗数学名著译丛》的出版获得更大的成功．

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代，让公众了解、喜爱数学，让数学走进千家万户！

《通俗数学名著译丛》编委会

2001 年 8 月

序

数学是人所创造出的最简单的系统的学科．比如说，它远比物理学、历史学和经济学简单．它之所以简单是因为它只限于现实的很有限的侧面．十个人就是十个很复杂的心理和生理有机体，其结构与功能我们只是部分地了解．与之相比，想要认识并保持其数为 10 这个数量上的事实却是微不足道的事．一块木做的三角形是说不清有多少个复杂的分子被复杂的力联在一起．不论是分子的结构还是把它们联结在一起的力，甚至最伟大的物理学家也未能完全懂得．但是数学家只研究其三角形的形状，完全不管其分子结构与力．数学所关心的概念的简单性几乎保证了，由数学所确定的关于这些概念的事实必然也是最基础的．尽管有这种简单性，大多数人仍然抱怨数学难于掌握，尽管它在生活的几乎每一步都有惊人的效用，因此应该引起兴趣，这些人仍然躲着数学．

一个本质上简单的学科却难于学习，这件怪事很大部分容易解释．有些困难是表面的．其一是词汇．数学家用一些对普通人很生僻的词来表这从实际事物中抽象出来的概念．如"四边形"和"平行四边形"有一些在其他领域遇不到的特定的精确含意，要研究数学就得学着用．然而谁也不会争辩说学会用新名词就是主要障碍．学会用新名词当然不是一种愉快的消磨时光的玩意，它是另一码事．但其困难决不会大于学会法语词汇．

另一个看得见的，但同样是表面的困难是使用符号．我们要解决一个问题，以某些已给的信息为基础决定一个未知数．设此未知数是某一个长度以尺计的数字．用 x 去代表这个长度，而在以后就只用符号 x 而不去说这么长一句话，肯定是有利的．然而使用符号不会产生任何概念上的困难．

人们设想到的第三个困难是抽象性．但是由于基本的抽象或概念是直接来自日常经验的，人们心中很容易保存它们的含意．事实上，数学家不断地诉诸物理对象和物理图像，以便不忘记这些抽象概念的含意．古希腊数学家用小石子代表各类对象，用小石子学会了自然数的基本事实．顺便说一下，"计算"一词，广义地即表示任一个算术或代数过程，它的英文字 Calculus 的拉丁语源就是小石子．甚至更高级的数学抽象如微积分学中所学的导数和积分，说到底离这些初等概念仅一步之隔，甚至微积分的概念也有图像的和物理的意义．要学会这些抽象概念，比学习初等概念并不要求更高的智力．

有一个在数学圈子里相当流行的故事，体现了数学家其实是用图像来思考的. 一位教授在给班上学生讲定理的证明时突然中间停住了. 他走到黑板角上，画几个图，想一想，然后擦掉这些图继续讲他的证明. 这个故事也揭露了数学方法的某些侧面，就用不着说明白了.

学习数学还有一些可能比较本质的障碍. 小学、中学和高等学校都是为了使我们准备好走向生活，我们都必需准备好进入 20 世纪的复杂的文明，但要有充分的准备，需学的东西很多. 学科的次序安排，以及在各学科之内各个课题之先后，还有教育的进度，都是为了保证这种准备. 然而，为了走向生活而作的有效的训练，要求以牺牲理解为代价，至少在数学中是如此.

数学的完成了的形式是一系列概念、一系列程序，例如求解某种类型方程的方法. 还有一系列事实，例如定理. 当然，程序和定理都要通过证明来确认. 要想教会人这些数学的元素，最容易的方法似乎莫过于用这些概念、过程、定理与证明的最终的、确定的形式去教学生. 但是数学是一门老学科，它的某些重大的成就可以追溯到公元前 3000 年. 过去五千多年里数学家不仅极大地扩大了这个学科的领域，而且当他们一步步扩大其领域，当他们不断认识了新的客体和现象，当他们不断改进自己的理解，他们也就重塑了这些概念、程序与证明来把这些成就组合起来. 这些订正了的版本有许多就不再清晰易懂了.

此外，数学的分量在增加，最好把它组织起来，使关于同一主题的许多定理有合逻辑的次序. 每一门学科的基础是公理，后面就是一串定理，每一个定理都用公理和前面已证的定理来证明. 把结果按这样的合于逻辑的次序来安排，这种需要就迫使数学家找出新的、不甚自然、不甚明白的证明. 结果是许多证明都被除去了它们的直观、透明和易于理解的面貌，而被十分人为的证明代替了. 这种逻辑表述使人想起大文豪撒缪尔 · 约翰逊(Samul Johnson)的一件轶事. 他曾对一个人讲解了一个问题，此人仍感不满足，坚请他作进一步的解释. 约翰逊多少有些生气，尖刻地回答说："我已经给了你一个论证，我没有义务再给你一个解释."

表述上的有效性似乎导致忽视数学的另一个特点，而这个特点对于理解数学却是至关重要的. 数学本身是一副骨骼. 数学的血肉和生命在于用数学做什么. 有意义的数学(也存在没有意义的数学)要为一种目的服务，这种目的用笛卡儿的话来说，就是使人成为大自然的主人和占有者. 数学的意义在于数学本身之外，正如好的文学作品的意义在于纸面上文字的堆积之外. 要懂得数学就要知道为什么需要这个结果，它和其他结果关系如何，用它可以做些什么事.

学校由于它的目的和义务繁多，有时能够，有时又不能够给数学一种更有启发性的讲法. 有志于此的学生必须要走得远一些，寻求一种完全的知识. 要对数学有较彻底的理解与领会，就必须去掉那些纤巧的细节，深入到其深层的思想之中；要知道它的目的和用处，知道创造它的人们的动机，以及这些概念和结构的创生背景.

本书收入的论文实质在于有助于理解数学.它们的目的不是给出平淡无奇的信息或学一门课程时必需掌握的技术细节以便去学下一门课,而是给出内在的洞察.这些文章不止给出了砖石和逻辑的灰浆,而是给出宏大的庙宇;它们用广阔的视野去补足细节;它们一改日复一日与符号和过程打交道的模式,注入了崇高主题,给人以激情.

由不同作者就不同主题写的一系列论文不能代替系统的攻读和技术的掌握,它更像是一个万花筒,它的色彩缤纷的闪光给人以启发、激情和灵感——而这正是一切教育的主要目的.

1968年8月

克莱因(Morris Kline)

目录

序

Ⅰ. 数学的本性

引言 3
1. 数学的创新 哈尔莫斯 7
2. 数学的创造 庞加莱，纽曼编辑 18
3. 现代世界中的数学 柯朗 25

Ⅱ. 传记

引言 43
4. 笛卡儿 克龙比 46
5. 牛顿 柯恩 59
6. 拉普拉斯 纽曼 67
7. 哈密尔顿 惠塔克爵士 75
8. 巴贝奇奇特的一生 P·和E·莫里斯 83
9. 克里福德 纽曼 90
10. 麦克斯韦 纽曼 98
11. 湿利尼吠萨·拉马奴金 纽曼 118
12. 尼古拉斯·布尔巴基 哈尔莫斯 126

Ⅲ. 几个数学分支

引言 137
13. 数 戴维斯 142

14. 数论 赫尔维茨 158
15. 代数 梭耶尔 166
16. 几何 克莱因 181
17. 射影几何 克莱因 198
18. 空间的曲率 勒科尔白也 210
19. 拓扑学 塔克、贝利 221
20. 哥尼斯堡桥 欧拉，纽曼编辑 234
21. 不动点定理 辛布洛特 242
22. 机会 艾也尔 252
23. 概率论 韦弗尔 268
24. 概率论 卡 茨 276
25. 统计学 韦弗尔 292

Ⅳ. 数学基础

引言 303
26. 几何与直觉 哈 恩 307
27. 数学基础 蒯 因 316
28. 悖论 蒯 因 331
29. 非康托集论 科恩，赫尔希 347
30. 哥德尔证明 内格尔，纽曼 363

Ⅴ. 数学的意义

引言 383
31. 物理学家的自然图像的进化 狄拉克 389
32. 物理科学中的数学 戴森 405
33. 引力理论的推广 爱因斯坦 421
34. 引力 伽莫夫 431
35. 生物科学中的数学 摩 尔 448

36. 社会科学中的数学　斯　通　465
37. 质量控制的实践　道尔顿　480
38. 对策论　摩根斯特恩　488
39. 对策论的运用与滥用　雷珀玻尔特　497
40. 通讯的数学　韦弗尔　512
41. 线性规划　查恩斯　521
42. 运筹学　莱文森，布朗　526
43. 数学机器　戴维斯　532
44. 计算机　乌拉姆　556
45. 计算机的逻辑和存储　伊文思　574
46. 计算机在科学中的应用　厄廷格　592
47. 系统分析与编程　斯特拉切　609
48. 控制论　维　纳　622
49. 看作机器的人　肯麦尼　633

作者介绍与参考文献　648

译后记　674

I.

数学的本性

引 言

欧几里得的《几何原本》，第一部现存的数学经典，激励了一百代人的数学事业，它既是人类智慧的胜利，却又是教学法上的大不幸. 整个世界从这部经典中学到了数学证明的观念和数学知识的整体的逻辑结构的概念，当然也学到了宝贵的知识. 但是太多的知识分子，也包括太多的数学家，误解了欧几里得的著作的意义，形成了关于数学的过于偏狭的概念. 他们断言，数学就是纯粹的逻辑的发展. 它从明确陈述的公理和定义开始，对定义中界定了的数学概念演绎地证明种种结果.

欧几里得在他的大约成书于公元前300年的著作中，并没有完全包括数学家在前此整整三百年间所做的一切，他也没有打算这样做. 数学家值得对于知识的整体作演绎的组织，如欧几里得对几何学所作的那样，先必须创造这些素材，而这得花上几十年甚至几百年. 和逻辑组织不一样，创造的工作不是从一个论证一步步地得出下一个论证，而且每一步都得到某个公理或已得到的结论的支持. 创造的过程所包含的是摸索、犯错、猜测和假设. 要掌握一个关键的概念、形成一个猜想并找出一个证明，需要的是想像力、直觉、预见、洞察、实验、偶然的联想、好运、艰苦的工作和巨大的耐心.

的确，放弃某一种猜想或者放弃一条路线而遵循另一条更有希望的道路，可能需要理性思维，但整个数学创造过程却犹如著名的物理学家布里奇曼(P. W. Bridgman)所说，是要"用你的心去做最不像话的事，没有任何禁忌". 许多大数学家都攻过一个问题而失败，后人再接上来解决了它. 这类事例说明了在创造过程中有多少个人心智的劳苦，远非我们从最终的证明中看到的那种系统的、有次序的论证.

创造性的活动，对学生来说则是再创造的活动，是数学的心脏. 正是在这种活动中，数学家创造了最高成就，克服了最大的困难并使数学这门学科取得了最有意义的进展. 创造过程不仅

在解决已有问题时必不可少.没有新观点、新研究方法和新目标的创造,数学就会反反复复重新组织老的证明,使它们更加严格,在这样的过程中日趋枯竭,丧失生命力.对已经得到的知识,重新排列其步骤,安排其定理的次序来构成一个演绎的组织,这时常需要创意,但从总体上说,这更像是把书本重新排一个次序,而创造的活动,却可以比作写书.数学给人的满足——获得猎物时的兴奋,发现的激动,成就的感觉,以及成功时的欢乐——更多更强烈的是在创造性的工作之中,而不是在最后按演绎的模式来重写论证之中.

虽然已经搞好了的数学必须要演绎地陈述,这部分是想得到协调的结构,部分是由于要检验证明的步骤,逻辑模式的价值却远远小于人们常相信的程度.在从公元前3000年到公元1900年这么多世纪中,数学家是逐步地学到了现在包含在复数系中的各种数以及这些数的运算(第Ⅲ部分戴维的文章中总结了这个发展).到每一类数及其运算终于被纳入数学之中时,数学家早已知道这些数是什么,知道它们一定有哪些性质了.在19世纪最后几十年里,数学家才决定要建立复数系的逻辑的展开,其原因不在这里说了.这样他们才去寻找公理,使得能由之对各类数去推导出其性质,而其实他们早已知道这些性质成立了.要寻找关于这些数的性质的新知识,或者要保证它们有这些性质,逻辑框架其实是多余的.

过分看重数学的逻辑结构还有别的原因.数学家早就知道,直觉的坚信之超过逻辑,犹如太阳的光辉超过苍白的月光.数学家们以各种不同的方式认识到这个真理.柏拉图认为,数学真理独立于人类而存在于某一世界中,而且人类心灵通过冥想可以认识这些真理.笛卡儿(Descartes)断言:"只有在传达已知知识时才会用到逻辑."数学家勒贝格(Henri Lebesgue)指出:"逻辑能使我们拒绝某些论证却不能让我们相信任何一个论证."阿达玛(Jacques Hadamard)还说过逻辑只不过是批准直觉的请求.贝西科维奇(A. S. Besicovitch)说过一句挖苦的话:大数学家之所以有名是因为他们发表过许多错误的证明,也是指的这样的真理.当然他用不着补充说,这些人猜想为真的定理仍然是正确的而且最终也得到了逻辑证明.大数学家在一个定理的逻辑证明给出以前就知道这些定理必定为真,而且只要得到证明的要点就会满足了,而在费马关于数论的广泛的经典性的工作,以及牛顿关于三次曲线的工作中,甚至连证明的要点都没有给出.推进数学最主要的是具有卓著的直觉力的人,而不是会作严格证明的人.

近年来我们越来越觉察到逻辑的局限性.我们将在第Ⅳ部分看到,现代数学最深刻的结果之一——哥德尔定理,其蕴义就在于,数学不会接受逻辑的束缚.正是因此,外尔(Herman Weyl)才在他为希尔伯特写的讣告中说:"数学化也是人类最本原的独创性的创造活动,如同语言和音乐一样,对它的历史性的缺乏是不可能完全客观地加以理性化的."

许多人虽然也愿意承认创造性的活动是数学的更有意义的部分,却因为他们没有足够的从

事创造的经验,他所相信的仍与他的意愿不同.事实上,他们常问:"能创造什么呢?还有哪些没有解决的问题呢?"哈尔莫斯在他的文章中不仅给出了许多关于个别的创造的例子,还给出了好些具有广泛可能性的整类的研究工作.

因为创造过程是如此重要而又搞不清楚,许多人试图了解它是如何运作的.但是看来评估创造性在数学中产生了什么是远为容易的事,而深入探讨人的心智的运作,决定它是如何创造的,则困难得多.尽管如此,还是有一些深刻的见解,庞加莱的文章就是其中之一,而且只有希尔伯特能与他分享近代最伟大数学家的殊荣.

欧几里得全书提供的就只是数学的整体的逻辑表述,而略去了数学的其他至关重要的成分——即数学工作的目的.当然,提出这个问题甚至会被某些数学家视为异端,他们争辩说,数学分明是一门艺术,追问艺术的目的或目标本身就是对艺术的一种亵渎.持这种态度的人于今更为普遍.如此大量的新数学只是回答了个别数学家提出的问题,而辩护其价值只是依据说其作者创造了美.这些人把任何实际应用都看成掺杂和玷污.

在一百年前,没有一个数学家会怀疑他自己的工作的主要目的是理解和控制自然现象.例如高斯就把下面这段话作为自己的座右铭:"大自然,你是我的女神,我愿意在你的法律之前俯首听命."(莎士比亚,李尔王,第一幕第二场,见人民文学出版社《莎士比亚全集》,卷九,160页)然而,对数学的目的的不同的观点出现了,而且在雅可比(C. Jacobi)1830年写给勒让德(A-M. Legendre)的信中公开地燃起了争论.傅立叶(J. Fourier)在他的经典著作《热的解析理论》一书中说:"对自然的深入研究是数学发现最丰富的源泉.这一研究不仅有利于提供一个确定的研究目的,还有利于排除模糊的问题和盲目的计算.它是形成分析本身的手段,是发现那些最为重要而科学必须时时抓住的思想的手段.这些基本的思想正表现了自然发生的事情."就此,雅可比回答说:"的确,傅立叶有这样一种观念,认为数学的最终目的是公众利益和描述自然现象;但是,一个像他那样的数学家应当知道,科学的唯一目的就是追求人类精神的崇高,因此一个数论问题并不比一个星系问题的价值来得低."

数学中有许多美的篇章.无疑,数学家从事数学活动也能获得其他创造活动提供的满足感.但是伟大的数学家情愿把数学的美作为一种额外报偿,激励他们奋斗的最深层的动力则是以数学为媒介在人类的探索活动中理解宇宙,也理解人类自身在其中的角色,并且探求如何利用自然现象和自然的力量为人类服务.那些作出巨大贡献的数学家们,像阿基米德(Archimedes)、牛顿(Newton)、拉格朗日(Lagrange)、拉普拉斯(Laplace)、高斯、哈密尔顿(Hamilton)、庞加莱,甚至雅可比本人,或者是一流的物理学家,或者在科学史中占据显要地位.这决不是偶然的.几乎所有数学的意义和目的并不在于对于一堆符号作一系列的逻辑阐述,而在于这些符号必定告诉

我们关于外部世界的一些知识.

不仅数学创造源于理解自然掌握自然的强烈愿望,数学概念和数学问题的产生也来自这种愿望的驱动.科学已经为数学创造提供了土壤,提供了血液和养分.塔里兰德(Talleyrand)曾说过,一个观念论者的立场不可能坚持多久,除非他还是一个实在论者;一个实在论者也不可能坚持多久,除非他还是一个观念论者.把这句话用在数学上确实是指出了,必须对实际问题作出数学的理想化并抽象地去研究它们;但同时它还指出,那些无视数学实在性的观念论者不可能持久.我们这个时代最伟大的数学家之一的冯·诺依曼(John Von Neumann)在题为"数学家"的那篇论文*中给出了同样的忠告:"当数学这一门学科越来越远离其经验的源泉,甚至只是作为第二代或第三代而只是间接地受到来自'现实'的观念的启发,它就有了巨大的危险,它变成越来越纯粹的赏美活动,越来越纯粹是为艺术而艺术.如果这个领域还处于一些与经验有更密切联系的相关学科之中,或者这一学科是处于一些品位特高的人们的影响之下,这不一定是坏事.但是确有巨大的危险,即这个学科将沿着阻力最小的道路发展,分化为许许多多没有意义的分支,变成一大堆毫无关联的繁烦细节.换句话说,在远离其经验源泉之后,或者在极为抽象的近亲繁殖之后,数学科学有沦于退化的危险."

正因为如此,柯朗(Courant)尽管指出了,在现代数学中抽象化和推广起着至关重要的作用,在他的论文中还强调了"数学必须从具体特定的材料中获取启发,也必须再次瞄准'实在性'的某种层次.飞向抽象化不应成为一种逃避的手段,从地面起飞和回到地面都是必不可少的,尽管飞行航线的各段可能不是由同一个驾驶员操纵的".

---

* 原注:载于 Heywood, Robert B., *The Works of the Mind*. University of Chicago Press, 1947.

1.

数学的创新

哈尔莫斯(Paul R. Halmos),1958 年 9 月号

每个人都知道,近 300 年来科学和技术创新的步伐,在不断增快.实际上每个人都意识到数学在这个进展中起了核心作用.然而奇怪的是许多人却把数学看成一个静态的艺术——是由少数几个古代的身世不明的人发明的永恒真理组成的,而工程师和科学家可以按自己之需来支用.

这当然是大谬不然.数学每日每时都在进步、变化和生长.不仅所有其他的基础研究有赖于这种生长,我们日常生活最简单而平凡的进步也是这样.

已故的冯·诺依曼(John V. Neumann)喜欢用下面的例子来说明技术的发展与纯粹数学的关系:150 年前应用科学最重要的问题之一——工业、商业和政府的发展都依赖于它——就是海上救生问题.损失的统计数字大得可怕.为解决这个问题所耗用的钱财和精力也大得可怕,有时甚至是荒唐的.——不论多么复杂的花样,都可以考虑,而不觉得无稽——在远洋客轮上装上伸出舷外的小舟,尽管看来可笑,也值得试一试.当政府和工业的领导人拼命地鼓励这种种骗人的把戏时,数学家却在发展一种工具,它将挽救多得多的生命,而是所有这些荒诞发明家不敢希冀的.这个工具后来称为复变数(即包含"虚数"i,−1 的平方根,的变数)函数理论.在这个纯粹数学的概念的诸多应用之中,无线电通讯理论是最富成果的应用之一.从数学家高斯到发明家马可尼(Guglielmo Marconi)仅只几步之隔,而像麦克斯韦(J. C. Maxwell)和赫兹(H. Hertz)这样的一对天才,只要一步就可以跨过了.

数学的创新可以无止境地列下去.下面再讲几个.例如群论是在大约 100 年前发展起来的.对于高斯时代的人来说,这大概是一个丑陋而无用的发明.今天,它则是每一个物理学家的数学

武库的一部分了.不到50年前,全美国还没有一个专门的统计学教授*.现在,统计方法已经是诸如遗传学和实验心理学的不可少的工具了.冯·诺依曼的对策论第一次发表是在1928年,而在20年后似乎正在经济学和运筹学中找到应用.最后,为了使任何人都不再以为数学概念是其创造者眉头一皱就完整地提了出来,我们还可以提到,欧几里得著名的几何论证法在1900年后还被发现其中有严重的漏洞.他的推理的漏洞是由伟大的德国数学家希尔伯特在19世纪、20世纪之交才填起来的.**

在这样承认了数学中还有创新以后,我们来看一下这种创新究竟是什么,而且尽可能说明它们是怎样得出来的.对数学上的贡献有一种分类的方法如下:它可能是一个老事实的新证明,可能是一个新事实,也可能是同时处理一些事实的新方法.

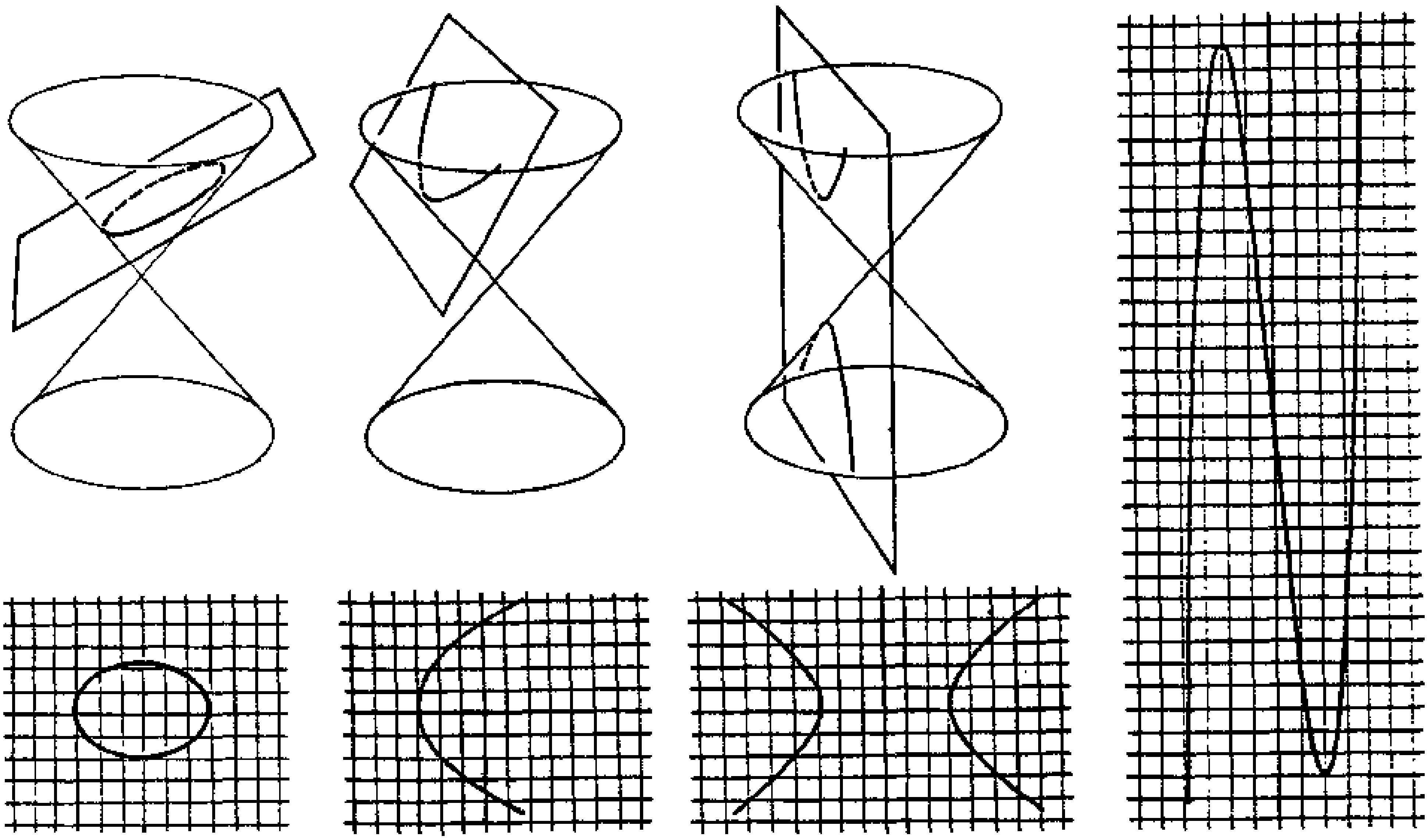
职业数学家的活动的一大部分是寻求老事实的新证明.这样做的理由之一完全是为了一种愉快:对一块老的里程碑有新的看法,这里有美的享受.另一个理由是,原来的创造者远未找到最快捷、最漂亮、最有效的途径,也没有完全领会到他想出来的东西与其他数学领域有什么联系.这还与第三个很实际的动机有关.在过去两千年间,数学已长得如此枝繁叶茂,必需不断地修整、简化、系统化、统一以及凝缩.否则,把火炬传给新一代的问题就无法处理了.今天没有一个活着的人能哪怕是大概地了解过去10年中发表的全部数学.为了使一个领域的工作者对此领域有足够的了解,以便他们能聪明地向前进,就绝对有必要找出更新的、更简捷同时又更能说明问题的证明,使他们比之前人有更深的洞察.

奇怪的是,找出比老证明更复杂的新证明有时还是有好处的.如果新证明建立了两个概念的前所未见的联系,时常会得到一种推广,使未来的学习者的工作比他们的老师轻松得多.笛卡儿的坐标几何,或称"解析"几何是一个好例子.笛卡儿的创新的后果之一,就是能用代数方法证明欧氏几何的每一个命题(见第9页插图).解析几何的优点很多、很大,但解析的证明与欧几里得的证明相比,却决说不上更简单.在绝大多数情况下,关于三角形和圆的欧氏几何事实的解析证明,就是一大堆毫无教益的繁琐计算.

解析几何的价值在于,它揭示了两个数学分支——代数与几何的联系,这两个分支曾被认为是完全分开的.早期的几何学家主要关心的问题之一是圆锥截线,即用一个平面去截一个圆锥所得的曲线(见下页插图),这样去获得圆锥截线是完全用空间图形的考虑方法.当用笛卡儿坐标描出这些圆锥截线(椭圆、抛物线和双曲线)并且写出它们的方程后,就看到所有这些方程

* 译注:这是指20世纪初年.

** 译注:指希尔伯特1899年发表的《几何基础》一书,以严格的公理化方法重新整理了《几何原本》.

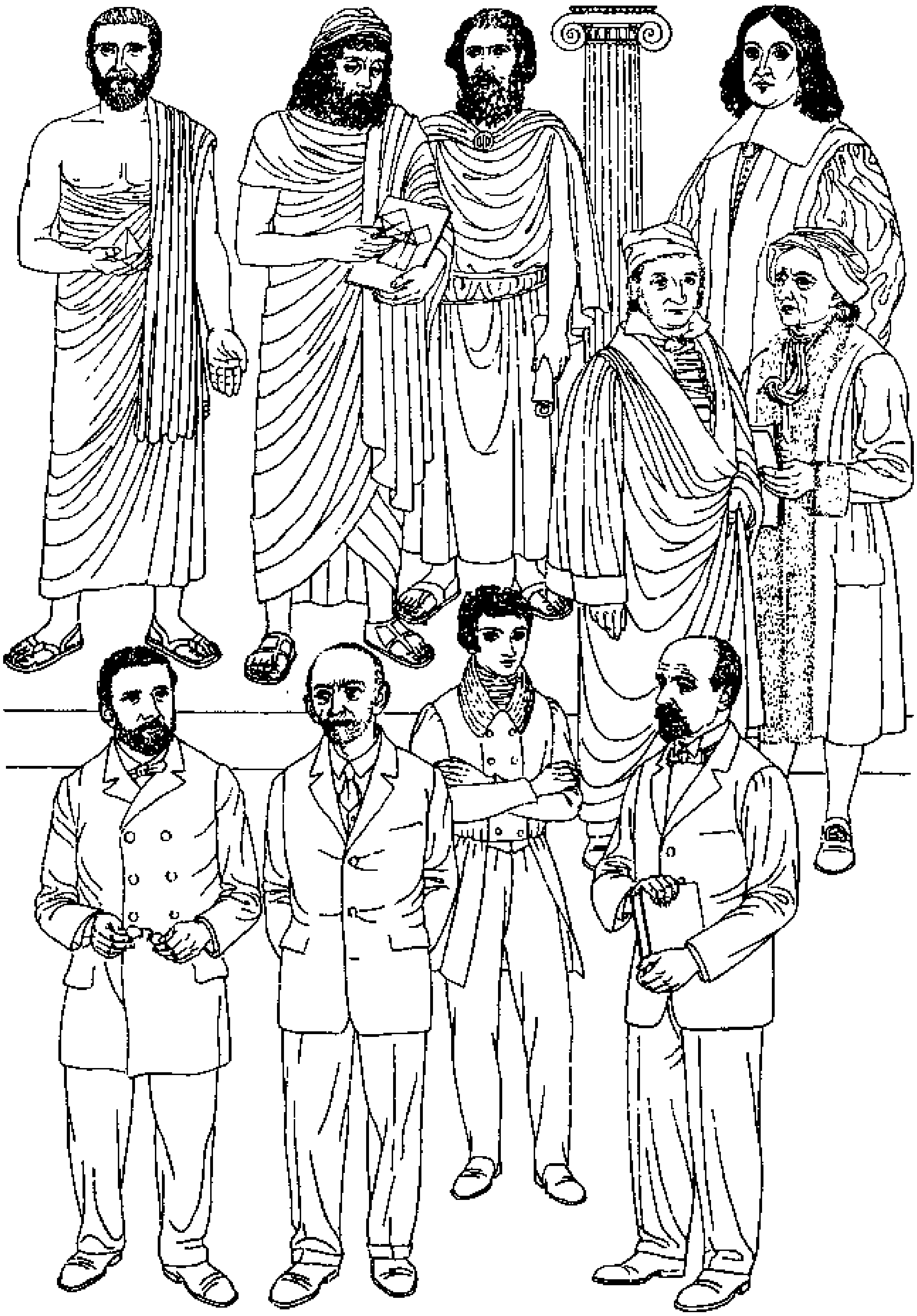


$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $y^2=2px$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $y=ax^3+bx$

笛卡儿发明的解析几何学把几何和代数联结起来了. 由左到右的前三个图,上方画的是由圆锥与平面截成的三个曲线(椭圆、抛物线和双曲线),下方画的是同一曲线如何表示为代数方程的图像. 这些方程都含有变元的平方,但不包含其更高次的幂. 最右的图形是一个含有变元的立方的方程之图像.

都含 x 与 y 的平方,但没有更高次幂. 这是一个新的事实,使我们对这些曲线的本性有了更深的理解. 它也提出了新问题:确实含有 x 和 y 的更高次幂的曲线之几何形状又如何? 现在我们已被引导到整整一类新的几何图形,单只有空间直观是不会把我们引导到这里的. 更进一步,几何上指出这些方程又使我们对其代数本性有了新的理解.

当然,绝大多数新证明,既表现出简洁性,又表明有了新的洞察. 例如由一颗炮弹的抛物线轨道以及联结大炮和目标的直线段围成一个平面区域,求它的面积. 这是一个阿基米德能解决并且确实解决了的问题:他的解法用到了著名的"穷竭法",即把许许多多简单图形加成一个复杂图形以求其面积的方法. 阿基米德的方法既是机智的,也是冗长的. 今天,一个中等才能的学



创新者——图上是本文讲到的一些数学贡献的创造者的像．上排由左到右是毕达哥拉斯、欧几里得、阿基米德和费马．站在费马前面的，由左到右是高斯和欧拉．下排由左到右则是庞加莱、希尔伯特、伽罗瓦和康托．

过微积分的二年级大学生，只要写一两行，也就能解出这个问题. 二年级大学生的有效率的解法肯定是许多年的许多数学家的深刻思想的产物.

个别的证明确实变得很简短了，但这只是由于把这个问题放在一个更广阔的背景之中，而由这个背景，很容易把这个问题抽取出来. 大的背景会扩展开来，与另一些一般概念混合起来，形成一个更大的统一的整体. 每一个时代的十个最伟大的发现，在一两个世纪之后，很可能可以放进一部薄薄的小书里，可以塞进一个研究生的口袋里. 这个研究生，如果有好运，花上两三个月就可以完全吸收了.

关于新证明就讲这么多. 关于新事实又如何呢? 在一种平凡不足道的意义下说，我们都发现过新的数学事实. 每一次当我们把退税单上的一行数字加起来时，我们都可能看到一个新数学事实：有这样的机会，即从没有人恰好看到这几个数，加起来就得到这么个数. 一件真正有意义的新数学事实具有大得多的广度和一般性. 下面是一个不太新的例子（它是欧拉在大约 200 年前证明了的），但是对于非数学家来说却可能是新的：每一个正整数都是不超过 4 个平方数之和. 平方数当然就是 1，4，9，16 等等. 它们之间的距离越来越大（见 16 页上方的图）. 若我们一次把两个平方数加起来（允许 4+4 这样的重复），我们将得到一个间隙较小的序列. 如果我们再把三个平方之和这样的数填进去，间隙就会更小. 欧拉定理说，如果再把四个平方之和填进去，就不会剩下间隙了.

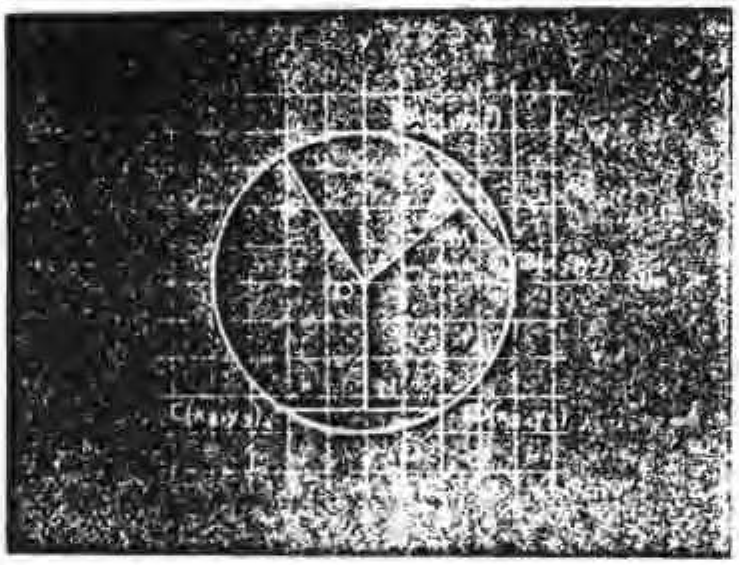
数学事实的另一个不算新的例子是方程可解性理论，但是它说明了数学的创新所能起的有力的作用. 这个理论是年轻的法国天才伽罗瓦(Evariste Galois)在 19 世纪早期创造的. 伽罗瓦的先行者对求解直到四次为止的方程式——即其中未知数的幂不高于 4 的方程式——都找到了公式.（大家都从中学代数中知道了求解二次方程的“二次公式”）. 他们很自然地都希望能找到求解更高次方程式的公式，他们花了许多时间和精力去做这件事.

伽罗瓦敢于怀疑这样的公式并不存在. 他从一个新的观点来攻这个问题，不去寻找一个技巧来给出那种被认为是藏而未露的公式，而去寻找方程式及其解的更一般的性质. 他的工作导致了群这个重要且富有成果的概念——所谓群就是一些元素的集合，在此集合中定义了一种与乘法相似的运算. 他的美丽而且深刻的智力的创造物的一个直接结果就是肯定了他的怀疑：没有一个求解所有代数方程的一般公式*. 他就这样发现了一个新的事实.

伽罗瓦的工作还是第三种创新的范例：即新途径. 群论已经证实是处理范围极广的数学问题

---

* 译注：这个表述不很恰当，应该说是没有一个公式能把 5 次及 5 次以上的代数方程的根用其系数的有限多次四则运算和开方表示出来.



已知曲线 $x^2+y^2=R^2$，$AB=CD$，

求证 $OM=ON$

M 是 AB 的中点，它的坐标是

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$OM=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}$$

展开并以 R^2 代 $x_1^2+y_1^2$ 和 $x_2^2+y_2^2$

$$OM=\sqrt{\frac{R^2+x_1x_2+y_1y_2}{2}}$$

但是 $ON=y_3$，所以应证明

$$y_3=\sqrt{\frac{R^2+x_1x_2+y_1y_2}{2}}$$

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

展开，并和上面一样代入，即有

$$AB=\sqrt{2R^2-2x_1x_2-2y_1y_2}$$

$CD=2x_3$，但因 $AB=CD$，

故 $\sqrt{2R^2-2x_1x_2-2y_1y_2}=2x_3$

$2R^2-2x_1x_2-2y_1y_2=4x_3^2$

$x_1x_2+y_1y_2=R^2-2x_3^2$

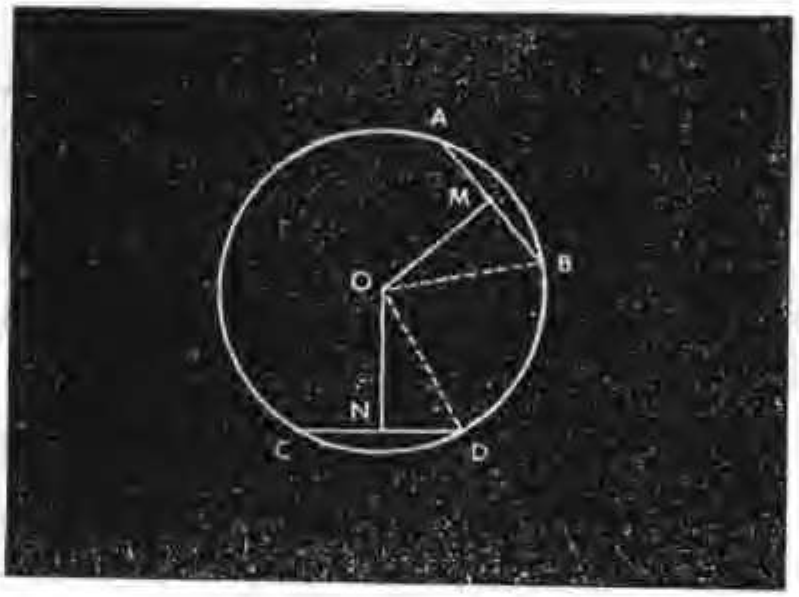
代入 OM 之式，有

$$OM=\sqrt{\frac{R^2+R^2-2x_3^2}{2}}=\sqrt{R^2-x_3^2}$$

但 $x_3^2+y_3^2=R^2$　∴　$R^2-x_3^2=y_3^2$

∴ $OM=\sqrt{y_3^2}=y_3$　∴　$OM=ON$

一个欧几里得定理的解析证明的概要如上．这个定理说圆的等长的弦距圆心为等距，这个命题的证明不需要机巧，但是其代数计算则冗长而且不能启发人．



作 OB 与 OD

$OB=OD$　　同圆之半径相等

$MB=\frac{1}{2}AB$，　出圆心到弦的垂线平分此弦

$ND=\frac{1}{2}CD$

∴　$MB=ND$　　等量的一半相等

∴　$\triangle OND\cong\triangle OMB$　斜边和一个直角边相等

∴　$OM=ON$

证毕．

此命题的欧几里得证明比之解析证明更短也更漂亮．解析几何的价值并不在于它是摘出一个证明的方法，而在于它是代数与几何的联系．

的无法估价的工具. 此外，伽罗瓦的思想还找出了代数与几何的令人吃惊的联系. 它证明了，化圆为方、立方倍积和三等分任意角这几个著名的古代难题都没有一般解. 伽罗瓦的新途径在现代代数学中引起了深刻的反响.

数学创新来自何方？有时来源在数学之外，但并不总是如此. 正如数学可以对工程、物理学、心理学、遗传学、经济学和其他学科作出贡献一样，其他学科也能保持数学创造性生气盎然：提出激发人的问题，指出新的发展路线，至少能为表述数学思想提出富有启示的语言. 发生过这样的事，当一个物理学家需要一个数学理论时，这个理论已经是现成的，就等他拿起来用. 更常有的是，当应用上需要某种新东西时，这个新东西在几十年里（或者更久一些）就已渗入象牙之塔，而在经过一个相当长的时间间隔以后，才又重新出现了.

新的数学时常就是来自好奇心. 正当的一类好奇心是很宝贵的，而只有最高级的专业数学家才具有. 对于年轻的数学家，最难的事是找到问题. 适当提出的正确的问题是斗争的一大半，而时常是只有这一部分需要灵感. 解答本身可能是困难的，它可能在使用已知技巧时需要机智，但时常是，创造和洞察带来的震撼集中在问题上.

可能应该提一下，在陈述了问题以后，数学家并不是如同科学上的福尔摩斯那样行事（而人们又常作如是想）. 数学家不是一台演绎机器，而是一个人. 他得到新数学并不只靠纯粹的思索和演绎，而是流汗、实验、归纳，还有是在走运得到的灵感. 数学实验当然用不着电线、试管或者发泡的液体；这种实验宁可说是由详细地检验各个特例或者是想求的结果的类似物构成的.（例子：写下前 10 个平方数，再系统地写下由其中两个、三个或四个相加得到的和.）数学家靠着这种实验，就可以由归纳跃进到大胆的结论. 证明这种结论可能也是件难事，但是，把工作作纯粹的逻辑上的安排更多地是用于与人交流这些事实，而不是用于确立这些事实.

回到创新的源泉. 应该指出，数学家是互相分享他们的好奇心与知识. 一个学生在他的生涯的开始时常要榨取老师的好奇心. 大人物在决定去攻打前人没有解决的问题时，本质上也要这样做. 伽罗瓦解决的不是他自己创造的问题. 总会有往日留下未曾解决的问题：两个还没有完全死掉的著名问题是四色问题和费马最后定理（准确些说，应该称为费马最后猜想，因为还没有证明）*. 20 世纪的数学家特别有幸，因为有一个预备好了的、很鼓舞人的问题清单可以照着去做. 这是由希尔伯特集中的 23 个有持探讨的问题，是他在 1900 年巴黎召开的国际数学家大会上所提出来的. 有几个问题已经解决（因此使解决者获得荣誉）；许多问题仍未解决.

---

* 译注：四色问题已于 1976 年由哈肯（W. Haken）和阿佩尔（K. Appell）用计算机证明了. 费马最后定理常称为费马大定理，于 1994 年由怀尔斯（A. Wiles）证明了.

实际应用、好奇心和历史是数学创新的主要源泉，但是还应该提另外两个：一是失败，一是错误. 人们常说，怀尔斯以前，所有打算证明费马最后定理的人都失败了*，但是他们作的努力中产生了现代代数学和数论中最富成果的概念. 至于错误，整本整本充满了光辉的数学著作，都是受错误的鼓舞而产生的. 数学家 X 的一次疏忽或一个表述不对，时常激励数学家 Y 去找到真理；如果 X 和 Y 是同一个人那就更好了.

我们现在已经研究了数学创造的某些来源，现在回到创新本身. 集合论是过去 100 年中可能最伟大的单个的创新，它是由德国数学家康托尔发明的. 在其中我们既可以找到老事实的许多新证明，也可以找到许许多多新事实. 最重要的是，我们找到了一种新途径，完全改变了整个数学的方法和精神，从数学基础最有哲学意味的问题到经典的代数学、几何学和分析学中最精微的问题.

这个理论和许多现代科学理论不同，它基于一个极其简单而且熟知的概念. "集合"一词望文生义就是表示许多对象或抽象实体（如数或点）的总体. 本页上的字母构成一个集合；所有奇数又成另一个集合. 从这个看来平凡不足道的概念中产生出了令人惊奇的数学财富之源.

一件古老的事实即存在两种类型的数——代数数和超越数，康托尔找到了一个重要的新证明. 为了领会这两类数的区别，考虑我们在代数中遇到的数. 在一个标准的问题中，我们是从一个方程 $x^3-2x^2+3=0$ 开始，然后来求满足它的数 x. 为了定义一个代数数，我们换一个方向走：从一个数开始，我们来找一个方程. 更准确些说，一个数称为代数数，如果它是 $a+bx=0$，$a+bx+cx^2=0$，$a+bx+cx^2+dx^3=0$ 等等的解，这里 a,b,c,d 等等是普通的整数（可正、可负甚至可以是零），非代数数就称为超越数.

有无穷多个方程的无穷多个解. 所以有无穷多个代数数. 问题产生了，还有没有超越数？康托尔知道答案（还有）. 但是他的证明是沿着一条完全独创的路线. 他考虑所有数的集合和所有代数数的集合. 然后他找到了一个比较这两个无穷大的总体之大小的方法.

为了比较有限集，只要数一下元素的个数即可. 所以，要证明英语辅音字母之集合大于元音字母的集合毫无困难. 康托发明了一种推广的计数方法，可以应用于无穷集合（见第 16 页下方的框图）. 然后他就能证明所有数的集合无误地大于代数数的集合. 问题就解决了：超越数一定大量存在.

用康托的方法发现了关于数和其他数学系统的许多新事实. 然而他的最深刻的贡献在于他的新观点，几乎整个数学世界现已皈依于此了. 后康托的数学家考虑的不再是个别的数、或点、或函数，而是数、点或函数的很大的集合. 这些集合具有不能归之于个别元素的性质，但是这些性质会对个别元素给以新的视角. 两个（或多个）人的集合可以手挽手地走，但是一个人就不行.

---

* 译注：这里作了一些文字修改.

从一个人交往的同伴我们可以知道关于此人的信息.

再举一个相当勉强的例子. 假使您是一个欧洲人,来看普林斯顿大学—耶鲁大学的足球赛. 在半场休息时有一个乐队出了场. 您有一个高倍望远镜可以逐个看清每个音乐家. 他们穿什么颜色的运动服对您毫无意义,所以您说不出他们是哪个大学的. 但是如果您放下望远镜而且看到整个乐队出场时排成了一个 P 字,您大概就能判定这是普林斯顿队. 当然也可能是耶鲁队向对方表示敬意,但是总的概念总是清楚的. 集合的构造就能告诉您一些关于其元素的事.

$x^n+y^n=z^n$ 其中 x,y,z 是正整数	若 $n=2$ 方程就成为 $x^2+y^2=z^2$ 它有许多解	例如 $3^2+4^2=5^2$ $5^2+12^2=13^2$ 等等	但若 $n>2$,例如对于 $x^3+y^3=z^3$ 就没有任何正整数解* x,y,z

费马最后定理说,方程

$$x^n+y^n=z^n$$

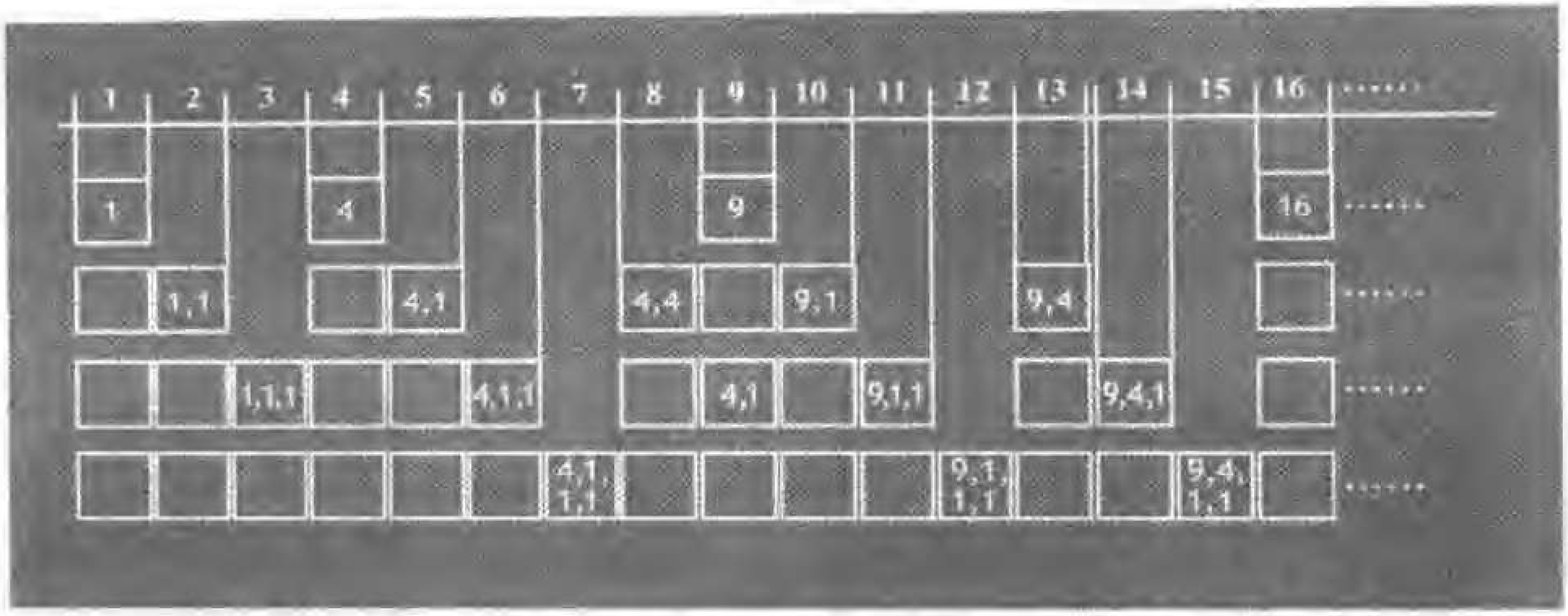
当 n 是大于 2 的整数时,不能以正整数 x,y,z 为解. 费马在一本书沿上写道,他已"有一个对这个命题的十分美妙的证明,这里空白太小写不下,"但迄今没有人能证明这个定理(见前译注).

经典的数学家关注于个别的问题. 当他遇到一个方程组时,他就会问:它们有解吗? 如果有,每个解是什么样的? 现代的数学家也想知道这些问题的答案,但是他处理问题的途径不同. 例如说,他一开始可能会问:"两个解的和或者积还是解吗?"这是一个关于所有可能的解的构造的问题. 如果答案为是,他就知道他是遇上了一个特殊类型的集合(例如一个群),这就会给他关于个别解的重要的信息.

有些问题会导致复杂而困难的集合. 考虑可以从特定的直线上取一些点作成的几个集合. (设此直线上有刻度——像温度计那样. 有一个点标定为零,其一侧标是正数,另一侧则为负数). 我们从一些简单的集合开始:零以上所有点(即所有正数)的集合;在 2 和 7 之间的所有点(也可以说是所有数)的集合;−2 以下所有点的集合. 这些都是容易想见的普通的集合,也很容易从几何图示上看到(见下页框图的三个框). 现在把整数之间的点想成十进小数,并且作出所有这样的点(即小数)的集合:其小数点左方要是一个正奇数. 这还不算太糟,稍微动一下脑筋就能想像到它(下页最下一框). 但是,其十进小数表示中不出现数码 6 的点,它们的集合又是什么

---

* 译注:原书误为整数解. 但只要令 $x=0$(0 是整数),$y=z=$任意整数都是它的解.

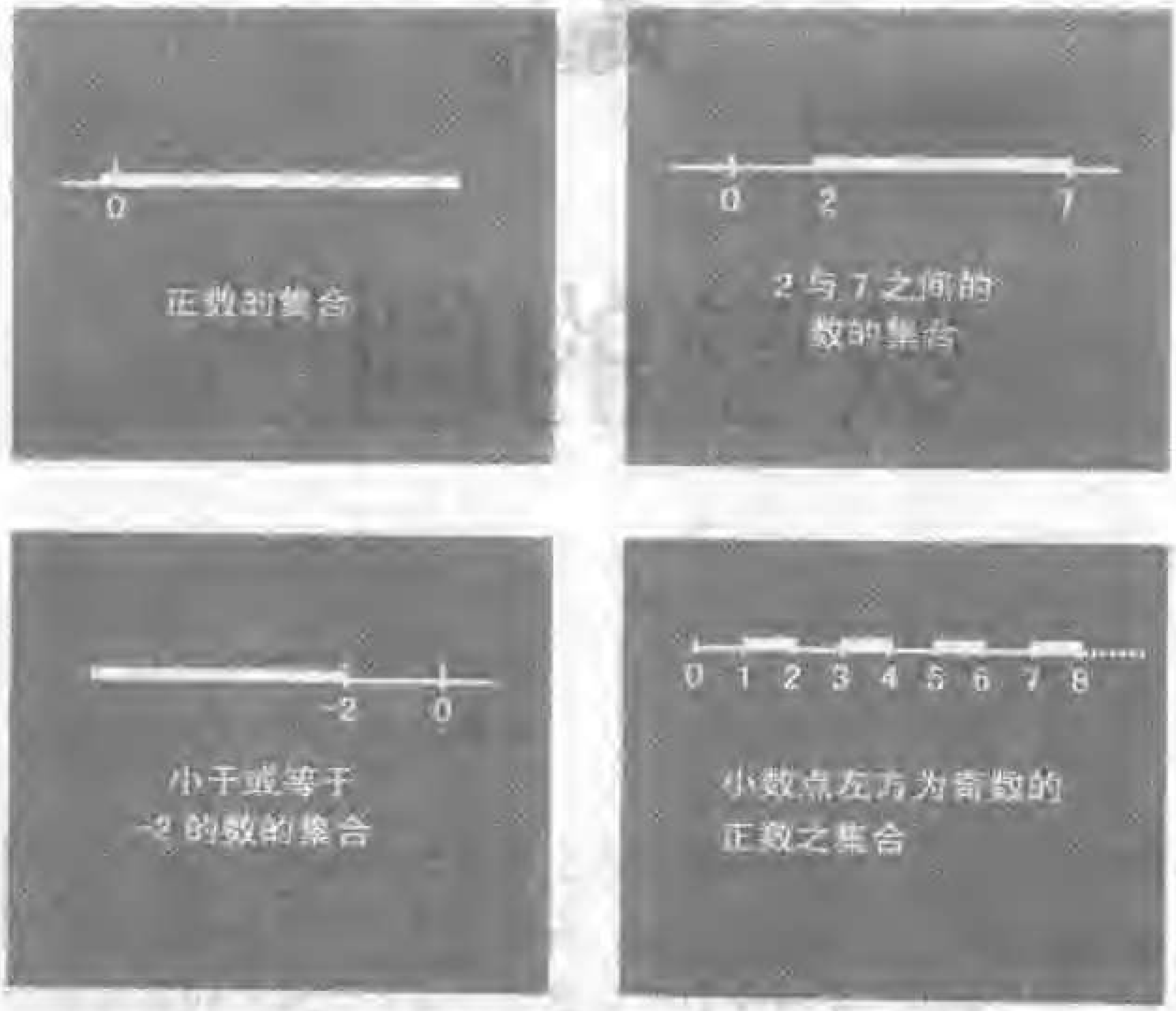


欧拉的一个数学发现画在这个表里.欧拉的定理指出,每一个正整数都可表为不多于4个其他正整数的平方和.第一行小方框中填的都是平方数.第二行以及再往下各行的方框中填的是两个、三个或四个平方数的和.框中的数就是一些数的平方,把它们加起来就得到最顶上的数.欧拉的定理对于所有正整数都成立.

集合的计数与比较的作法如图所示.有穷集合(如元音字母的集合)(左图)就是把它的元素与正整数比较(左图).对无穷集合,如正整数平方之集合作计数时,也是把它的元素与正整数比较(中图).直线上的点成为一个无穷集合(右图),它比正整数的集合更大,就是说不管怎样把一些点与正整数匹配起来,总还剩下一些点无法匹配.

样子的?这是一个完全合理地确定的集合,而且我们关于它所知不少.例如,我们知道点11/20=(0.55)和8/7(=1.142 857 142 857…)都属于些集合,而点π(=3.141 592 65…)则否.这个集合的几何图形大概是无法看清楚的,但是比之数学家经常不得不研究的集合,这还算很简单的.我们再举一个例子说明还可能更多加一点复杂性.考虑这样的点的集合,这种点的十进小数表示中,数码6出现与否均可,但不得有连续六个6出现.关于这个集合,我们仍然略有所知;例如

我们知道 11/20 和 8/7 都属于它，但是世上没有一个人能断定 π 是否在其中.



数的集合如以上诸图所示是容易想像并且图示的. 正文中提到的另外的集合就不好想像而且不可能图示了.

当然，数学家在康托以前很久就研究了一些集合（例如直线、三角形、圆等等），尽管他们不用这种名词来思考. 在集合理论早期，数学家接受这个概念是热情多于谨慎. 那时认为什么样的集合都一样好. 结果造成一种数学无政府主义. 这甚至变成一种时髦，使得有人专挑那些更疯野、最难以对付的集合而不顾老时光的那些行为较规矩、较和谐的集合. 伟大的法国数学家庞加莱有一次说过："后代人会把集合论看成一种已经痊愈了的疾病。"

但是，康托以后的数学家在经过了年轻时代的过分行为以后，已经平静下来对集合论及其在历史上的作用去作成熟负责的评价. 现在，集合论的方法可以说是从摇篮起就注入到年轻数学家身上，融于他的血液中，失去了几乎所有的可争议之处了. 已经证明，它是数学历史上最有力的统一的主题之一，这个主题揭示了那些表面上看来相距遥远的思想领域之间的联系.

今天的数学有哪一些明天会陷入争论而以后又会变成正统呢？谁也不知道. 要能够恰当地看待一项数学的创新，需要十年甚至一个世纪的时间. 只要还有一个世界，其中还有数学家在，创新就会继续. 新的思想会有人去研究，有时会被用于实际问题，而终于一定会受到喜爱.

2.

数学的创造

庞加莱(H. Poincaré),
纽曼(J. R. Newman)编辑,1948 年 8 月号

数学是怎样造出来的? 能够做出数学命题和系统的头脑是怎样的头脑? 几何学家或代数学家的智力活动比之音乐家、诗人、画家和棋手又怎么样? 在数学的创造中哪些是关键因素? 是直觉吗? 是敏锐的时空感吗? 是计算机似的精确性吗? 是特强的记忆力吗? 还是追随复杂的逻辑次序时可敬畏的技巧? 或者是极高度的用心集中吗?

下面的短文是 20 世纪初年在巴黎心理学会的一次讲演,是努力描绘数学家的头脑里进行些什么的最著名的作品. 它的作者,昂利・庞加莱(Henri Poincaré)是政治家雷蒙・庞加莱*(Raymond Poincaré,1860—1934)的堂兄,特别适于做这项工作. 他是在一切时代中都居于最前列的数学家之一,是无可比拟的分析学家和数学物理学家. 庞加莱也以科学哲学的杰出而流畅的讲解者著称. 这些作品对于科学家说来是头等重要的专业著作,而对于爱思考的外行在很大程度上又是可以接受和理解的.

纽曼**

---

* 译注:1913—1920 曾任法国总统.

** 译注:本文后来收入《科学的基础》(The Foundations of Science)一书. 此书又是作者三本书:《科学与假设》、《科学的价值》和《科学与方法》三书合集的英译本,译者 G. B. Halsted. 此书有中文本,译者李醒民,书名《科学的价值》,光明日报出版社 1988 年出版. 本文是《科学与方法》的第 3 章 374—383 页. 纽曼的编辑作了少量删节. 此文最近又由美国数学会(AMS)编辑的"What's Happening in the mathematical Sciences, 1998—1999"Vol. 4 全文转载. 本文这里是重新翻译的.

*　　*　　*

数学的创造的创生过程是一个心理学家应该特别有兴趣的问题. 它是这样一种活动：人的心智在此间取自外界的绝少，而是或者好像是只靠它自身起作用，也只作用于其自身. 所以我们希望通过研究几何思维的过程就能达到人的心智的最本质的东西.

如果我们还不习惯于数学思维，这是应该使我们吃惊，或者将要使我们吃惊的第一件事. 怎么还会有不懂数学的人呢? 如果数只援引所有心智正常的人都接受的逻辑规则；如果它的根据只是基于所有人都共有的原则，谁要想否认这些规则，想必是疯了，那么怎么还会有这么多人觉得数学那么难对付呢?

说是并非凡人均会发明，当非怪事. 要说并非人人都能记住自己学过的证明，也还说得过去. 但要说在对数学推理已作了解释后，仍然并非人人能懂，这一点想起来确是怪事. 然而，很难跟得上数学推理的人确实是多数：这无法否认，根据中学教师的经验，这一点确实无法否认.

进一步还要问：数学中怎么还会有错误? 一个清醒的头脑本不会出逻辑上的错误，然而还会有那么多很聪明的头脑，对日常生活中那种简短的推理本不会失足，却不能无误地跟上或重复较长的数学证明，而这些证明归根结蒂不过是简短推理汇集起来而已. 这些简短推理又与他们游刃有余的推理完全类似. 我们还需要再多问一下，数学家自己也不是不犯错误……

至于我自己，我必须承认，我绝做不到加法不出错误. ……我的记忆力并不差，但却不足以成为一个好棋手. 那么为什么一些困难的数学推理难不到我，却使绝大多数棋手无能为力? 显然这是因为数学是由一个总的推理进程来指导的. 数学证明并不是三段论法的简单的堆积，而是三段论法按一定次序放置. 放置它们的次序比这些三段论法本身重要得多. 如果我对这种次序有一种感觉，或者说是直觉，能够一下子看到推理的整体，我就不必害怕忘记了某一个三段论法，因为它们每一个都放在某一种排列的指定位置上，而这完全不必自己费力去记忆.

我们知道并不是每个人都具有这种对于数学次序的感觉或直觉，而正是这才使我们能预见到深藏着的和谐与关系. 有些人既没有这种很难说清楚的感觉，又没有超常的记忆力与集中的注意力，所以就绝不能懂得高等的数学. 这是多数人. 另一些人只是稍有这种感觉，但是赋有不寻常的记忆力与注意力，他们也能一步步地记得推理的细节；他们能够懂得数学，有时也能应用，但是他们不能创造. 最后，另外的人或多或少有上面说到的这种特殊的直觉，他们不但能懂得数学，虽然他们的记忆力并不超常，他们却能够成为创造者，而且根据他们的这种直觉发展的程度而能有或大或小的发明.

事实上数学创造究竟是怎么回事? 它不在于把已知的数学实体拼拼凑凑. 谁都会做这件事，但是这样的组合为数无穷，其中绝大多数毫无意义. 创造恰好在于不作无用的组合而只作有

昂利·庞加莱生于 1854 年. 父亲是一个官员和气象学家(译注:应为医生和医学教授). 在他的富有成果的职业生涯中,他致力于研究纯粹数学及其对物理学和天文学的应用. 在这些领域上他多有著述,他也以在科学哲学上的著作而著名. 庞加莱死于 1912 年.

用的，但其为数甚少. 发明就是鉴别和选择.

挖得更深入一些看一看数学家的灵魂里究竟发生了什么事，现在是时候了. 我相信，为此最好是追溯我的回忆. 但我将限于说明我是怎样写出我关于富克斯(L. Fuchs)函数的第一篇论文的. 我要请读者原谅：我会用一些专业名词，但是读者不必害怕，因为他不必去弄懂它们. 例如，我会说到，我在什么情景下找到了一个什么定理的证明. 这个定理有一个许多人都不熟悉的怪名字，但那并不重要；一个心理学家感兴趣的并不是定理本身而是情景.

整整 15 天我努力去证明不会有任何函数像我后来称之为富克斯函数的那样；我每天坐在书桌前，一两个钟头，试验着各种各样的组合而毫无结果. 一天晚上，我违反了平日的习惯喝了一杯浓咖啡而不能入睡. 各种想法纷至沓来；我觉得这些想法在碰撞，终于一对对地联结起来，可以说是成了一个稳定的组合. 一夜下来我已经确定了一类富克斯函数的存在性，即那些源于超几何级数的富克斯函数. 清晨，我立刻开始把这些结果写出来，而且仅用了几个小时.

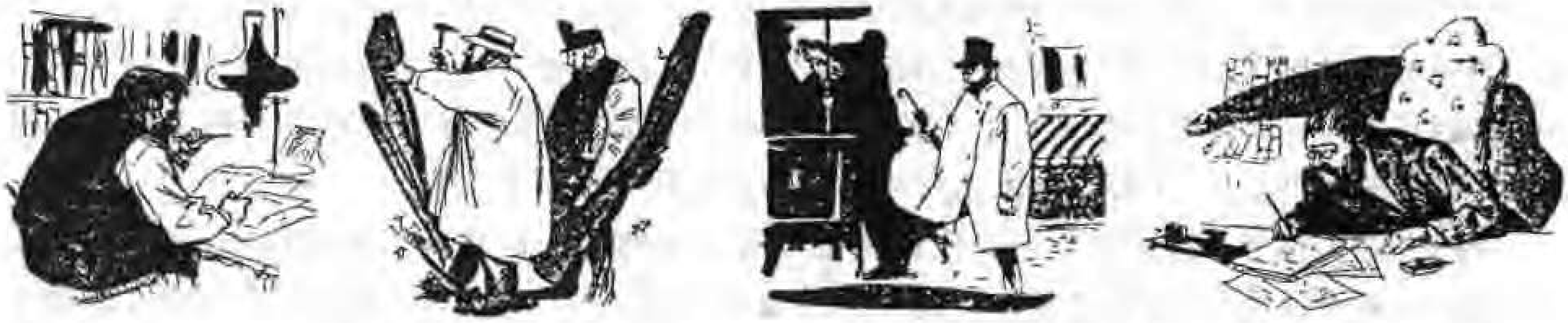
接着我想用两个级数的商来表示这些函数；这种想法完全是有意识的思考，引导我的是它们与椭圆函数的类比. 我问自己，如果这样的级数存在，它们应当具有什么特性，于是轻而易举我就成功地获得了我后来所称的 θ-富克斯函数.

正好这时，我离开住地卡昂(Caen)去参加矿业学院主办的一次地质考察旅行. 我们不断地从一个目的地到另一个目的地，数学完全让我置之脑后了. 到达库坦斯(Coutances)后，有一次我们又要乘大汽车出发到什么地方去，当我的一只脚踏上汽车的那一瞬间，一种想法突然涌入脑际：我用来定义富克斯函数的那些变换不就是非欧几何的变换吗？而这种想法事先在我头脑中并没有什么征兆. 当时我没有足够的时间证实这种想法，只感到它是完全正确的，上了汽车我很快加入了人们已经开始的谈话. 结束旅行回到卡昂我抓紧时间证实了这一结果，总算了结了一桩心愿.

后来，我的兴趣又转向某些数论问题，表面上看，与我从前的研究方向无关而且没有什么重要进展，失败使我大为扫兴，我决定到海边休整几天不去想它. 一天，正当我在一处峭壁前散步时，突然一个念头闯入脑海. 它同上次一样，鲜明、突兀，我一瞬间就断定了：不定三元二次型的算术变换就是非欧几何的变换.

返回卡昂我推敲这一结果并推导出一系列有关结论. 二次型的例子预示着，一定还存在新的富克斯群，它们不同于那些与超几何级数对应的富克斯群；我知道我可以把 θ-富克斯级数理论用于它们. 于是我果真得出存在不同于我当时仅知的与超几何级数对应的富克斯函数. 接着我自然着手构造所有这类函数. 我开始向它们发起系统攻势，接二连三地攻克了所有外围工事，

但仍有一处攻不下来，然而只有攻克它才能占领整个阵地. 所有努力似乎只是更清晰地向我展示确实有分量的困难. 所有工作完全都是在一种有意识状态下进行的.



创造过程，如庞加莱所描述的，可能是在有意识的工作时期之间下意识地进行的. 图一是研究一个问题；图二是庞加莱去作地质旅行. 当他踏上大汽车时，得到了解法（图三），后来才写出来（图四）.

于是，我为了一些兵役中的任务去了百莱里山；所以我做的事完全不同了. 有一天，当我在街上走时，那个让我停顿不前的困难的答案突然浮现在我眼前，我并没有马上就深入下去，一直等到事情办完才重新拿起这个问题. 所有材料都有了，只需要编排起来就行了. 这样我就一下子最后写出了我关于富克斯函数的论文而毫无困难.

我只讲这一个例子；再多讲也没有用了……

首先最令人激动的就是出现了顿悟，它是前此进行了长时间的不自觉工作的明显的征兆. 在数学发明中这种不自觉工作的作用是无可争辩的. 不自觉的工作在别的不太明显的情况下，其实也可以找到它的踪迹. 时常当一个人做一个困难问题时，第一次着手什么好东西也做不出来. 然后这个人可以休息一下，或长或短，然后再坐下来做这件事. 开始半小时和以前完全一样，什么也找不到，可是一个决定性的想法会突然涌上心头. ……

关于这种无意识的工作的条件还有一点要说明：如果在它之前与在它之后都进行了一段时间有意识的工作，这种无意识的工作就可能有，而且肯定会有成果. 除非是做了好几天自觉的努力，这种突然的灵感是不会发生的（上面的例子就证明了这一点），它曾经看来绝无成果，似乎由此什么好东西也得不到，所走的路看来完全是山穷水尽. 然后，这些努力绝不如人所想的毫无成果；这些努力启动了无意识工作的机器，否则这个机器就不会运转，不会产生出任何东西. ……

现实就是这样；现在讲一讲它让我有了什么想法. 无意识的自我，或者称为"下意识的自我"(Subliminal Self)，在数学创造中起重要作用. 但是通常都把下意识自我看成完全自发的. 我们已经看到，数学工作并非简单机械的，再完美的机器也做不了数学工作. 它不只是应用某些规则的问题，不只是按照一些固定的规则作出绝大多数可能的组合的问题. 这样得出的组合将是多

得不可胜数，毫无用处而又繁琐冗长. 发明者真正的工作是从中选择以消除无用的组合，或干脆就避免去做出这种组合，指导这种选择的规则将是极为微妙的. 几乎不可能准确地陈述它们；它们只可意会而不可言传. 在这种情况下，怎么能把它们想像为可以机械地使用的筛子呢？

现在有第一个假设：下意识的自我并不低于有意识的自我；它并不纯粹是自发的；它能作鉴别；它机智而且细致；它知道怎样选择，怎样预卜. 我说的是什么？它比有意识的自我更会预卜，因为在后者失败了的地方它却成功了. 总而言之，难道下意识的自我不是高于有意识的自我吗？你们都能理解到这个问题的全部重要性. ……

难道这个肯定的回答就是我前面讲的事实必然给出的吗？我承认，就我而言，我并不想接受它. 那么，重新检查一下这些事实，看一看它们是否与另一种解释必不相容.

可以肯定，在经过一个相当长的自觉工作以后才以顿悟形式出现在我们心灵中的那些组合，一般都是有用的，有成果的. 从最初的印象似乎正会得出这个结论. 由此能得出什么结论，是下意识的自我通过一种很微妙的直觉而预卜到这些组合会是有用的，从而只得到这些组合呢？或者它也得出了许多没有意义的组合，而任其仍然停留在下意识中呢？

按第二种看法，由于下意识自我的自发作用得到了各种各样的组合，而只有其中有意义的才进入到意识性的范围之中. 而这仍然是很神秘的. 无意识活动的成千产物中只有一些被召跨过了门槛，而其余的仍在其下，这里的原因是什么呢？授予这个特权的，是否简单就是机遇呢？显然不是；例如，对于我们的感官的所有刺激中，只有最强的才引起我们注意，除非还有其他原因把这些刺激引向我们. 更一般地说，那些很特殊的能够变为有意识的无意识现象，必是那些直接或间接地最深刻地影响我们情感上的敏感性的.

看到恰好是情感的敏感性应数学证明之召而来，这似乎是令人惊奇的. 数学证明本来只对理智才有兴趣. 产生这种惊奇是因为忘记了数学的美，数和形的和谐以及几何的优雅. 这是所有真正的数学家都知道的真正的美感，它肯定属于情感的敏感性范围.

那么，是什么样的数学实体赋予了这种美和优雅的性格，而且能在我们中间引起一种美的感情？这就是那些其元素是和谐地安排着的东西，使我们的心灵在观察到细节的同时，还能不费力地掌握其整体的东西. 这种和谐既能满足我们审美的需要，又能有助于我们的心智，使能持续，使能得到引导. 同时，在一个有秩序的整体放置于我们眼下时，就使我们能预见到一个数学规律性. ……所以，正是这种特殊的对于美的敏感性起着我上面说过的筛子的作用，这足以解释缺少这种美的敏感性的人永不会成为一个创造者.

然而并非所有的困难就此消失. 意识本身受到很紧的限制，而对于下意识的自我，我们却不知道它有什么界限，这就是为什么我们可以不太勉强地假设：下意识的自我在短短一段时间里

可以做出的不同的组合为数比一个有意识的人一生能做出的还要多.然而这种界限又确实是存在的.难道很可能它确可作出一切可能的组合,为数之多会让想像力也吓住?尽管如此,似乎必需这样想,因为如果它只能做出这些组合的一小部分,而且是随机做出的,则它从种种组合中选出真的好的、我们应该选择的组合,其机会也就很小了.

或者我们应该在预先的时期中的自觉工作中寻找解释,在有成果的无意识的工作之前必定有这样的时期.让我们把这些组合中将要出现的元素想像为伊壁鸠鲁的带钩的原子.当心灵完全休止时,这些原子也完全不动,可以说,好像是挂在墙上一样.……

另一方面,在一个看起来休止而实际上已有下意识工作之时,它们中有一些就从墙上脱落下来开始活动了.它们在所居的空间中(我几乎想说是在房间里)各个方向如闪电飞逝,好像一群小蚊虫,或者换一个更有学术味的比喻,好像气体运动论的分子一样.它们的互相撞击就可能产生新的组合.

预先的自觉工作起什么作用?很显然是在驱动一些原子,把它们从墙上摘下来,让它们振动.我们想,我们并没有做什么有益的事,因为我们已经把它们用一千种不同方式动起来,努力去组合它们,而终未找到满意的组合.但是我们的意志又去摇动它们以后,这些原子就再也不会回到原始的平静状态.它们自由地继续舞蹈.

现在,我们的意志并不是随机地选择它们;它追求一个完全确定的目标.所以,驱动起来的原子并不是随便什么原子,而是我们可以合理地期望由此可能得到所求解答的原子.这些动起来了的原子就经历着碰撞,或者它们彼此碰撞而进入组合,或者它们在行程中撞上了其他静止着的原子.我要再次请求原谅,我的比喻是很粗糙的,但是我确实不知道有没有别的方法使我的思想得到理解.

然而说不定是这样的,只有那种其中至少有一个元素是我们的意志自由选择的那种组合才是可能形成的组合.现在很显然,正是这样找到的组合是我所说的好的组合.可能这是在我们原来提出的假说中减少悖理之处的方法.……

我最后还要提出:当我在上面讲自己的个人看法时,我讲的只是我自己工作中的一个令人激动的夜晚发生的事.这种情况是常有的,脑的这种非正常的活动并不一定是如我上面提到的那样由某种物理刺激产生的.在这种情况下,似乎是一个人处于无意识工作之中,他已经部分地觉察到过度兴奋的意识的活动,却不能完全改变其本质.于是我们模糊地理解了这两种机制的不同,或者如果你愿意的话,也可以说是两个自我的工作方法的不同.我迄今所能作的心理学的观察,在我看来,与我所提出的观点在要点上是相符的.

这些观点肯定还需要[证实],因为尽管作了这一切,它们仍然是非常假设性的.这个问题的趣味如此之大,所以我不揣冒昧地提给了读者们.

3.

现代世界中的数学

柯朗(Richard Courant),1964 年 9 月号

数学在现代世界中越来越大的作用生动地表现在数学家人数的增加上. 自 1900 年以来,美国几个专业数学组织的会员人数增加了约 30 倍. 今天,有博士学位的人数已达 4800 人. 在过去 25 年中,在大学以外任职于政府和工业中的数学家增加了 12 倍. 具有或多或少数学性质的活动雇用了成万的熟练程度各异的工人. 在大学里,1962 年主修数学的大学生数目是 1956 年的三倍. 数学不再只是学术精英的事业;它是一个宽阔的职业,吸引了越来越多的才智之士. 在现今时期,数学研究与教学的范围大为扩大了,数学的技术已深深渗入数学科学以外的一些领域,如物理学、技术的新领域、生物科学甚至经济学和其他社会科学. 计算机和计算技术刺激了许多研究领域,它对数学本身以及固有地含有数学因素的所有科学明显地有着巨大的,而且迄今还只部分地理解了的重要性.

然而,评价数学在当代的作用的最好方法是与它以前的发展阶段作比较. 只不过近在三个世纪前,数学思想的主要结构是由几何学提供的,几何学则是继承自古人,而在直到那时的 20 个世纪中,只不过稍有补充. 然后,数学有了根本的迅速的变化. 几何学的严格的、公理化的、演绎的风格让位于归纳的、直觉的洞察力,纯粹几何的概念被体现于解析几何、微积分和力学中的数和代数运算所取代. 正是新数学的小小的智力寡头层成了科学向前推进的矛头. 到了法国大革命时期,积累起来的数学科学成果的丰富及其力量得到证实,使科学活动的本来狭窄的人的基础扩大了,写了许多教科书使新的数学能被更广泛地接受,在大学里系统地训练科学家和数学家,随着人类知识的扩大开辟了许多新的生涯.

始于 17 世纪的"经典"数学至今仍十分有力,因而保持了其中心位置. 一些最富成果的研究

古埃及草片文书断片:反映了数学的最古老的应用之一:测量土地.此件称为莱因德草片书,因为它是由莱因德(A. H. Rhind)发现的.全书是公元前1500年左右由名为阿摩塞(A'h-mosě)的书记编纂的实用问题手册.用横线分成了五个问题,应由右向左读.其上是"计算面积之一例"中计算"长宽各为10 khet(古埃及度量单位)和2 khet的矩形"一题的一部分.由上数第二题是周长9 khet的"圆形田地"面积的计算.这一断片上还有三角形和梯形田地面积的计算.草片书书名页说它是"关于事物详情的精确计算和关于一切存在事物的知识"的指导.这本草片书大部分现藏于大英博物馆.

工作来自澄清与推广微积分的两个基本概念：一是函数，它讲的是两个或多个变量的相互依赖；二是极限，它使关于连续性的直观的概念受到严格的推敲. 数学分析，包括一个或多个变量的微分方程理论，是处理变化率的不可少的工具，其概念渗透到极度扩展了的全部现代数学的领地. 本书有三篇文章（即第 13 章“数”，第 15 章“代数”和第 16 章“几何”）从三个视角——即数，几何和代数——提出非数学家也熟悉的远景. 将会看到，由于函数以及数的连续统的概念，几何学得到了解放，已经有了最富有成果的成长；它的最年轻的子孙——拓扑学和微分几何学，可以算作是最活跃、最“现代化”的数学分支. 概率论这个特殊的分支值得专门写上一章，因为它在科学和技术中已得到如此广泛的应用，它又给科学哲学中一些迄未解决的深刻问题以数学的表示.

今日的数学还反映了一个很有活力的潮流，即早自 19 世纪起，古人所遵循的数学严格性的精神，在新的征战中更得到了凝聚. 这种努力激发了对数学基础的极深刻的研究，指向弄清数学的结构，以及数学思想中的对象之“存在性”是什么意思.

数学的扩展不可避免地也促使了数学走向分化、走向孤立这种内在的趋向；数学有失去统一性和内聚性的危险. 数学的各个领域的代表之间相互了解变得困难了，数学与其他科学的接触减弱了. 然而继续取得了引人注目的进展，这主要是由于有才华的青年受到社会大力支持，而社会认识到数学之重要性与日俱增. 同时，数学活动的量的增加，使得出版物的增加有如令人目眩的雪崩，使得会议也越来越多，还有行政上的种种矛盾和商业化的压力. 所以，数学家的迫切的任务就是静下来想一想什么是数学的本质，什么是它的动力和目标，什么样的思想能把不同的利益团结在一起. 为了这个目的，若有机会向广大公众解释他们的工作，那就是更好的场合了.

“什么是数学?”泛泛的一般哲学原理，语义上的定义和各种刊物上的种种遁词不可能给出有意义的回答. 这种种说法对于音乐和绘画也毫无用处. 一个人若对节拍、和声和结构，对形状、色彩和构图，没有经验，就不能欣赏这些艺术. 要领会数学，与它的实质有实在的接触就更不可少了.

只要注意到这一点，作一些一般的评论仍然是可以的. 人们常说，数学总是趋向更进一步的抽象化，逻辑上严格的公理化的演绎以及更广泛的推广. 这种说法确有真理，但并非全部真理；它是片面的，几乎是生动的现实的讽刺画. 首先，并不专是数学才具有抽象性. 质量、速度、力、电压和电流都是物理现实的抽象的理想化. 数学概念如点、空间、数和函数只不过多少更突出地抽象一些罢了.

由欧几里得的《几何原本》长久地烙印于数学上的严格公理化的演绎这个模型，是令人注目地吸引人的，而且数学思维的最终产品时常结晶成这样. 它表明对数学实质的深入了解，加以有序地安排，把其骨骼结构暴露于光天化日之下，取得了最终的成功. 但是若过分强调数学的这一

个侧面，以致说构造性的工作、富有想像力的归纳与组合，以及我们称之为直觉的那种微妙的心智的过程，在创造性的数学活动和真正的理解上只起第二位的作用，这就误入歧途了. 确实，在数学教育中，从似为教义的公理出发并使用演绎方法，是覆盖很大一块领域的捷径. 但是，苏格拉底式的构造性方法，即由特例到一般，而避免教条式地强迫接受，更肯定地可以引导到独立的、创造性的思想.

正如演绎需以直觉来补充，不断推广的冲动也需要用尊重和爱好多彩的细节来加以调节和平衡. 不应该把个别的问题贬低到只是崇高的一般理论的特殊的例证的水平. 事实上，一般理论正是来自考虑特定问题，而如果一般理论无助于把它下面的更特殊的本质弄清楚并且找出秩序，它就是没有意义的.

一般和个别，演绎和构造，逻辑和想像——它们的相互作用正是活生生的数学的深刻的本质. 对于特定的数学成就，处于中心位置的可能是数学的这两个侧面的某一个. 在长远的发展中则一定要涉及到二者. 一般说来，这样一种发展是从“具体性”的基地起飞的，然后用抽象来丢掉压舱物，上升到高层的稀薄空气中，在那里，航行和观察都比较容易；飞行以后，降落并且到达下面刚才勘测过的个别“现实性”的平原上的特定目的地，这是关键性的考验. 总之，飞向抽象的一般性的高空必须从具体和特殊出发，而且还要回到这里.

这些原则在数学科学的发展中得到戏剧性的令人信服的证明. 开普勒(J. Kepler)具有真正诊断学家的天才，从布喇(Tycho Brahe)丰富的观测资料中抽象出了行星轨道的椭圆形状. 牛顿作了进一步的抽象，又从这些模型中导出了引力的普遍定律和力学的微分方程. 在如此一路无阻的数学抽象的高水平上，力学获得了巨大的动力. 它又下降到具体特定的地上的问题，于是在原来天体力学的领域之外，在广袤的领域中取得了一个又一个的成功.

同样在电磁学中，法拉第确立了许多实验事实，并且用自己特有的机智的解释把它们联结起来. 由此很快就抽象出了一些关于电磁现象的定性的数学定律. 后来，在这些定律适用于某些特定的简单构形的陈述后面，麦克斯韦的天才预见了有很一般的定量的定律，把磁力、电力和它们的变率组合在一个微分方程组里. 这些方程是抽象的，而且脱离了特定的可以捉摸的情况，乍看起来会感到过分奥秘而无法应用. 然而很快就清楚了，麦克斯韦之上升到抽象，在好几个方向开辟了继续前进的道路. 麦克斯韦方程表明了电磁现象的波性质，启发了赫兹关于无线电波传播的实验，开始了一个全新技术的成长，引导研究者到新的研究路线上去，其中例如就有现在非常活跃的领域——磁流体力学.

不能说麦克斯韦的方程是系统的演绎思维的产物. 但也不能把他的成就都归之于纯粹归纳的苏格拉底式的思维. 倒是应该说，麦克斯韦有着那种极其罕见的思想，它能在看来相距遥远而

没有联系的事实之间找到相似的、平行的东西，而且能把清清楚楚互不相同的因素组合成统一的系统，达到新的重大的顿悟.

在数学本身，一条相应的曲线——由具体特定的实质经过抽象，而再回到具体个别的东西——使得一个理论有意义，有重要性. 要领会这个基本的事实，必须记住，"具体"、"抽象"、"个别"、"一般"这些词在数学中没有固定的绝对的意义. 它们主要是指思想的一种框架，知识的一种状态，以及数学实质的一种性格. 例如说，一种大家都已经吸收了熟悉了的东西，很容易被看成是具体的. "抽象"和"推广"这些词并不描写一种静态的情况或最终的结果，而是由某个具体的层次走向"更高"层次的动态过程.

数学中有些卓越成果会突然来到，而看来只需作较少艰苦努力：经过由具体材料的抽象，观点就已明白，结构上本质的因素也昭然若揭. 公理化，不论它是否是欧几里得形式的，意义即在于此. 冯·诺依曼等人把希尔伯特的"谱论"由只是特例的"有界"线性算子情况推广到"无界"算子，就是近年有成效地使用抽象的一个例子.

这个影响深远的发展可以追踪为由解析几何的具体的基础上的一系列向上的抽象化. 在初等的三维空间(坐标为 x_1, x_2, x_3)的解析几何中，平面是用变量 x_1, x_2, x_3 的线性方程来表示的，而二次曲面如球面或椭球面，则由二次方程(即未知数的最高次幂是平方)来表示. 例如形式为 $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1$ 的一般方程就表示一个中心在坐标原点而以坐标轴为其三个主轴的二次曲面. 在椭球面情况下，"系数"$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是三个固定正数，它们就是 $1/a_1^2, 1/a_2^2, 1/a_3^2$，而 a_1, a_2, a_3 是椭球的三个半轴长. 椭球面即是由坐标为变量 x_1, x_2, x_3 满足这个方程的点构成的(见 30 页插图).

现在，几何的代数化不费大力就使我们能讨论高于三维的空间，例如 n 维，其坐标为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 这个空间的平面仍是由线性方程来表示，二次曲面则由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次方程来表示. "线性代数"中最重要的结果之一就是：有心的*二次曲面的方程在经过适当的坐标变换以后(或者说在把曲面图形作一个刚体运动以后)，一定可以化为 $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = 1$ 这样的代数的典则形式. 即当以原点为中心，以坐标轴为主轴时方程就成了这个形状. 这个定理在许多应用中起了关键作用，例如有很多个(n 个)质点或线路元素所成的力学或电学系统在平衡状态附近的振动理论.

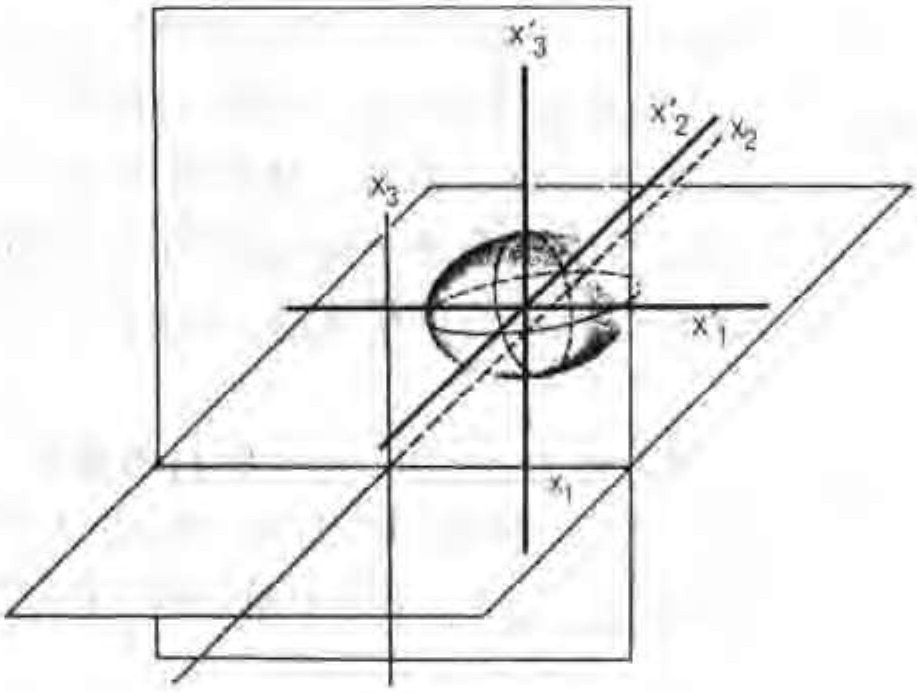
物理学家如瑞利勋爵(Lord Rayleigh**)很大胆地在应用这个结果时，让维数 n 趋向无穷大，

---

* 译注：这三个字是译者加的.

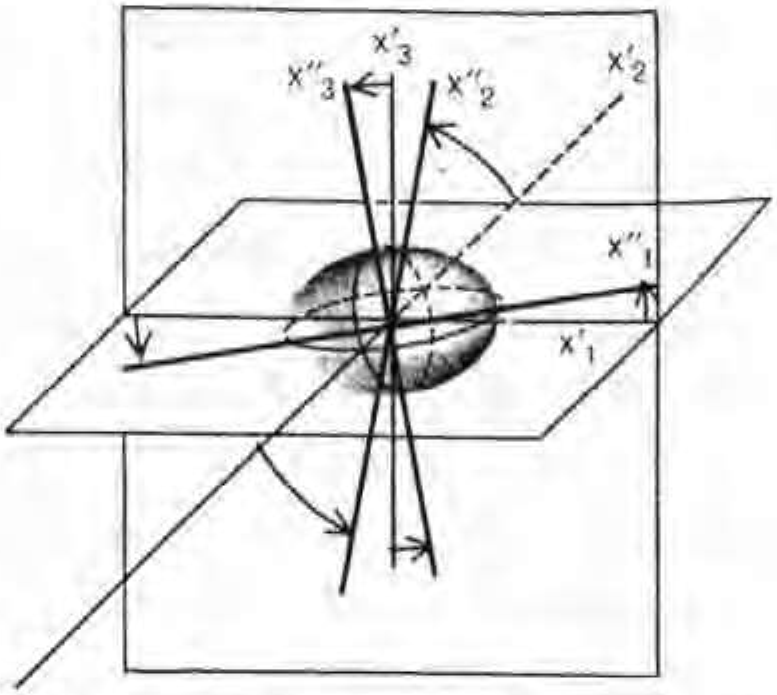
** 译注：瑞利勋爵只是爵号，他的真名是斯特鲁特(John William Strutt). 他是第三世瑞利勋爵. 同样，凯尔文勋爵(Lord Kelvin)也只是爵号，真名是威廉·汤姆逊(William Thomson).

$$25x_1^2+22x_2^2+16x_3^2+20x_1x_2-4x_1x_3-16x_2x_3-62x_1-32x_2-44x_3+55=0$$



$$x_1=x_1'+1 \qquad x_2=x_2'+1 \qquad x_3=x_3'+2$$

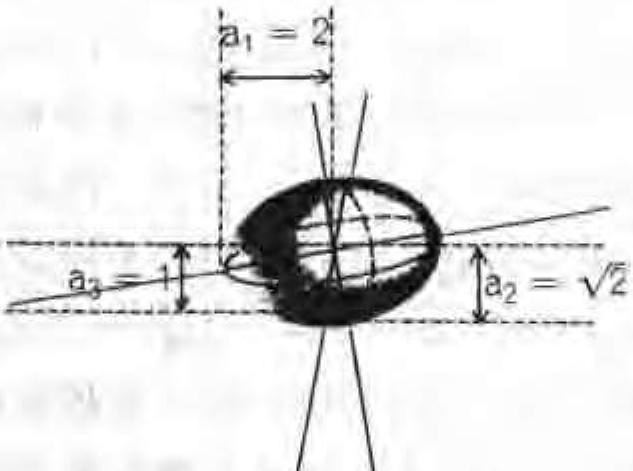
$$25x_1'^2+22x_2'^2+16x_3'^2+20x_1'x_2'-4x_1'x_3'-16x_2'x_3'-36=0$$



$$x_1'=\frac{1}{3}(-x_1''+2x_2''+2x_3'') \qquad x_2'=\frac{1}{3}(2x_1''-x_2''+2x_3'')$$

$$x_3'=\frac{1}{3}(2x_1''+2x_2''-x_3'')$$

$$\frac{1}{4}x_1''^2+\frac{1}{2}x_2''^2+x_3''^2=1$$



$$\lambda_1=\frac{1}{a_1^2}=\frac{1}{4} \qquad \lambda_2=\frac{1}{a_2^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lambda_3=\frac{1}{a_3^2}=1$$

椭球(其中心在原来观察它的空间之(1,1,2)点)之化为二次曲面的典则形式的代数与几何过程如上图所示.先把坐标系平行移动到一个新的位置(左图的粗线坐标轴),使椭球中心移到新坐标轴的原点(0,0,0).这个平移在代数上就是作一个变换(如左图下面所示),将原方程变成上右图上方的方程.再把平移后的坐标轴作一个旋转,使其坐标轴成为上图的粗线坐标轴,于是椭球面的主轴就与新坐标轴重合了*.这里作了进一步的坐标变换,如上右图下方所示.于是得到典则形式,而写在下图它所描绘的曲面的上方,半轴长及其与各项系数之关系则写在下图下方.

* 译注:原文是说对椭球面作旋转,不确,应是绕坐标轴作旋转.这一段说明作了一些文字上的改动.

而不作数学上的论证. 如此把所用到的数学推广和抽象化了一大步，在研究涉及到的质点或线路元素不是有限个而是一个连续统的振动系统时十分适合，例如弦、膜还有传输线就是这种系统.

真正伟大的前辈数学家之一的希尔伯特，看出了这种无穷多变量的二次型应该有一个靠得住的完全的数学理论. 经过他的努力，他发现了，首先，必须限制变量的范围，要求这些变量的平方和"收敛"，即有有限的值. 这件事的另一个说法是，借助于一个"推广的"毕达哥拉斯定理，就说成是无穷维的"希尔伯特空间"的一个点到原点的距离是 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots}$ 是有限的. 其次，希尔伯特定义无限多变量的二次型——其实是有界二次型——是以下形状的双重无穷求和

$$\begin{aligned}a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots\\+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\cdots\\+\cdots\end{aligned}$$

其中第一个指标(即第一横行的 x_1，第二横行的 x_2 等等，从横行变到另一横行趋向无穷，而第二个指标(即第一纵列中的 x_2，第二纵列的 x_3 等等)一个纵列到另一个纵列地趋向无穷. 这个双重无穷和要受到一个关键的限制，即它在一个希尔伯特空间的每一点都要收敛.

在这个空间里，有限维几何中关于平面和二次曲面的许多性质仍然有意义. 特别是，把二次型化到主轴的理论仍有意义. 希尔伯特证明了，每一个这一类二次型(即有界二次型)经过坐标轴的旋转可以化为典则形式. 与有限维情况作类比，希尔伯特把出现在典则形式中的一组值 λ_1，λ_2，…称为此二次型的"谱".

希尔伯特在推广通常的 n 变量二次型的主轴理论到无穷多变量的过程中发现许多新的数学现象，例如连续数学谱的出现. 此外，希尔伯特的工作对于量子力学的出现很有好处. 他的"数学谱"这个词也在原子及组成原子的粒子的能级谱中找到了预言似的相关性. 但是希尔伯特的二次型理论还不全是处理量子力学的工作；在那里出现的二次型后来发现是"无界的".

在这里，冯·诺依曼得助于施米特(E. Schmidt). 他比起其前辈人又更倾向于抽象化，把这个抽象化向上推向另一个关键的层次. 他抛弃了希尔伯特把二次型看成某个可以具体表现为一个无限的代数式的想法，而代之以抽象地表述这个概念，这样，他就可以避开早前的限制. 希尔伯特的谱论这样推广以后，就可用来满足现代物理学的实实在在的具体需求了.

群论，现代数学关心的另一个中心，也经过了类似的抽象化过程. 群论的起源可以追溯到一个从中世纪起就强烈吸引了数学家的问题：这就是求解次数高于 2 的代数方程，但是限于用代数过程，即加减乘除和开方. 二次方程的理论巴比伦人就知道. 三次和四次方程的求解是文艺复

兴时代的数学家卡丹诺(Girolamo Cardano*)和塔塔里亚(Nicolò Tartaglia)完成的.然而,五次和更高次的方程的求解遇到不可逾越的困难.

19世纪早期,由拉格朗日(J. L. Lagrange)、鲁菲尼(P. Ruffini)和阿贝尔(N. H. Abel)等发起了对这个老问题的新的深刻的进攻,而最为独创的是伽罗瓦(E. Galois).他们的新方法都是由一个已知事实开始,即形如$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$的$n$次方程有$n$个根$r_1,r_2,\cdots,r_n$,而它们唯一地决定了这个方程.(例如,设1和3是一个二次方程之根,由这两个根决定的方程就是$(x-1)(x-3)=x^2-4x+3=0$.)方程的系数是根的函数,即系数只由根的集合决定而与根的次序无关.(例如,以r_1,r_2,r_3为根的三次方程$x^3+ax^2+bx+c=0$中,系数可以写为$-a=r_1+r_2+r_3$,$b=r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1$,$-c=r_1r_2r_3$,把r_1,r_2,r_3重排一个次序,a,b,c并不改变.)

多年来研究这些方程暴露了:把根用系数表示出来这个问题的关键不仅在于研究对称的表达式,更有决定性的是研究不全对称的式子,看它们还能有多少对称性.例如$E=r_1r_2+r_3r_4$这个式子当r_1,r_2,r_3,r_4任意排列时并非不变的.若指标1和2互换或3和4互换,则E不变.然若1和3互换,所得就不再是E了.但若连续实行两次排列,一个将E改变,另一个再变回来;则这就相当于一个保持E不变的排列.伽罗瓦把这种由变换构成的集合称为一个"群",它表示表达式E的内在对称性.天才的伽罗瓦看出来,了解这种群正是代数方程的更深刻的理论的关键.

要想把这种群的各式各样的装扮与表现都包揽无余地放入一个概念之中,并且预期到还会有更大的迄今尚未发现的种种可能性,就需要用最抽象的语言表述其根本的群概念.其作法就是把数学对象的这样一种集合称为群,如果此集合中有一个规则能把两个元素"组合"成为此集合的再一个元素S;要求这个规则有结合性,即$(ST)U=S(TU)$**.此外,集合中必须包含一个"单位"元I,它与集合中的任意元素S组合起来后仍给出S,即$IS=SI=S$.最后,集合中每个元素S都必须有一个"逆"元S^{-1},使得与S的组合给出单位元,即$SS^{-1}=S^{-1}S=I$.

当然,这个抽象的定义为群的特定的"实在"的本性留有很大余地.上面说的集合的元素可以是数,是几何形体的旋转,是空间的变形(这些变形可以用坐标的线性变换或其他变换来定义),还有上面说的几个对象的排列.

群的概念以及它所带来的对数学不同分支的澄清和统一,应该看作是过去150年的一大成就.绝大部分努力都是用在上面讲的发展弧线的中间那一段,即对抽象概念的结构分析.然而,

---

* 译注:当时不少欧洲人的名字在各国文字中拼法不同,因而汉译也就不同,英文文献中卡丹诺拼作Cardan,因此也常译作卡丹.

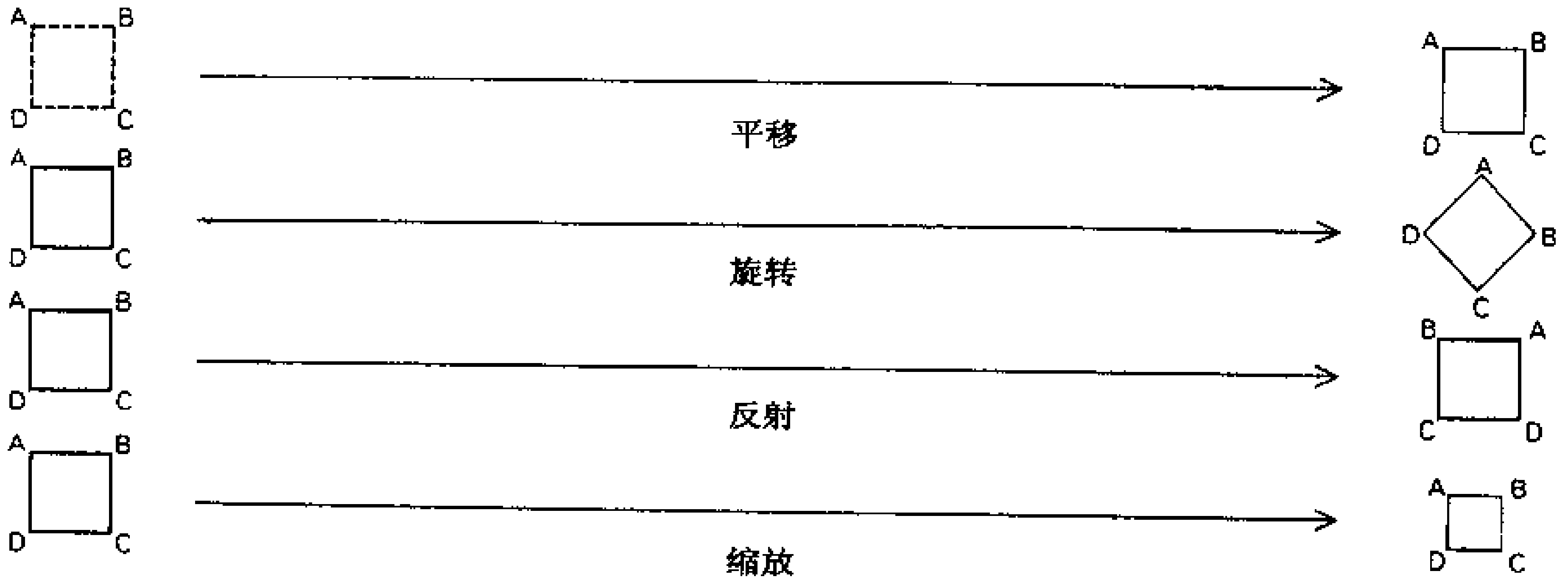
** 译注:原文误为$(ST)U=S(TU)=S$.最后一个等式是不成立的.下一个式子原文只写了$SS^{-1}=I$,漏了$S^{-1}S=1$,这也是不对的.

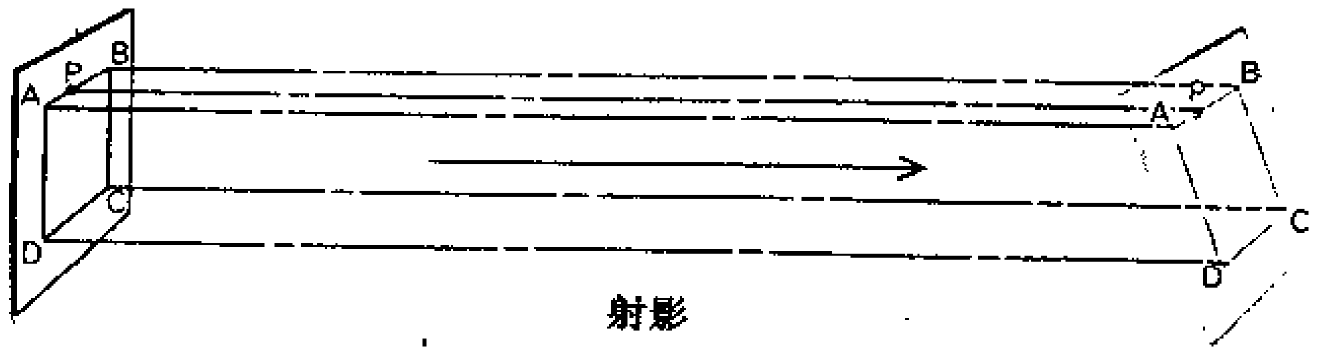
这个工作一直对阐明更确定具体的领域如数论和代数作出贡献. 沿着这条路线的一个引人注目的成就是克莱因(Felix Klein)于 19 世纪 70 年代对几何各分支的著名的分类,这个分类正是依据变换群来作的,在这些群中的变换之下,某些几何性质是不变的(见下面的插图).

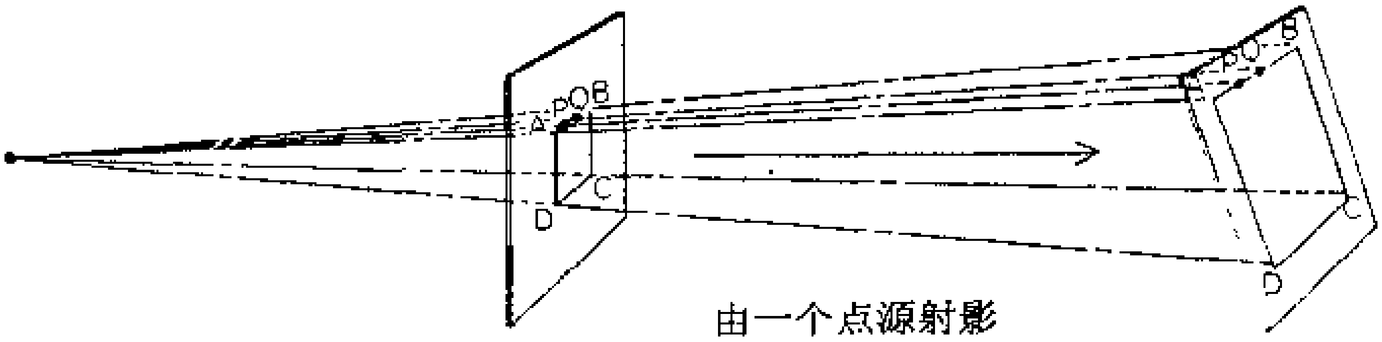
抽象的群论在更具体的粒子物理问题中找到了很有意义的应用. 因为在核粒子的构形和相互作用上无处不在的明显的和隐藏的对称性成为一个很精巧的群,才能够有这种应用. 群论在整理大量数据和预见新粒子的存在(见本书第 32 章"物理科学中的数学")上取得的成就令人信服地说明抽象在寻找"硬性"的事实上会有多大的帮助.

直觉,这个难以捉摸而不可缺少的成分,在创造性的数学中一直在起作用,甚至最抽象的思维,也是受它启发,由它指引的. 它的最为人熟知的表现,即几何直觉. 在近年的主要数学成就中,只要这项成就是从几何的工作开始,或在其中繁荣,总是出现了几何直觉. 然而在数学中有一股很强的压力,力求减少直觉的可以见到的作用,或者更好是说,力求用精确严格的推理去支持它.

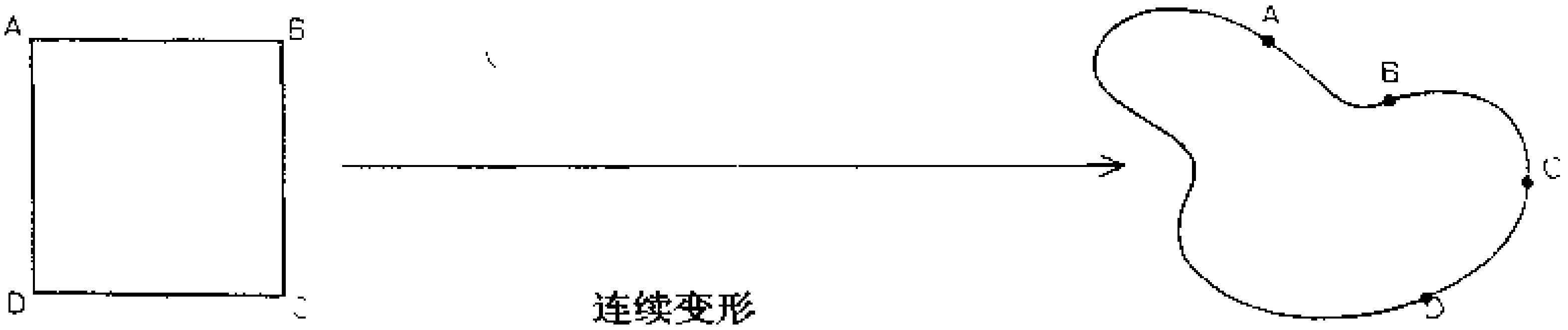
拓扑学这个最年轻而且最有活力的几何分支,说明这种直觉与理性之间的对立之富有成果的作用,令人叹为观止. 拓扑学原来只有少数几个孤立的但重要的早期发现——例如单侧的



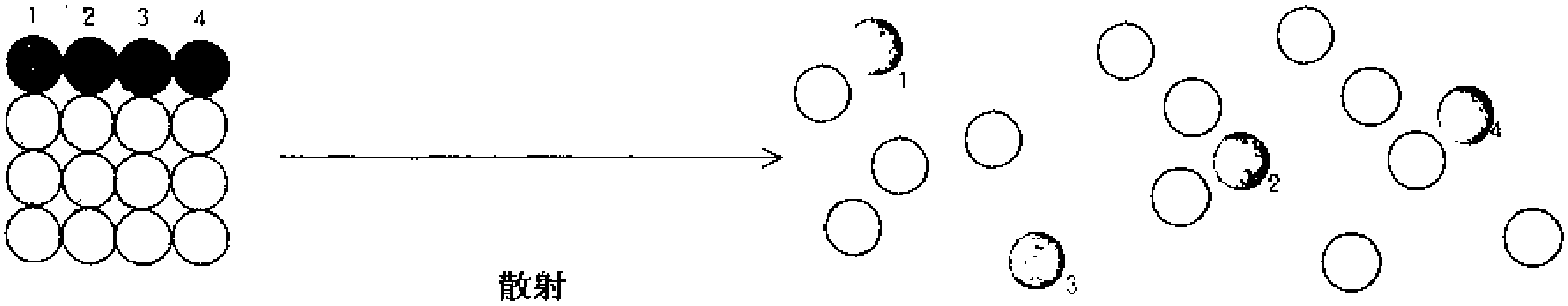




由一个点源射影



连续变形

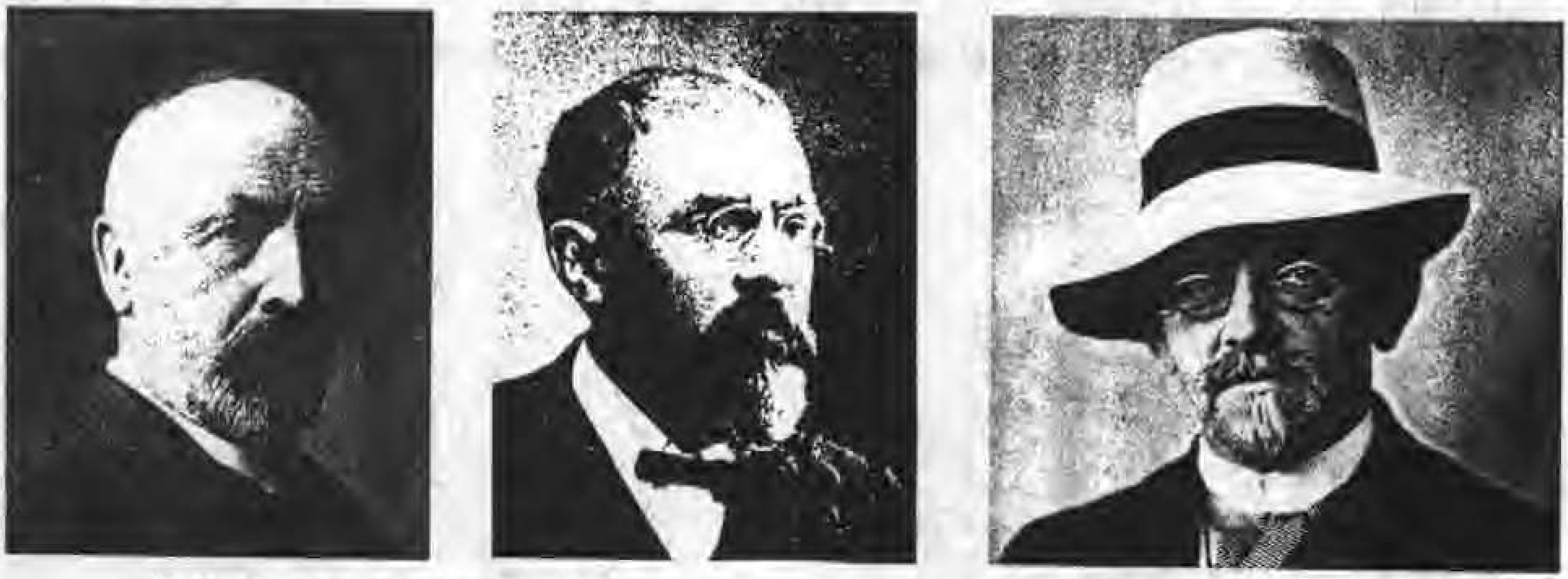


散射

几何学的类型是由克莱因提出分类的，依照几何图形在经受不同变换群之下的不变性质来分类. 欧几里得几何由上页末的上图所示，是研究例如“角”这样的性质，这些性质在正方形 $ABCD$ 经过平移，旋转，反射和缩放以后都不会变化. 上页末下图是仿射几何学，不但允许这些变换，还允许由平行射线向一个可能是倾斜的平面上的射影. 在此情况下，共线点的比值是不变的.（即是说，若 P 是直线 AB 上之一点，则 AP 与 PB 之比在上述四种变换下都不变.）本页上图是射影几何的表示，它还允许由一个点源向随意倾斜的屏幕上射影. 一个几何图形在这样的变换下的不变性质之一就是共线点的交比（交比亦称非调和比）不变. 若 P, Q 是直线 AB 上的点，则比值 $AQ/PQ : AB/PB$ 称为这四点按 A, P, Q, B 次序的交比，记作 (A, P, Q, B)*. 它在射影变换以及前几种变换下都不变）. 第四种类型的几何学是拓扑学，见本页中图，它研究几何图形经过弯曲、拉伸、扭转等所谓连续变形后都不变的形质. 四个点 A, B, C, D 的次序在变形后也不变. 在点集理论中，本页下图所示的那种类型的几何学中，点的次序，在经过所谓“散射”那种类型的变换后，是不会保存的，但与原来图形点的数目确实一样. 所以点集理论可以说是研究在所有一一对应下都能保存的性质.

* 译注：原书误为 $AP/PQ : AD/PD$.

莫比乌斯(A. F. Möbius)带——作为资本,在19世纪已经成了严肃的研究领域. 在很长一段时期,它几乎全是几何直觉的事,把曲面剪剪贴贴以力求看得见拓扑学的数学本质,就是曲面在任意连续变换下不变的性质. 然而,黎曼(G. F. B. Riemann)在这个新学科发展的早期,就把它置于注意的中心. 他在极令人注意的关于单个复变量(即包含虚数 $\sqrt{-1}$的变量)的代数函数的工作中,证明了关于我们现称为黎曼曲面的东西的拓扑学事实,对于真正理解这些函数是必不可少的.

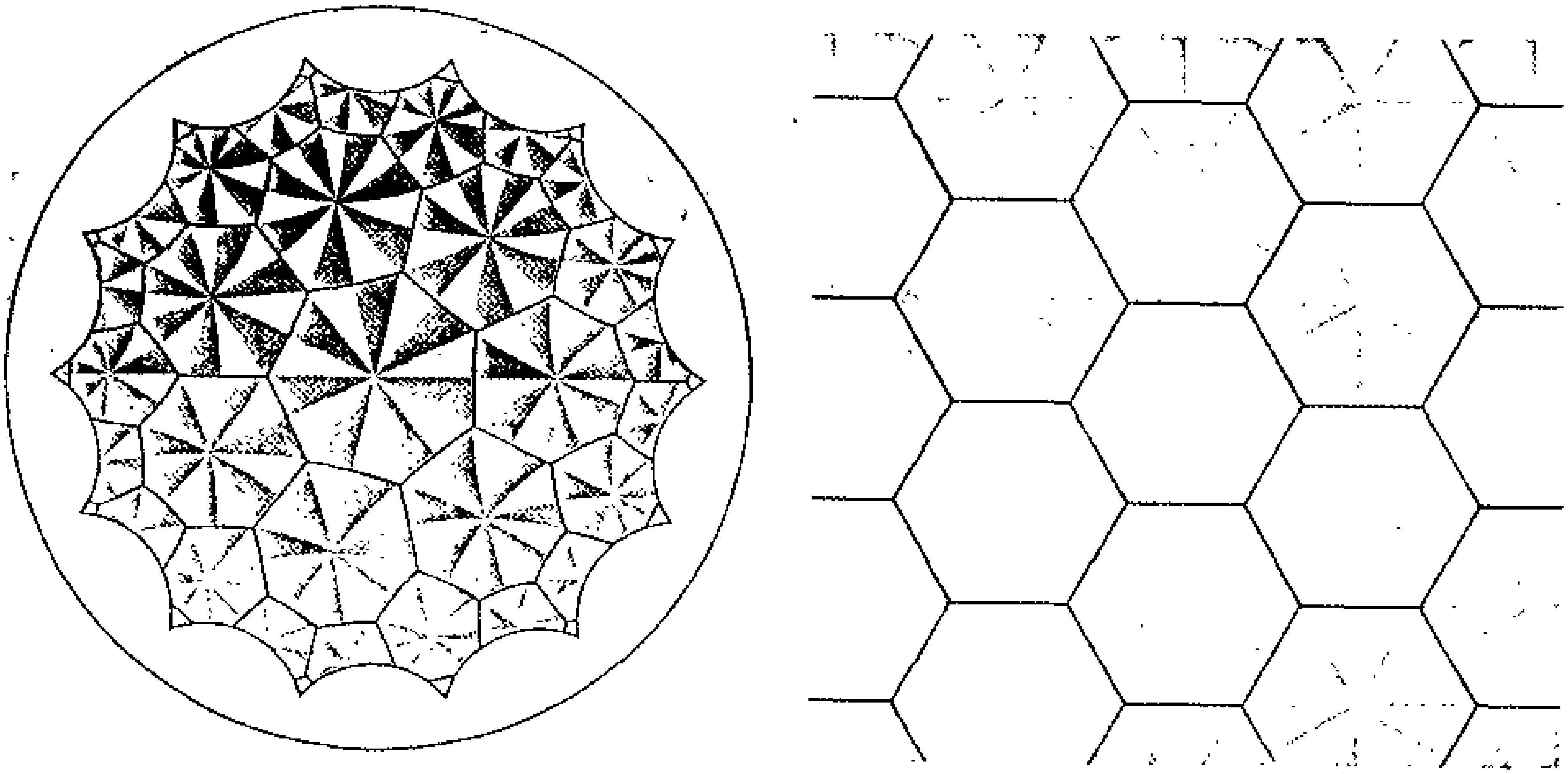


领导 20世纪思想进程的几位数学家. 左为康托(Georg Cantor),他提出无穷集合的等级,从而把数学的思辨集中在集合论上. 中为庞加莱(H. Poincaré),他警告不要对集合论过于热衷. 希尔伯特(D. Hilbert)(右图),推广了主轴理论. 他在1900年为20世纪的数学家提出了23个问题.

在19世纪中,研究者们发现了并系统地探讨了关于2维,3维甚至 n 维曲面的范围很广的拓扑性质. 到本世纪早期,伟大的庞加莱和其他人,或多或少仍然是在直觉的基础上,建立了拓扑学理论的壮观的大厦. 这个工作的进展与群论的发展密切地相伴,在数学的其他分支中找到应用,而且在数学科学向更高层次的复杂化的进化中起了作用. 例如,它在天体力学中很有用,确切些说在由引力场弯曲了的空间中构造行星轨道上很有用.

拓扑学家很快就感到迫切需要把他们的工具磨利,才能在现代数学关于精确性的癖好之下捕捉几何直觉的产物,但又不致于毁掉这些产物的令人信服的美. 这个工作几乎是由荷兰数学家布劳威尔(L. E. J. Brouwer)在20世纪最初十年中独立完成的. 由于他的巨大的努力,拓扑学现在已经能如欧几里得几何学一样严格地加以处理,这个领域现在是在逻辑上无可非议的推理的坚实的基础上进展的.

布劳威尔所面对的困难的中心是连续性概念的难题. 对于连续性是什么，例如对于曲线的光滑性，每个人都有肯定的直觉的观念. 但是初学微积分的学生，当他最初试图用精确的数学表述来捕捉连续性时，也会没有把握的. 这项工作的困难是内在的，因为连续的几何直觉与数理逻辑概念并不完全匹配. 严格的定义会把一大领域中的种种特例都搬到表面上来了，这个领域可能正是在混淆直觉与悖论的边缘上. 举例来说，很容易作出按照确切的定义为连续的曲线，而它没有长度(见本章末下图)，它处处都没有方向，或者作一曲线它在某个正方形中曲曲折折，永不与自己相交，而又可以任意地接近正方形中的任意点. 这些稀奇古怪的造出来的东西突出地表现了，在证明曲面或其他经受复杂的连续形变的几何对象的拓扑性质时，谨慎的推理是多么必要.



复变函数从无穷多页黎曼曲面的映射就产生了本图的左图. 那些圆弧边多边形在趋向外面的圆周时，就变得越来越小，然而它却相应于右图的直线边多边形. 在画出它们的平面上，当它们无穷延伸时却不改变其大小.

对于非拓扑学家来说，这种必要性不是一下子就能直觉地看清楚的. 以约当(C. Jordan)的著名定理为例：这定理说，平面上任一不自交的连续封闭曲线必把平面分成互相分离的两块——内部和外部(见本章末插图的上图). 每一个科学家、工程师和学生，按他的朴素的正常的想法，都会认为证明这样的定理没有必要，是自找罪受的习题. 但是约当在写他的经典性的分析

教程时却强烈地感到有必要给出一个证明，而且确实给出了一个. 这个证明是这个问题的微妙程度的一个尺度，而约当的证明却是完全对的！与此类似，谁也不会怀疑，二维或三维几何图形的维数在任意连续变形下都是不变的. 然而，如果仅作抽象的连续性的假设，这件事实的精确证明却是布劳威尔的大贡献.

当然，如果对连续变形的群加一些限制——例如要求有一定的"光滑性"即可微性而不仅是纯粹的连续性，是可能避开连续性概念中的某些困难的. 这样做得到了很大的成功. 现在称之为"微分拓扑"的分支近来获得了杰出的结果. 在要求了"合理的"光滑性后，变形的研究产生了拓扑结构的分类法. 与完全一般的连续性情况下的分类很不相同.

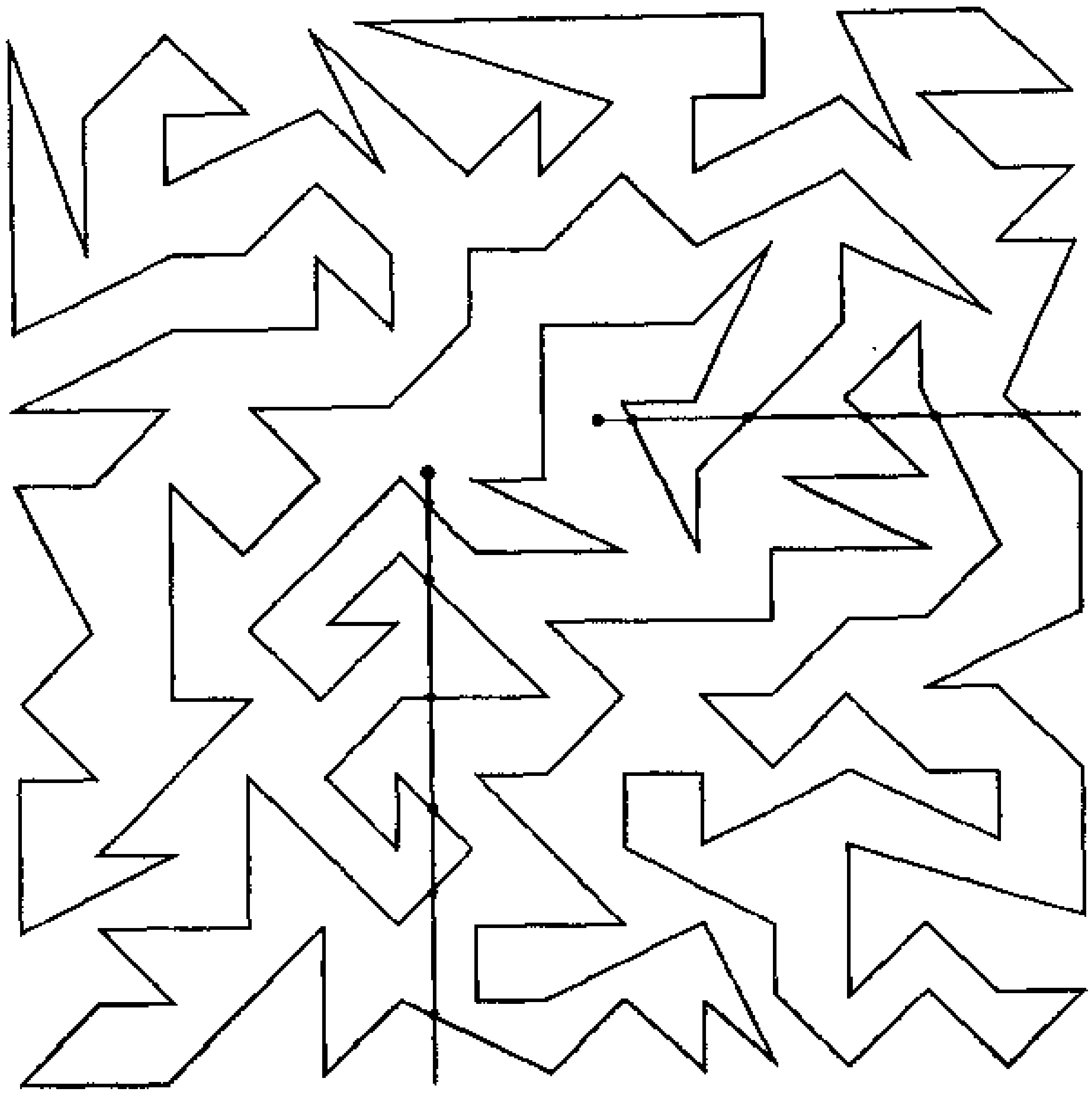
这些发展值得欢迎，还因为它表明对于无边无际的推广这一潮流的健康的纠偏. 自从有了康托尔在集合理论中的成就，在 19 世纪最后十年，这个潮流占据了许多数学家的头脑. 有些伟大的数学家，最值得一提的是庞加莱，与它进行了尖锐的斗争，视之为对数学的威胁，特别是因为它导致了解决不了的悖论. 如果说庞加莱的战斗性的批评局限性太大甚至走过了头，它仍然是健康的，因为它鼓励了关心特定的可以掌握的事物的构造性数学家.

对于同一个人或不同人，是不同的动机鼓舞了其数学活动. 肯定地，大部分数学——特别是分析数学——植根于物理现实之中，这给出了有力的启示与灵感. 对于现实的其他领域，情况相差也不太大. 在数论与代数中，令人人迷的数的世界的现实，极深地深藏于人的头脑中. 我们也可以设想，还有离物理现实更远的数学思维的逻辑过程的现实. 然而数理逻辑的奥秘的工作的基本思想对于理解甚至设计自动计算机器已经证明是很有用的.

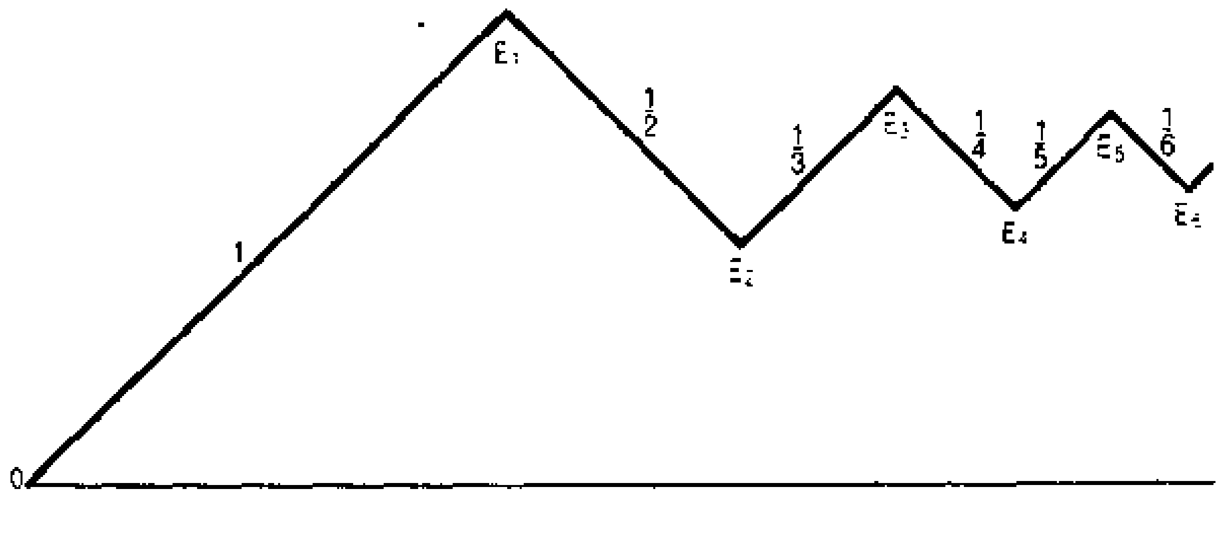
总之，数学必须从具体的特定的实质得到启发，而且再面向某种层次的"现实". 飞向抽象决不能只是一种逃避；从地上出发和再回到地面都是不可少的，哪怕不可能由同一个驾驶员掌握各段航程. 最纯粹的数学事业的实质时常是由可以捉摸的物理现实提供的. 数学，虽然是由人类理性所发出的，却应该有效地服务于描述和理解物理世界，这一件十分有挑战性的事，理所当然地引起了哲学家的关切. 然而，把哲学问题放在一边，是关心物理问题，或者表面上缺少这种关心，决不能以此作为对数学或数学家划类的标准.

事实上，在"纯粹"与"应用"数学之间不可能有截然的界线. 不应该有一类关心纯洁的数学之美的高级教士，他们只关心他们自己的爱好，另一类则是服侍别的主子的工人. 如此这般的阶级分划说得最好也只是人类局限性的症状，这种局限性使得绝大多数个人不能自由地漫游于广阔的兴趣领域.

虽然数学的本质是不可分割的，但是同一个科学家或者不同的科学家对待问题有不同的态度这一点必须承认. 纯正主义的态度要求无妥协的完美，而每一个有科学倾向的头脑至少有时会



约当曲线定理指出,任意不自交封闭曲线如图分开了内域和外域.由曲线内域作一条线引向外域必与曲线相交奇数次;由外域到外域的线则必与曲线相交偶数次.



无限的锯齿曲线是由无穷多线段组成的,其长度是 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$.这些倒数序列之和不是有限的,所以这一曲线本身没有有限的长度.

采取这种态度. 问题的解答不允许有漏洞和疵瑕，所有的结果必须是由无懈可击的推理的不断的链条中流出. 如果这种努力遇到了不可逾越的障碍，纯正主义者就倾向于重述他的问题，或用另一个其困难能够处理的问题来代替. 他甚至会重新规定什么叫做解，由此来解决他的问题；而并不罕见的是，这又会是原来问题真正的解法的初步步骤.

对于应用研究情况就不同了. 首先，不能随意修改或者回避问题；所需的是一个信得过，常人能依靠的答案. 因此，如有必要，数学家就会妥协；他必须愿意在一串推理之中插进猜测；或允许数据的证据不足. 但甚至是由最实际的要求提出的研究——例如对含有微波间断性的流体流动的分析——也需要作基础的数学研究以发现怎样提出问题. 在应用研究中纯粹的存在证明也是有意义的. 确定了解的存在，对数学模型是否适当，可能会给出人们需要的保证. 最后，应用数学是受到近似的统治的，在用数学模型反映物理过程时，近似是不可避免的.

要掌握由现实向抽象的数学模型的推移，要估计这样做能够达到的精确度，就要求由经验而变得敏锐的直觉的感觉. 这也可能涉及到把太困难而无法解决的真正的数学问题，用可以其他科学中用得上的技巧来重述. 这部分也就是智力的探险的本质，也是那些与工程师和自然科学家一同去掌握“现实”问题时所得到的满足，这些问题在人类扩大他对自然的理解和控制时是会大量出现的.

Ⅱ.

传 记

引 言

为什么我们要费神去读数学家的传记,既然我们的真实的兴趣假设为是在数学本身?了解数学家的生平肯定对理解或创造数学没有好处.理由之一当然就是单纯的好奇心.对于那些对我们的文明的伟大成就有过贡献的人,我们当然愿意知道他们的一些事情.而我们的好奇心得到了满足.我们会了解到,他们并不都是严肃、保守、墨守陈规的人,而许多人是历史上最有趣甚至令人激动的角色.

他们彼此大不相同.使一个人成为数学家的特殊才能,如果真有的话,无论是花花公子或苦行僧,商人或哲学家,无神论者或虔诚的教徒,隐士或市侩,流氓或道德的楷模,天真的人或精明的人都可能具有.许多人很谦虚,另一些人则自私自负到极点,令人无法忍受.可以找到卡丹(Jerome Cardan)这样的恶棍,也有牛顿这样规矩的人.有些人承认其他伟大人物十分宽宏大量,有人则怨天尤人,心怀嫉妒,甚至剽窃他人成就沽名钓誉.所以多的是争吵谁先发现了什么.

一般都相信数学家的创造性在年轻时就到了高峰.详细研究数学家的生平后,是否仍会相信这一点就可疑了.确实,帕斯卡(Blaise Pascal)和高斯甚至是早慧的,伽罗瓦(Évariste Galois)死于21岁,阿贝尔(Niels Hedrik Abel)死于27岁.但另一些人如拉普拉斯(Pierre Simon Laplace),外尔斯特拉斯(Karl Weierstrass),希尔伯特(David Hilbert)和庞加莱(Henri Poincaré)都是在正常年龄成熟而且终身都有著述.

最令人惊奇的事实可能是,到1900年以前,只有极少数人主要是数学家.在本书这一部分中入传的人中,牛顿、拉普拉斯、哈密尔顿和麦克斯韦都是物理学家;笛卡儿是极伟大的哲学家,而他作为生物学家的名气比作为一个数学家的名气大得多.

研究数学家的传记有比简单的好奇心更有价值的理由.通常都把数学看成一系列有逻辑次序的学科.它的特性是:各部分均与人无关而为客观的,而且每一部分似乎都是对其主题的完备

的穷尽的研究.与之对照,例如哲学则被看成是人们搞出来的,哲学的研究分成了研究个别的、变化很大而且高度因人而异的观点.但是,认真研究数学家的传记,其中自应包含对他们的工作的本质的概述,就表明数学也带有形成数学的人的各不相同的印记.数学家的工作,可以比作住在有茂密树林的野地里不同地方的人,要求他们在其所在地区中修路.他们都像聪明人那样,先选一个目标,对着这目标来修路.有人计划筑路通向矿产,有人通向水源,还有人通向高地,他们希望在那里可以看一看下一步的前程.路是筑起来了,然而彼此大不相同.有一些确已很好地开通了,只需要后来的人加宽,弄光,更加好走.另一些道路则是充满残根乱石很难走人.有些还有溪流横穿,有待搭桥.最后还有的只是一条无头死路.这些路各自带有筚路蓝缕者的印记.

数学的这一个图像比之视它为一系列穷尽的按逻辑展开的许多分支的图像,不仅更准确,而且每一个希望对数学有贡献的人都必须了解.如果他想追随前驱的足迹,他就必须知道他选择的是怎样一条路,路上会有什么险阻.平坦道路不会提供进一步贡献的机会.死路必须避开,除非他觉得自己有力量清除障碍,越过阻挡了先人前进的栅栏.总之他必须知道路是人造的,所以就会有前人没能除去的障碍和缺陷.

数学史给出了大量证据说明这个学科不可磨灭地打上了人的观点和个人品质的烙印.高斯关于非欧几何的工作引起的革命就是再好不过的例子了.高斯在1790年代开始数学上的工作,那时康德的数学哲学统治了欧洲人的思想状况.康德已经断定,欧氏几何是人类了解空间以及空间图形的性质的唯一的必经的途径.在这个意义下,数学是由无可移易的真理构成的整体.康德的思想集中体现了这个两千多年的信念.然而,为了消除欧氏几何的某一个公理(平行线公理)的令人不快的特性,一批最好的数学家构造了别种替代的几何学,并希望从中找到矛盾,这样来使欧氏几何成为不可替代不可反驳的.高斯第一个看出了,这些替代的几何学,他们称为非欧几何学,是物理空间的同样好的描述,而且找不出一个判据来决定哪一种几何学才是真实的描述.高斯关于非欧几何的工作主要是贡献了一种新观点.这种观点迫使后代数学家不再宣称数学给出的是真理,而他们只能满足于数学处子这样一个地位:数学只是现实的一个相当有任意性的人为的模型,而能对物理世界发生的事或多或少地加以描述.

数学给出的都是真理,数学定理作为与人无关的东西而存在,如同矿里的钻石一样,人所要做的仅是把这些钻石一个个地发掘出来.这样一种信念是怎样产生的呢?只要看一看早期的数学家生活在什么样的思想环境里,看一看他们对这个环境是如何反应的,这样就能解释上述关于数学的观点怎样产生又怎样被接受的.与此相似,高斯造成的变化——即认为数学收集了许多人造钻石,它们光辉夺目使得少数数学家为之目眩,说不定还有一些人为自己的创造而骄傲,这样一些人相信他们的钻石才是真的——要理解这个变化只要考查高斯在其中工作的气氛就

行了.

研究传记还有另一个价值.数学家生产公式,但公式不能生产数学家.值得注意的是,不论是罗马人的文明或中世纪的文明,虽然都经历了千年之久,都在某些文化领域中达到很伟大的高峰,却一个数学家也没有造就出来.此外,甚至在文艺复兴后的欧洲比较有利的思想气候下,也是完全偶然,三个最伟大的数学家中的两个,牛顿和高斯碰巧走上了前台.只有在特定的社会、物理和思想条件下数学家才能享有盛誉.一个关心数学活动的社会必须要知道这些条件,提供这些条件.要提供什么条件,获得这方面的知识最好的办法就是研究数学家的生平.

认识到个人所起的决定性的作用不仅能解释,何以数学这样一个理性的学科,其发展进程却是如此的非理性,而且可以在很大程度上解释,何以几种不同的文明所产生的数学如此截然不同.虽然没有一个学科像数学那么多地得益于成千人的努力的积累效应,也没有哪一个学科,其中伟大人物的作用看得更加清楚.

4.

笛卡儿

克龙比(A. C. Crombie),1959 年 10 月号

"若我仅能解释事物可能如此,而不能证明其不可能如彼,则我当以为我对物理学一无所知.盖因物理学既已归结为数学,则当可证明,且我以为即在我之浅薄知识范围内亦可做到此点."

笛卡儿(René Descartes)用这样的话表明了一种观点,而正是这种观点使他成为 17 世纪的科学革命的主要革命者之一.他反对亚里士多德所谓"形式因"和"质料因"的物理学,因为它已被证明是一个死胡同,而强调物理世界仅是一种机械而非它物这样一种"清晰而基本的观念".因为自然界的终极规律只是力学的规律,所以自然界的一切最终都可以归结为按这种规律运动的粒子之重新排列.他在解析几何——这可能是他影响最久远的成就——中创造了一种技巧,用代数方程来表现这些定律.如此,他提出了所有理论科学的理想的纲领:由数目最少的原理出发,构造一个系统,既能覆盖所有的已知事实,又可导致发现新的事实.

后来的全部理论物理都是为着实现这个理想,就是构造一个单一的理论体系使得可以观测到的一切规律性的哪怕是最微末的细节也可以从数目最少的,甚至一页纸就可以写下的基本方程导出.肯定可以说,帕斯卡(Blaise Pascal)* 和牛顿在 17 世纪就是在实施这个笛卡儿纲领,力求用力学来解释物理世界.在 20 世纪我们也看到许多科学家在寻求普适的理论,爱因斯坦和海森堡**(W. Heisenberg) 就在其中. 然而,按照笛卡儿的看法,他的无可辩驳的最基本原理——

---

* 译注:法国数学家和物理学家,哲学家,概率论的创始人之一.

** 译注:德国物理学家,量子力学的主要创始人之一.

笛卡儿的画像，由哈尔斯(Frang Hals)所作，悬于卢浮宫内. 他曾涉足的领域有:生理学，心理学，光学和天文学. 许多人认为他是近代哲学的鼻祖. 1650 年他去世于瑞典女王私人教师任内.

“是如此的显然，只要理解了它，就会赞同它”——并不是研究的终点，而只是起点.

笛卡儿的理论上的洞察力和他的纲领的革命性质和影响是无可怀疑的。但是这好像是一个悖论，他应该如此深刻地影响一些人，但是这些人却认为他的方法基本上是令人厌恶的，他们拒绝接受他的一些最重要的假设和详细结论. 伟大的荷兰数学家和天文学家惠更斯(Christian Huygens，1596—1687)*，他的父亲曾是笛卡儿的挚友，在晚年承认，笛卡儿的物理学除了一小部分以外，他再也无法接受. 但是他说，正是笛卡儿的《哲学原理》第一次打开了他的眼睛认识了科学. 他说，笛卡儿不仅暴露了旧哲学的失败，而且提出了“关于自然界存在着的一切的可以理解的原因作为替代”. 正如对于革命者常有的那样，笛卡儿留给后人的，不仅有他的成就，也有预言和幻影.

笛卡儿后来也承认他对科学的纯演绎的数学化的理想，在大自然的复杂性和物质之谜面前是失败了. 这个失败在生理学中特别明显，而他在这个领域中的冒险最为大胆. 笛卡儿从他的失败和妥协中却作出了对科学思想的另一个贡献，其重要性在许多方面都与他原来的理论纲领相当. 他被迫回到实验和假设，证明了他是提出假设性的模型的第一位大师. 这后来在所有的科学研究中成为不可少的工具. 笛卡儿关于生理过程的理论模型成为他的想像力和实验天才最出色的表演.

勒内·笛卡儿(René Descartes)于1596年3月31日生于土兰省(Touraine)克纳兹(Creuse)河边的美丽小城拉埃依(La Haye). 出身于小贵族，世代为官；他的父亲是布列塔尼(Brittany)省议会的参事(Counselor). 笛卡儿出生一个月以后，母亲就辞世了. 他从母亲那里得到的则是“干咳的病症和苍白的面容”. 直到20岁. 他也从母亲那里继承了一笔财产，使他能得到完全的经济独立. 因为他十分纤弱，人们都以为他难以永年. 但正由于他不得不静养而从年幼起就得以沉溺于读书的热情.

当他10岁时，父亲就把他送到新建立的耶稣会学校拉弗莱什(La Fleche)公学，就读八年半，受到良好的教育，包括逻辑，道德哲学，物理学和形而上学，古典的几何学和现代的代数学，还了解了伽利略关于望远镜的工作. 他的心智的主要特征都在拉弗莱什早熟地表现出来了. 当他接触到了经典著作时，他喜爱诗歌. 笛卡儿“绝非仅为几何学家的几何学家”(帕斯卡尔对他的描述)，在他的一篇早年的文章“奥林比卡”中写道：“诗人之诗句有比哲学家之文句更为严肃者. 盖因诗人之写作出于激情及想像力. 吾人内心实有智识之种子，如燧石之蕴火种然. 哲学家导之以理性，诗人则以想像力击燧取之，于是电火飞逝，实更灿烂.”

---

* 译注：也是大物理学家，光的波动学说的提出者.

智力的聪慧是笛卡儿最惊人也可能是更危险的天赋. 他的一位同学这样描述他杰出的辩才. 他首先让对手在定义上以及共同接受的原则的意义上与他一致,然后他就建立起完整的演绎论证,而这是很难撼动的. 他在拉弗莱什养成了他终生不变的习惯. 人们免除了他一些事务,让他迟迟不起床. 他觉得这样就可以尽量充分地沉溺于他出自本性的对冥思的爱好.

20 岁时他从普瓦蒂埃(Poitier)大学学完法律后来到了巴黎. 他在这里成了一个无所事事的时髦青年. 然而不久后他的思想就转向数学和哲学. 他这是受了一些比较严肃的友人的鼓励,其中有他在拉弗莱什认识的 Minim 修道士梅森(Marin Mersenne)*. 梅森本人也是一个有才能的数学家和有技巧的实验家. 他在巴黎皇家广场(Place Royale)的修道院后来成了"博学者"(savant)的聚会场所,这就是这个世纪稍晚建立的巴黎科学院的前身. 梅森和别人有广泛的通信来往,这些信件后来只有小部分发表了;所以,在还没有科学期刊的那个时代,他就成了科学信息的中心. 他还曾把伽里略的《对话》和《谈话》(按即指伽里略所著《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》和《关于两种新科学的谈话》二书——译者)译出,前书译于 1634 年,即伽里略被定罪的次年. 梅森终生是笛卡儿的主要朋友,而当笛卡儿于 1628 年永远离开法国后,梅森一直对他邮告巴黎的科学新闻.

1618 年笛卡儿以绅士志愿者的身份参加了拿骚王子摩里斯(Prince Maurice of Nassau)(即后来的奥兰治亲王(Prince Orange)的军队. 他驻于荷兰布雷达的军营中,当时正值法国——荷兰军队与西班牙军停火(战争正是由于低地国家(即今荷兰、比利时、卢森堡)要推翻西班牙人的统治). 笛卡儿的科学兴趣对于一个军官是很适合的:弹道学、声学、透视学、军事工程和航海.

有一天——1618 年 11 月 10 日——他恰好见到一群人聚在一张贴在街上的公告面前. 公告是用佛兰芒语写的,笛卡儿就请人群中一个人为他翻译成拉丁语或法语. 这个公告恰好是一个数学问题的征解. 笛卡儿请求为他翻译的那个人正是这个国家领头的数学家之一,贝克曼(Issac Beeckman). 笛卡儿解决了这个问题,并把解答交给了贝克曼,他立刻就看出了这个青年人的数学天才,并着手激起他对理论问题的兴趣. 那年冬天,贝克曼建议笛卡儿去寻求落体加速度的数学定律. 他们二人都不知道伽里略当时事实上已解决了这个问题,而解就在《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》一书中. 笛卡儿的解法基于不同的假设. 笛卡儿和伽里略二人都没有描

---

* 译注:Minim 专指 15 世纪由圣弗朗西斯(St. Francis of Paola)所建立的托钵僧团体中的修道士. 这个教派持戒甚严. 梅森本人在数学上有不少贡献. 例如他对形如 2^n-1 的素数的猜想,指出当 $n\leqslant 257$ 时一共有多少素数,多少合数,直到 1947 年人们用计算机检验才发现只有少数几个不对. 但是人们都不知道他是怎样得到这些结果的. 这种素数后来就称为梅森数. 到 2003 年 11 月为止,人们找到的最大梅森素数是 $2^{20\,996\,011}-1$. 据说他还曾随伽里略学过物理学.

述出实际的下落方式，这一点笛卡儿并不太在意.他那时还没有学会把数学分析与实验联系起来..

这一时期笛卡儿的生活之能见于光天之下，我们实在有负于1905年才为人发现的贝克曼的日记.这是一个自我发现的年代，年轻的笛卡儿的心智，以不可置信的速度在范围广泛的一大堆问题中流动.笛卡儿已经找到了一种方法的痕迹，以后他将循此方法把人类的知识统一在一组简单的、中心的前提之下.

1619年3月26日，笛卡儿告知贝克曼"一种全新的科学，凡有关量之一切可能提出的问题，不论此量属何种类，亦不论其为连续或间断，凡此问题均可循其本性作出普遍的解答，……故而几何学中有待发现者殆已无几."笛卡儿就这样公布了他发现了解析几何，亦即伏尔泰所说的："将代数方程给予曲线的方法."生于14世纪的笛卡儿的同胞奥莱斯姆(Nicole Oresme，1323—1382)可能对此有新贡献.* 17世纪笛卡儿的同时代人费马也有相当的可能独立地作出同样发现，但是他没有继续追索.直到1637年笛卡儿才发表这个"新科学".他写成长文《几何》，其中既有普遍的原理，又有几个特殊的应用.其普遍性表示于笛卡儿证明了阿波罗尼斯(Applionius 约公元前262—190)的圆锥截线都可以用二次曲线来表示.因为圆锥截线既包括了古代天文学家的圆，又包括了开普勒的椭圆，还有伽里略描述抛射体轨迹的抛物线，这就很清楚，笛卡儿的第一个发明就把一个有力的工具交到物理学家手中了.如果没有它，牛顿也会步履艰难了.

在见到贝克曼整整一年后发生了笛卡儿一生中可能是最重要但肯定是最有戏剧性的奇特的经历.那时他已参加了巴伐利亚(Bavaria)选帝侯**的军队——巴伐利亚是法国在30年战争中另一个盟友——于是在寒冬季节笛卡儿蛰居于多瑙河上一个边远地方.11月10日一整天，他终日孤独地冥思于著名的Poèle中(Poèle直译即为"炉灶"，其实是烧得太暖和的小房间).这一天，他作了两个决定.第一，他决定自己必须有系统地怀疑他所知道的物理学以及一切有组织的知识中，而去寻找那些自明的、确定的出发点，以便由此可以重建全部科学.第二，正如艺术或建筑上的完美的作品总是出于一位大师之手，他决定必须由自己之手独立地完成这个纲领.

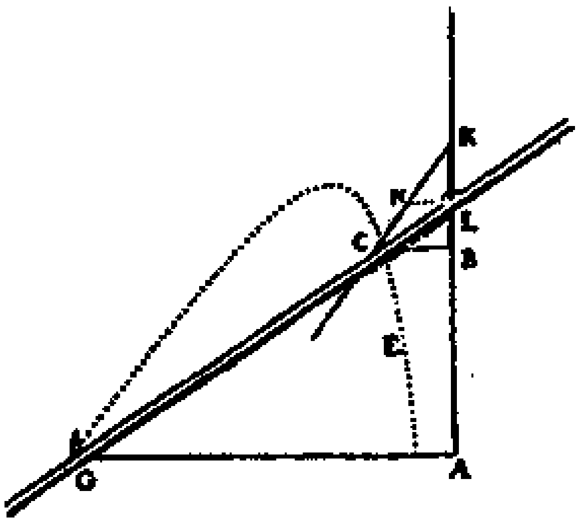
按照17世纪传记作家贝依(A. Baillet)的说法，笛卡儿那晚做了三个梦.第一个梦里，他在一个狂风大起的街道上，因为右脚不着力而站立不稳，但是他身边的同伴却站得很稳.他醒了又再次入睡.他又一次梦醒，梦中他听见一阵雷鸣，房里充满了火花.他又一次睡着了，并且梦见在

* 译注：他是法国里秀(Lisieux)的主教兼巴黎那瓦尔(Navarre)学院的教师.他已有了用图像表示函数的思想.因为笛卡儿总是尽量不提及前人的贡献，文中才有此说.

** 译注：当时德国分裂为许多小公国，各由诸侯统治.诸侯中有一些有权参加选举神圣罗马帝国的皇帝，是为选帝侯.

桌子上有一本字典，然后还有一本书，他“一眼看到一句话 Quid vitae sectabor iter?（拉丁语：我应遵循何种生活?）同时还有一个他不认识的人，给他几首诗，开首一句是‘Est et non’（法语：是耶非耶）并对他大为推荐此诗”. 这些诗句笛卡儿认出了是奥索尼乌斯（Deimu Magnus Ausonius，约 310—395）*的两首诗开始的一句. 笛卡儿还没有完全醒来时，就开始解梦：第一个梦是警告他过去的错误，第二个则是真理降临而占据了他的心灵，第三个则是向他打开了全部科学的宝藏以及通向真知的道路. 不论贝依在讲这个故事时是怎样添油加醋了，它象征了笛卡儿完全肯定他的通向真知的道路是正确的.

他的军旅生涯继续到 1622 年，其中目击了布拉格战役，普雷斯堡***和诺伊豪塞尔包围战. 以后几年他从波兰到意大利漫游欧洲，直到 1625 年返回巴黎. 他于是又重新参加了梅森周围的小团体，研究他的“普遍数学”，思考从道德心理学到延年益寿的形形色色的问题. 从这些追求中他又分心于社会的漩涡，音乐，读读闲书还有赌博，总之被他的游手好闲的当代人的时尚所吸引. 他的父亲说他是“除了会穿软皮衣服外什么也不会的人.”



解析几何，按伏尔泰的说法，即“将代数方程给予曲线的方法”. 本图摘自《几何》书讲抛物线的一页.**

发生了一件事，把笛卡儿的视线转向了他的一生的使命. 他和一群时髦的上流人士，包括他的朋友梅森，来到颇负盛名的红衣大主教德·贝律尔（Cardinal de Bérulle）家里听一位名叫德·尚多（Chandoux）的人讲他的“新哲学”. 只有笛卡儿一人不鼓掌. 当人们逼着他发表意见时，他作了长篇讲话，说明一个人只要头脑清楚，就既能为一个命题找到显然而且令人信服的例证，对于其反命题也行，他证明只要用他所谓的“自然的方法”，就连一个平庸的思想家也能找到被证明为真的原理. 这使他的听众大为惊奇. 几天以后，当笛卡儿去访问贝律尔时，红衣大主教就要求他献身于对哲学、“力学和医学”的应用.

1628 年 10 月，笛卡儿又来到荷兰，以后除了三次短暂地回到法国，以及 1649 年最后去斯德哥尔摩以外，终生都定居于此. 在此，他息影谢客，他的最亲密的朋友和学生除外，把他的精力用

---

* 译注：希腊诗人和修辞学家.

** 译注：《几何》一书有中译本，袁向东译，武汉出版社 1992 年出版. 本图见 25 页.

*** 译注：即今斯洛伐克共和国布拉迪斯拉发. 30 年战争的威斯特伐里亚条约在此签署.

于将他的原则应用于哲学，科学与数学，并传播他的结论. 当他最后应瑞典女王克丽斯蒂娜之邀赴瑞典，不到一年即于 1650 年 2 月客死斯德哥尔摩.

可以把笛卡儿描写成一位离心型的思想家：他总是从一个坚固的中心理论观点出发，主要是向外运动，这与培根和牛顿这类思想家截然相反. 法国作家和科学的业余爱好者丰特内尔(Bernard le Bovier Fontenelle)* 在他著名的发表于牛顿身后的《牛顿赞》一文中，对牛顿和笛卡儿的方法作了一番文字酣畅的对照："这两个处于对立的伟人却有许多共同之处. 两人都是第一流的天才，生来就是要统治他人的思想，建立自己的帝国. 两人都是杰出的几何学家，都看到有必要把几何学引人物理. 两人都在一种几何学上建立了自己的物理学，而这种几何学几乎全是他们独力发展起来的. 但是其中一人(笛卡儿)力求大胆一跃即到达每件事的源头，用某种清晰的基础的思想使自己成为第一原则的主人，然后，居高临下把自然界的各种现象当作这些原则的推论. 另外一人(牛顿)则比较胆怯而谦逊，他开始自己的征程时是依靠了种种现象向上攀到未知的原理，直到这些原理可以提出种种推论的链条时，才决定承认它们. 一个人是从他已清楚地知道的东西出发，来寻找他所见的东西的因. 另一个人则从他所见的东西出发以寻找其因."

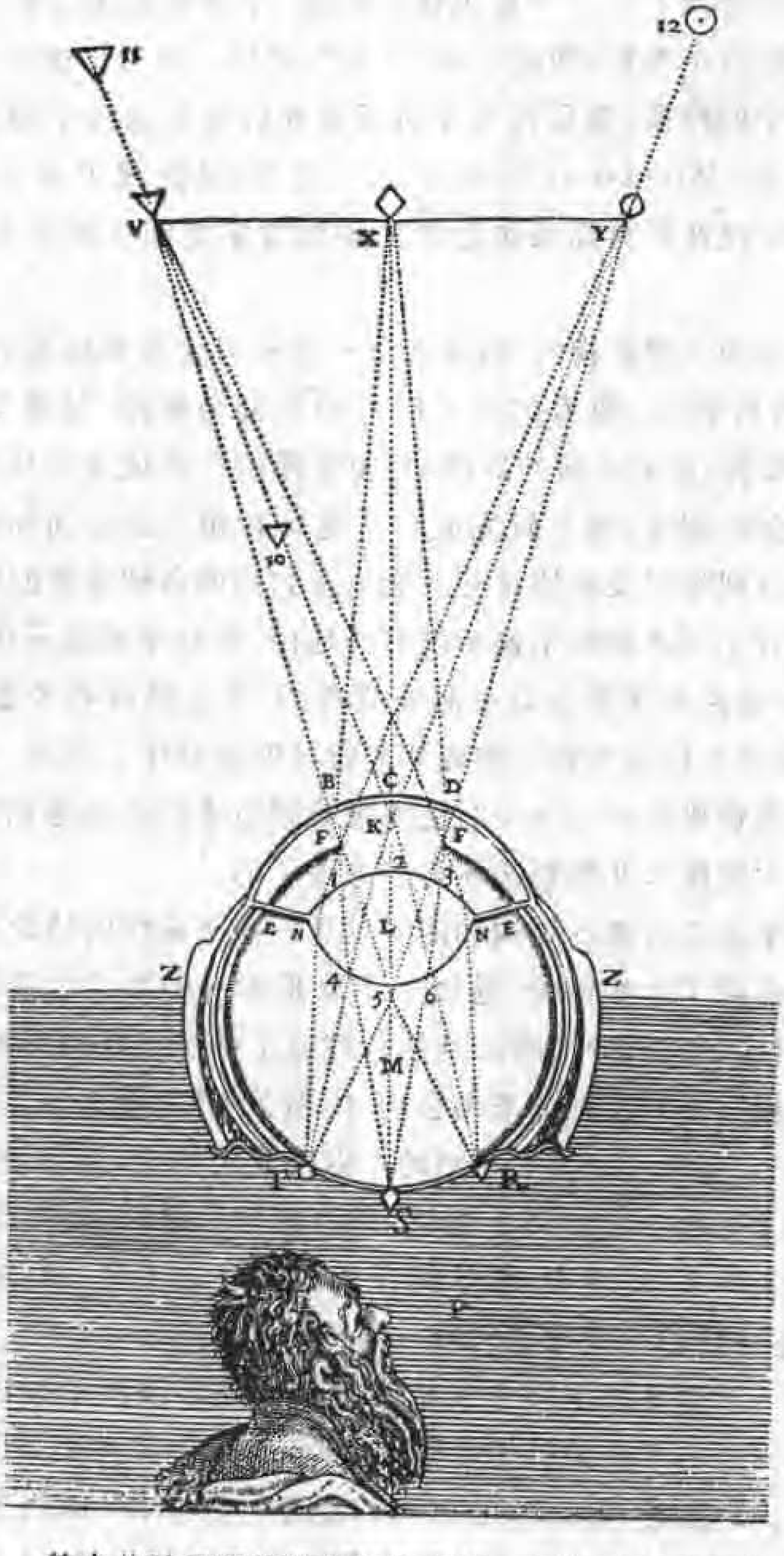
笛卡儿的哲学和科学事业的主要方向和进程，可以从他完成其主要著作的次序看到. 从 1618 年到 1628 年，他在动荡的军旅生活、旅行以及无所事事中度过，而在这一时期得出了关于真正的科学的概念以及达到真正科学的高度理性化的方法. 这一切都陈述于他的第一部著作《指导心智的规则》以及《关于方法的谈话》(简称《方法论》)中，前书于 1628 年写完但身后才出版，后书则完成于他定居于荷兰时. 在后书未完成时，他又着手写《流星》**，《折光》与《几何》三书，作为应用他的方法于特定的研究路线的三个例证，并与《方法论》同时发表于 1637 年，作为其三个附录. 这时，在 1628 年左右，他又转向研究工作的第二阶段，即力求发现第一原则. 这一些他在出版于 1641 年的《关于第一哲学的沉思》中提出. 他从第一原则又很快地转向制作他的宇宙论，于 1633 年完成《论世界》一书，此书因获知伽里略被定罪而推迟出版. 其修订版以《哲学原理》书名出版于 1644 年，其中用一切运动都是相对运动的思想冲淡了哥白尼主义. 同时，笛卡儿又提出了他关于心与躯体的关系的概念，在他的最后著作《灵魂的热情》(成书于 1649 年)一书中，他又把心理学纳人了他的系统的范围之中.

《折光》一书可能是笛卡儿的方法的最说明问题的例证了. 他一上来就颇为独特地宣布他打

---

* 译注：丰特内尔(1657—1757)是一位法国作家，著有《牛顿赞》(1728).

** 译注：原文是 meteors，英语是流星、陨石. 法语是 météore. 气象学则是 meteorology 或 météorologie. 因未见到原书，其内容究竟是什么不明，存疑.



笛卡儿关于眼的研究包含取掉一只牛眼的视网膜，代以一张薄纸或蛋壳来研究视网膜上的像．本图引自笛卡儿著《折光》(Dioptics)一书，第一次印刷是 1637 年．

算解决在理性的科学原则基础上造一个望远镜的问题.于是他先由分析光的本性着手:空间充满了挤在一起的细微的物质小颗粒,构成一种"以太";光是一种力学现象,是由一个发光体发出的瞬间的压力在"以太"中的传播,然后笛卡儿对反射和折射定律给了漂亮的几何证明.其实早几年荷兰物理学家斯奈尔(Willebrord Snell,1591—1626)就发现了关于折射的正确的折射定律,但没有发表.笛卡儿对现在称为斯奈尔定律的证明肯定是独立地得出的;但是,第一个是他发表的.

因为望远镜的目的是为了增强视力,笛卡儿下一步就对正常和病态的人眼状况作了详尽的分析.从他的来往书信告诉我们,他为此作了广泛的研究与解剖.他重复了夏依纳(Christoph Scheiner)* 作过的一个实验:切除牛眼的后部,并用薄薄的白纸或蛋壳代替它,并检验了放在眼睛前方的物体在其上投射的倒像.整个研究显示了他具有相当的解剖知识和实验技巧;笛卡儿描述了虹膜、睫状肌、双目视觉以及视错觉的功能以及它们的各种各样的协调配合.

他现在认为自己具有了开普勒和牛顿所没有的地位,能科学地展示用来造望远镜的棱镜应该怎样弯曲.他断言这些镜片的断面应是双曲线或椭圆.他自然没有考虑到当时人们还不理解的色散.最后他还对于设计来按这些科学原理切割镜片的机器作了描述.

从笛卡儿和一位名为费里哀(Ferrier)的法国眼镜制造者的长篇通信中我们可以看到,这个不幸的人是怎样努力来实现笛卡儿的想法而终于失败了的.

笛卡儿的物理学和宇宙论的基本结构和内容是从一些革命性的结论导出的,笛卡儿于1628年定居荷兰以后很快就得到了这些结论.他以关于思想本身的事实为基础,建立起知识的可能性与正确性.这个基本事实,领会得"清晰而判然",就成了他决定任何另外一件事是否为真的判据.古典哲学中所谓"质料",是只用感觉来领会的,因而关于"清晰而判然".所以,他要从外界的世界中消除一切,只留下广延性——这是事物的可以度量的侧面,所以是其真实的本性.这样把世界划分为彼此排斥而又穷尽一切的两个领域,即思想与广延性,使得笛卡儿能够提出他认为是关于自然的真正的科学的东西.现在,科学的任务就是从这些第一原则导出一切发生着的事情之因,正如同数学也是从它的前提推导出的一样.

这个纲领的广阔性——它实际上宣布了整个物理世界可以归结为运动的定律并因此而可理解——使笛卡儿的工作具有革命的科学重要性.笛卡儿用形状大小不同的粒子的运动来解释化学性质与组成,味觉与嗅觉,热,磁,光,心脏与神经系统的运作(他认为这是躯体的力学作用的源泉),还解释许多他有时作了一些颇为天真的实验来研究的现象.这个纲领的失败就在于其

* 译注:夏依纳是耶稣会教士、最早观察到太阳黑子现象.

过分广泛;笛卡儿根本没有时间来准确地,定量地进入这些问题.笛卡儿的一般物理学和宇宙论,虽然出自一个数学化纲领的作者之手,却令人吃惊地几乎完全是定性的.在远离"我的渺小的知识范围"之外,他不得不依据思辩,结果是连他自己也害怕.他所得到的,用他自己的话来说,只不过是美丽的"自然的浪漫曲".

他的最具灾难性的失败恰好发生在他的纲领的核心,即运动定律本身.他早已用纯粹理性分析过程得出他的结论,即物质的基本性质是它的空间的广延性.因为他的方法先验地排除了其他的可能性,这就使得对此问题不能再由经验作检验.他从这个自以为是坚实的基础出发,进而构筑了一个力学系统,但抛弃了重要的事实,特别是那些后来包括在牛顿式的"质量"概念里的东西.他的力学里确实包含了一些有价值的结论:例如他关于运动守恒的陈述以及宣告了一个与惯性原理等价的原理.但是几何上全同但质量不同的物体在碰撞时或以其他方式相互作用时,性态是不一样的.笛卡儿关于这个问题的处理是大错特错了,因为他的前提是只就广延性来分析物质,这本身就是错误的.

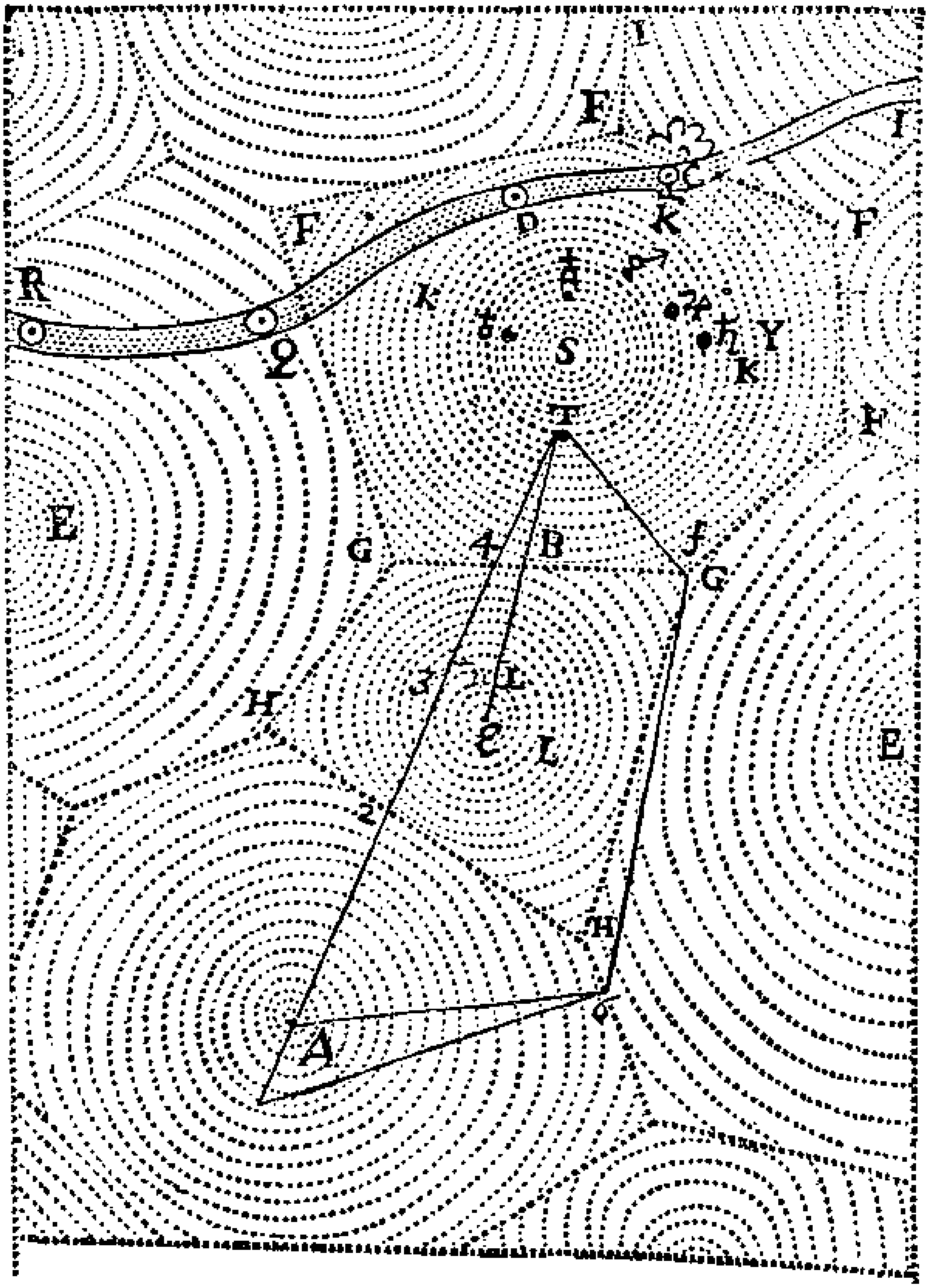
为了解释行星何以运行在其轨道上,笛卡儿提出了著名的漩涡理论.按照这个理论,精微的物质"以太"在星体和太阳附近形成巨大的漩涡.行星被卷进太阳的漩涡,就好像小孩子做的小船落在天体的浴盆里一样,而月亮也同样地被带着绕着地球转.令人吃惊的事是笛卡儿完全没有打算检验一下,他的物理系统的学说的极其重要的这一部分是否与开普勒的行星运动定律一致.是牛顿完全摧毁了笛卡儿的著名的漩涡理论.事实上,他把自己的著作命名为"Principia Mathematica"(《数学原理》,按牛顿著作的全名是《自然哲学之数学原理》),也许是作为论战之作来反对笛卡儿的 Principia Philosophiae.牛顿把漩涡理论当作流体力学中的一个严肃的问题来处理,从而完全摧毁了它.

笛卡儿后来只得到一个思辩者的名声,这很大程度上是由于后来的力学史家是在论战的牛顿派的影响下写作的.但是如果我们从笛卡儿的力学转到他的生理学,我们就会看到他在这样一个领域中工作,而在这个领域中他所依据的定性假说在处理别的领域时,可以给出与他的身份比较相称的结果.

笛卡儿完全有资格与哈维(William Harvey)* 齐名作为现代生理学的奠基人.哈维是实验分析的大师,但笛卡儿引进了基本的假设,后来的生理学都是基于这个假设的.笛卡儿既把世界分为两个部分,即广延性与思想,就可以把生物学仅看作力学的一个分支而已.用现代的语言来

---

* 译注:哈维,1578—1657,英国医生和解剖学家.他发现了血液的循环,而公认由此把生理学确立为一种科学.

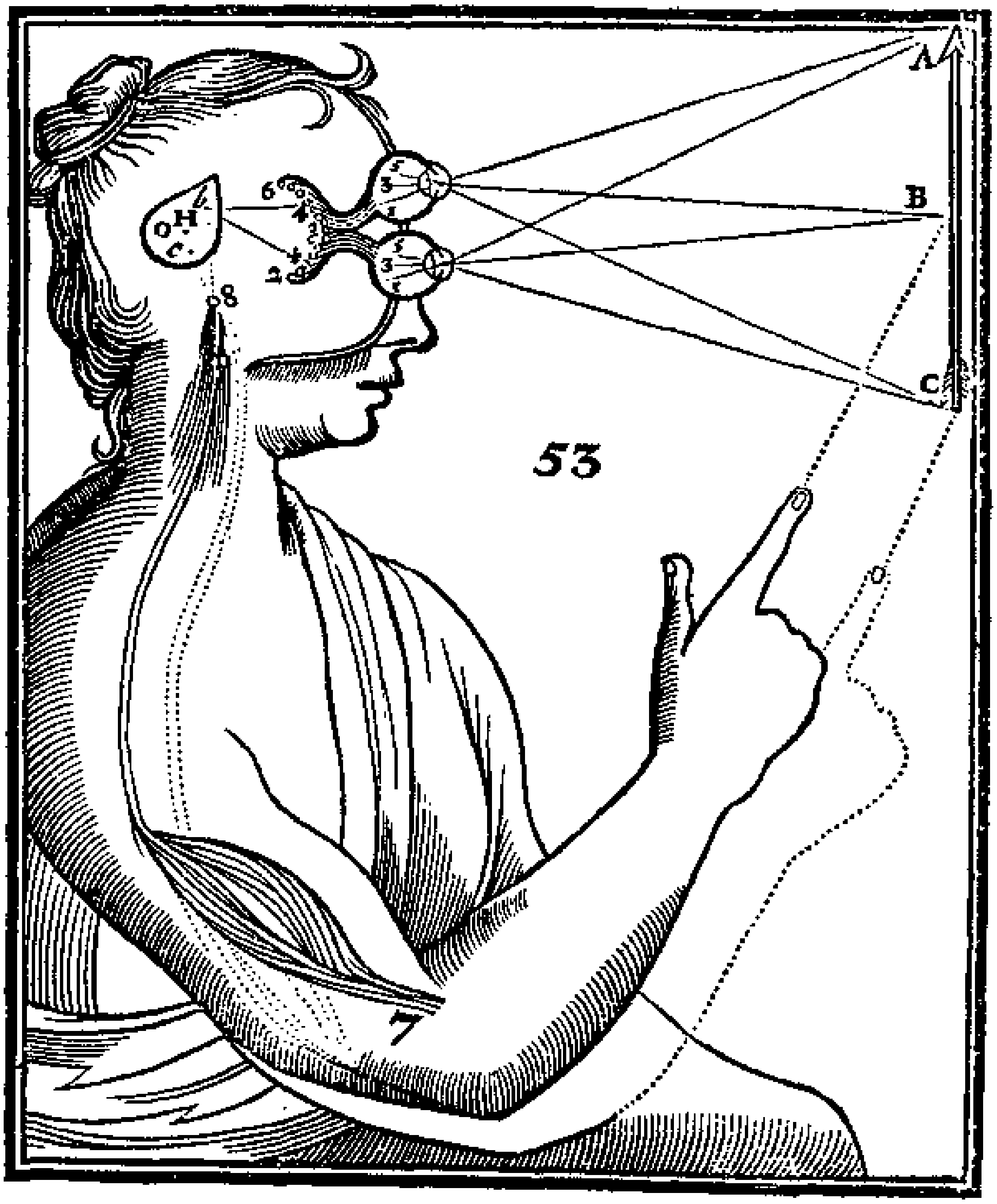


漩涡系统就是"以太"的漩涡，笛卡儿想以此来说明天体的运动.在太阳系中，漩涡带着行星绕太阳(S)旋转.图的上方的不规则的路径是一个彗星，笛卡儿相信，它的运动不能归结为一个同样的规律.

说，这个观点断定了，活体归根结蒂可以用它的组成部分的物理与化学来解释.对于人，按照笛卡儿的说法，思想的领域恰在一个点处与具有广延性的躯体相遇：这个点就是脑后的松果腺.

笛卡儿的通信表明，他在长期居住于荷兰时，花了很多时间去做解剖.他发现，在他打算用

力学原则去加以解释的诸多领域之中，生物学是困难最多的一个. 正是在这个领域中，他发现了实验是最重要的. 在获得信息上是如此，在有多种不同的可能解释而需从中选择时也是如此. 他虽然接受了哈维关于血液循环的发现，但是在心脏作用的机制上却与哈维有了争论而笛卡儿并不太成功. 二人都提出了一个关键的实验来支持自己的解释. 事实上笛卡儿是错了，但是他确定了一个基本观点，即对心脏作用的完全的解释不能简单地从心脏跳动这个事实开始，而要力求



松果腺在笛卡儿的生理学中起中心作用. 此图来自《人》一书. 影像落到视网膜(5,3,1)上，并被送到脑室(6,4,2)；在松果腺上(*H*)形成一个单个的双目影像，灵魂就在这里控制躯体. 灵魂受到影像的刺激后就会倾向于松果腺而启动神经(8)的"水力学系统"，使得一块股肉(7)运动.

用其后面的机制——最终是用对一切物质都相同的运动规律去解释它.

虽然笛卡儿对这一至今仍不清楚的现象的机械论解释,今天看来当然是太简单了,但是他研究的方法以及把躯体看作一个整体在工作,这却为所有现代的生理学研究提供了一个最有力的工具.这工具就是假设性的模型.笛卡儿的生理学著作中包含了一些很好的观察和对某些现象如眨眼和完成如行走这样复杂的动作时肌肉的协调作了精彩的力学解释,看作是自动的动作.他宁可牺牲真实的解剖学而取他的机械论所需要的假设的解剖学.但是他总是说,他是在描述一个假设的躯体以模拟真实的躯体,正如现代的研究者会造一个电子机器来模拟脑过程一样.

笛卡儿想要建造一个关于自然的真正的科学,在其中,每件事物都可从自明的第一原则用数学推导出来.当然,现代的物理学家都拒绝了物理原理的真实性可以自明地为真这一观点.甚至在17世纪,帕斯卡和惠更斯就作出了同样的批评.他们指出,物理学与抽象的数学有一本质的区别,即物理学的原理研究的是事实的具体世界中的未知物,所以这些原理会因为新事实的发现而全部或部分失效.

笛卡儿从他的中心的原理向外前进,自己也领悟到了帕斯卡和惠更斯的论点,认识到他关于单线条的演绎的数学理想是会失败的,因为要把抽象的一般原理和事实的特定性联结起来是极为困难的.然而,作为一个正面的科学思想家,他与他在我们时代的继承者并没有太大的区别.他所探求的正是几乎一切发生着的事物的原因和意义.

5.

牛　顿

柯恩(I. Bernard Cohen),1955 年 12 月号

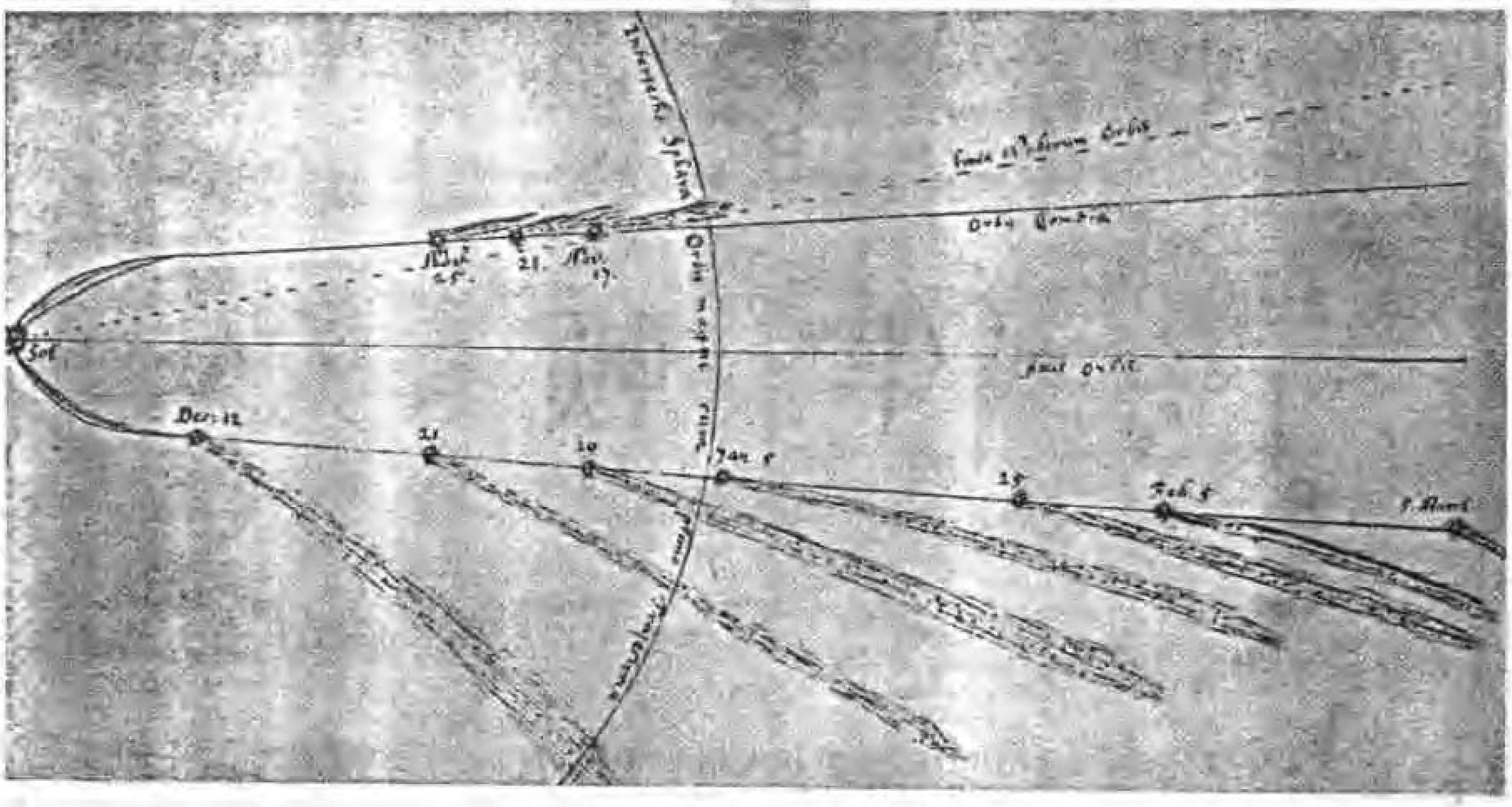
艾萨克·牛顿(Isaac Newton)的思想和人格对于任何历史学家都是挑战. 牛顿是一个奇特的孤独的人物,他的行为来自什么根源,甚至他的同时代人也不知道. 他的时代的一位传记作家把牛顿比作尼罗河,巨大的力量人所共知,而其来源尚未发现. 虽然如此,我们所仅知的关于他的早年生活的少数事实,也能让我们对牛顿的性格与发展作一些思索了.

他生来就是一个早熟的身体孱弱的孩子. 据说他初生才几个月时就要用一个"长枕垫"来支持他的颈子,谁也不认为他能活得下来. 牛顿后来常说,他的母亲说过,他出生时个头太小,甚至可以放进一个大口杯里.

牛顿出生三个月前父亲就去世了. 孩子不到两岁时,母亲再婚,把他托付给年老的祖母照管. 他生活在一个孤独的农庄里,既无双亲关爱,又无兄弟姐妹友好作伴或者作对. 他的最有名的现代传记的作者,已故的摩尔(Louis T. More)坚持认为,牛顿的"内向"大部分可以归之于他的孤独寡欢的童年.

牛顿生于 1642 年,生长在英国仍然经受"长期痛苦的内战的恐怖"的年代. 各党派的袭击和掠夺是常事. 他的祖母曾被"怀疑为同情皇室军队". 面对着这些实在的恐怖和"他的想像所带来的恐惧",他得不到祖母和农庄雇工们的安慰. 很自然地,如同摩尔所说,这孩子变得向"孤独的沉思寻求慰藉",形成强烈的独自沉思的习惯. 一位在牛顿青年时代就认识他的女孩这样描写他:"一个自制的,沉静的,爱思索的孩于","几乎从不与外面的男孩子一起参加那些愚蠢的娱乐".

牛顿到入学的年龄时显然已经克服了体力上的孱弱,他的一位同学说他向一个欺侮他,在



哈雷彗星 1682 年出现时的轨道图，载于《原理》一书第一版. 牛顿指出，彗星和行星一样，服从平方反比引力定律. 这幅手工绘制的图出自不知名的绘图员.

他肚子上踢了一脚的孩子挑战，"打得那个孩子再也不敢打了"——他之取胜更多地是由于他的"勇气和决心". 欺侮人的孩子是班上的大个子，而牛顿下决心"在学业上也打倒他". "牛顿依靠勤奋攻读终于成功，后来逐步成了全校第一名".

牛顿 14 岁时回到母亲的家. 她的第二个丈夫已经去世了. 母亲打算让他成为一个农民，但这个尝试彻底失败了. 牛顿完全厌恶农事. 牛顿不肯照看农事，他要读书，用刀子做木头模型，再就是梦想. 他的母亲终于放弃了这个打算，让他准备进入剑桥大学，这对于科学真是幸事.

牛顿于 18 岁进入剑桥大学三一学院. 在大学早年，他哪一方面也不出色. 后来他受到数学教授巴罗(Isaac Barrow)的影响. 巴罗是一个非凡的人，能干的数学家，经典学家，又是天文学家和光学领域中的权威. 巴罗是第一个认识到牛顿的天才的人. 巴罗当他的学生得到学位后，立即辞退教授职务，使牛顿能获得这个职务. 这样，牛顿在 26 岁时已经在一个出色的学术职位上确定下来，可以自由进行他的划时代的研究了.

他已经在三个不同的科学探索领域中播下了他的革命性贡献的种子：数学，天体力学和物理光学. 剑桥大学毕业后，他回到自己在沃尔索普(Woolsthorpe)的家中工作了 18 个月，这可以说是在创造性的想像力的整个历史上最富成果的 18 个月. 牛顿以后的科学生活在很大程度上就是把这

牛顿的沉静的面容. 华兹渥斯(William Wordsworth)* 在这后面看到一个"在陌生的思想海洋上航行的心". 本图是根据奈勒尔(Godfrey Kneller)的画像作的版画.

* 译注:英国著名诗人,生卒年月为 1770—1850. 于 1843—1850 他是英国的"桂冠诗人". 这个称号是英国国王颁授的. 获此称号者可在国家大典时写诗庆祝.

个"黄金"岁月里的伟大发现详加推衍.牛顿在沃尔索普的工作,最好是用他自己的话来说:

"1665年初我找到了近似级数方法以及把二项式的任意幂化为这种级数的方法[即二项定理],同年5月,我发现了格里戈里(Gregory)和斯鲁修斯(Slusius)的切线法,在11月[发现了]正流数法[即基本的微分学],下年1月得到了色彩理论,接着在五月进入了反流数法[即积分学],同年我开始考虑把引力推广到月球的轨道……并把保持月亮在其轨道上的力和地球表面上的引力作比较,从而发现它们的回应很为接近……"

作为对光和色的分析(这一点他一直很胆怯地未加公开)的副产品,牛顿发明了一个反射望远镜以免除折射棱镜的色差.他为伦敦皇家学会做了一个小的这种新型望远镜,很快在他30岁时当选为皇家学会会员,这是英国最高的科学荣誉.

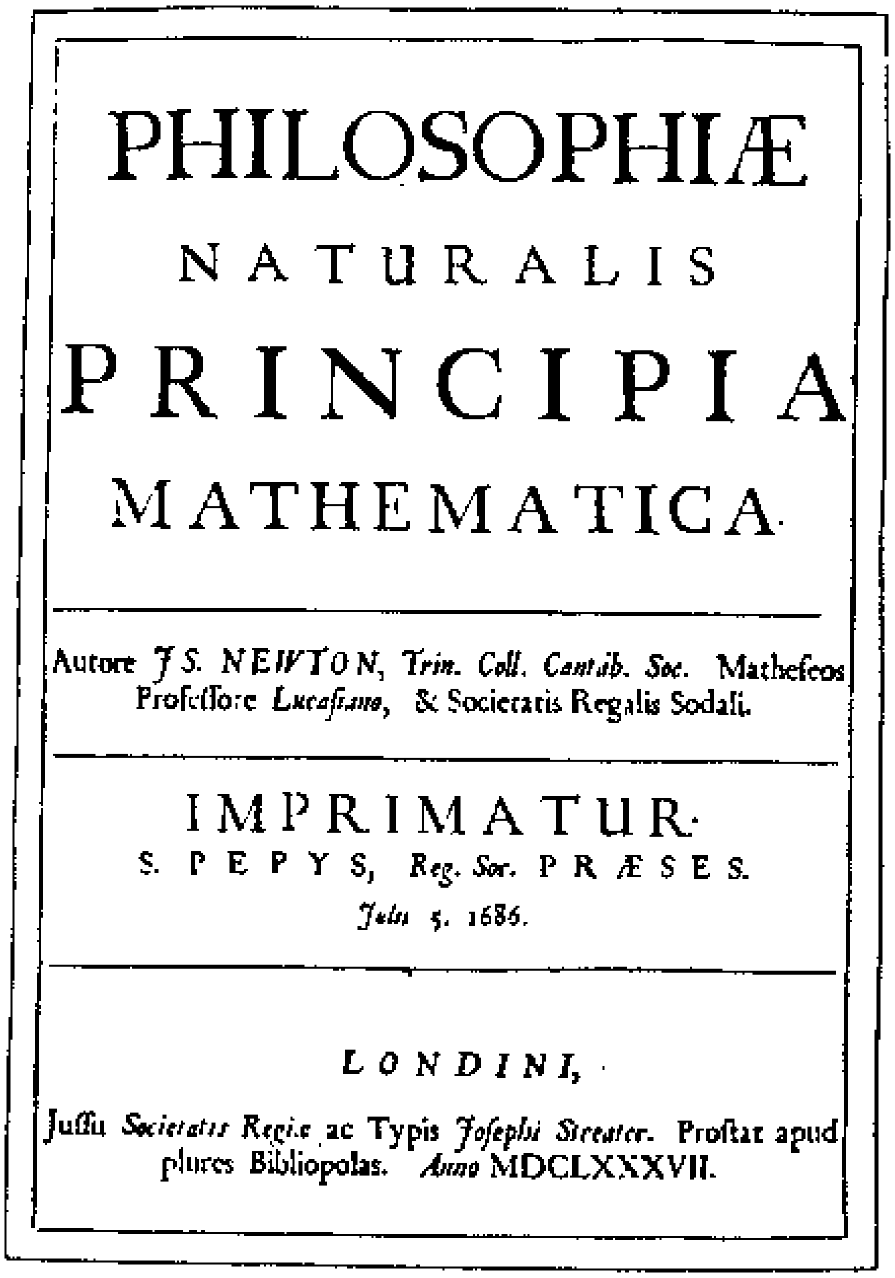
牛顿可以理解地为突如其来的公众的赞誉所淹没.他过去不太愿意宣布自己的发现,可是在选入皇家学会一周之内,他要求允许作一讲演,讲那些引导他去"制造如上所述的望远镜"的哲学发现.他毫不伪装谦虚,他说按他的判断,他已作出了"在大自然的运行中所曾作过的最奇特的,甚至是最值得考虑的探测."

牛顿在写给皇家学会的一封"包含了他关于光和彩色的新理论"的信,于1672年2月6日送到了伦敦.这篇论文可以宣布好几个"第一".它是牛顿第一篇发表的论文,它建立了光谱学这门科学;它标志了对色彩现象作可靠的分析的开始.简言之,牛顿说明了,白光可以用棱镜分解为组成它的各种彩色成分,它们各有不同的折射率,再用第二个棱镜又可以把经过色散的光重新组合成白光.这些伟大的实验是提出关于彩色的本质的理论的新出发点.但是这篇论文并没有为他赢得他想得到的普遍喝彩.皇家学会收到来自各方的驳斥牛顿的结论的信.有些反对者无足轻重,但另外一些可是大人物:惠更斯(Christian Huygens)和胡克(Robert Hooke).牛顿以惊人的忍耐写信仔细回答每个反对意见.但是他只争取到一个反对者,即法国耶稣会教父巴第(Pardies).

这场争论对牛顿的性格所产生的效果是苦涩的.他发誓再不宣布自己以后的发现.正如他后来给莱布尼兹(Leibniz)*的信中说的:"发表我的关于光的理论引起的讨论使我深受折磨,我要责备自己轻率地离开自己的平静而追逐光影,这种平静才是真实的祝福."但他还是不断发表论文,他需要科学世界的颂扬.牛顿的论敌当然不会放过他的这种两面性.与牛顿决裂了的天文学家弗拉姆斯梯德(John Flamsteed)就把牛顿说成是:"暗中为害,野心十足,对赞扬极端贪婪,迫不及待地自相矛盾……我相信他归根结底还是好人,但是疑心贯穿了他的本性."

牛顿在剑桥是心不在焉的教授的典型.他的书记汉弗莱·牛顿(Humphrey Newton,不是亲

* 译注:莱布尼兹的正确拼法是Leibniz.但有的书上用的是Leibnitz,如本文.现在更改为通用拼法.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

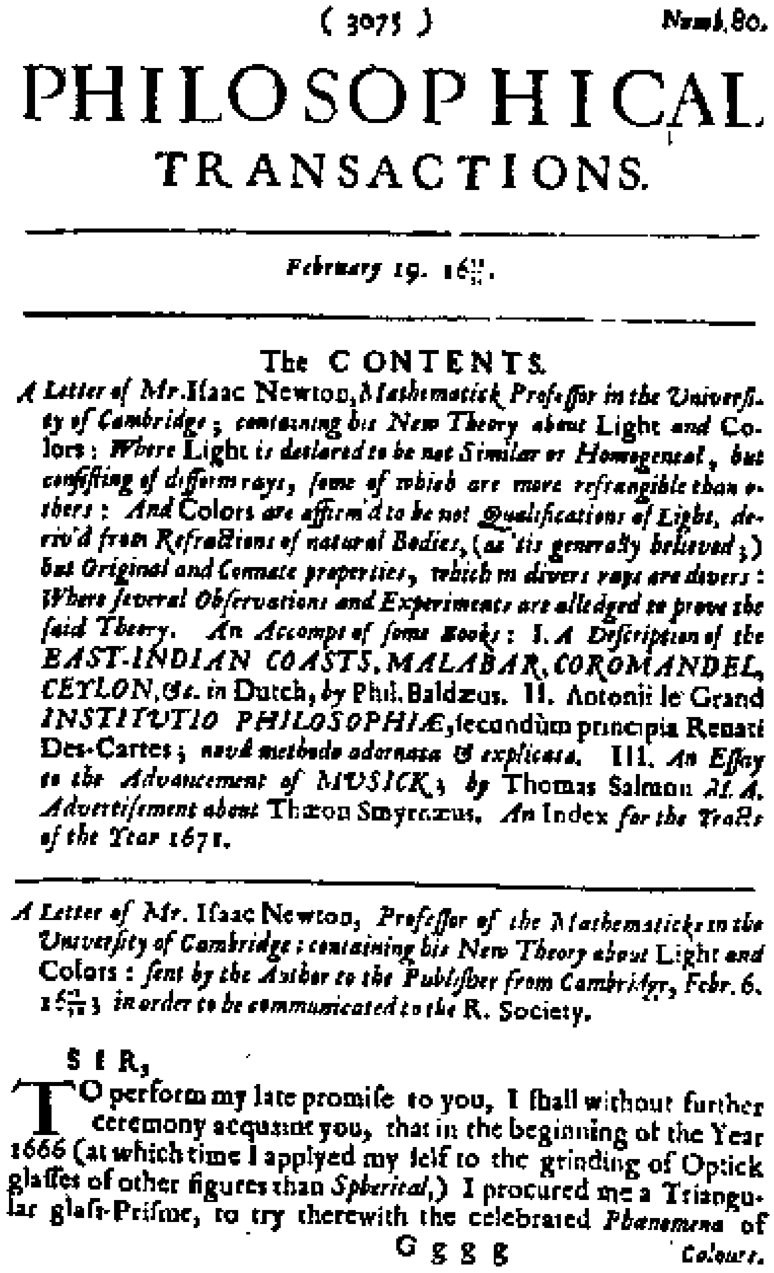
Autore J S. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

《原理》一书扉页，上面说牛顿是剑桥的卢卡斯(Lucas)数学教授．在"出版许可"(imprimatur)下签名的是当时皇家学会主席佩皮斯(Samuel Pepys)．


(3075)　　Numb. 80.

PHILOSOPHICAL
TRANSACTIONS.

February 19. $16\frac{71}{72}$.

The CONTENTS.

A Letter of Mr. Isaac Newton, *Mathematick Professor in the University of Cambridge; containing his New Theory about* Light *and* Colors: *Where* Light *is declared to be not Similar or Homogeneal, but consisting of difform rays, some of which are more refrangible than others: And* Colors *are affirm'd to be not Qualifications of Light, deriv'd from Refractions of natural Bodies, (as 'tis generally believed;) but Original and Connate properties, which in divers rays are divers: Where several Observations and Experiments are alledged to prove the said Theory. An Accompt of some Books:* I. *A Description of the* EAST-INDIAN COASTS, MALABAR, COROMANDEL, CEYLON, &c. in Dutch, *by* Phil. Baldæus. II. Antonii le Grand *INSTITUTIO PHILOSOPHIÆ*, secundùm principia Renati Des-Cartes; *novâ methodo adornata & explicata.* III. *An Essay to the Advancement of MUSICK; by* Thomas Salmon *M. A. Advertisement about* Thæon Smyrnæus. *An* Index *for the Tracts of the Year* 1671.

A Letter of Mr. Isaac Newton, *Professor of the Mathematicks in the University of Cambridge; containing his New Theory about* Light *and* Colors: *sent by the Author to the Publisher from Cambridge, Febr. 6.* $16\frac{71}{72}$; *in order to be communicated to the* R. Society.

SIR,

TO perform my late promise to you, I shall without further ceremony acquaint you, that in the beginning of the Year 1666 (at which time I applyed my self to the grinding of Optick glasses of other figures than *Spherical*,) I procured me a Triangular glass-Prisme, to try therewith the celebrated *Phænomena* of

Gggg　　*Colours.*

牛顿在皇家学会发表的第一篇论文中宣布了他的发现：白光是许多彩色的光的混合物，它可以用棱镜分成这些彩色光，然后再重新组合．

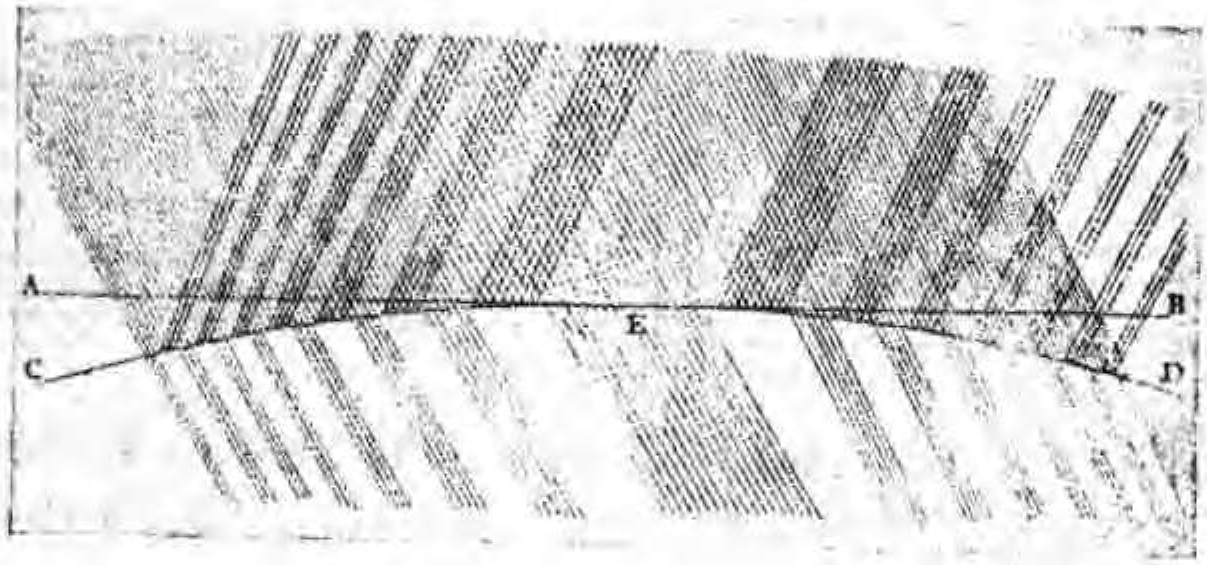
戚)写道：他从没有见到牛顿"娱乐消遣，不骑马出去呼吸空气，不散步，不玩保龄球，什么运动都不参加，觉得不在书房读书的时光都是失去了的．"他时常工作到凌晨二三点，饮食节俭，甚至完全忘记吃饭．如果提醒他还没有吃饭，他就是到餐桌前"站着吃上两口三口"．牛顿极少到学院大厅去进餐；即使去了，他也时常是"拖着鞋子，不系袜子，披着白袍，几乎从不梳头发．"据说他时常对着空着的大厅演说，看来就像是坐满了学生一样满意．

在争论之后，牛顿不再以科学家身份出现在公众中了．他充当大学在国会中的代表，只在私下研究化学，炼金术，神学，物理和数学．他认识了他的伟大的同时代人莱布尼兹，但是关于自己在数学上的发现，他从不告诉对方任何确切的知识．今天公认微积分是牛顿和莱布尼兹二人或多或少互相独立地发现的．但他们和党徒们为了优先权吵得不可开交，牛顿大骂莱布尼兹剽窃．牛顿在他

研究过的每个问题上都妒忌地关注自己的权益，而他一生几乎所有的成就都伴随着争吵.

1684年有天文学家哈雷(Edmund Halley)对牛顿的著名的访问.他带着太阳与行星间的重力吸引力的问题.哈雷和胡克从开普勒(Johannes Kepler)关于行星的论述得出行星与太阳之间的引力必与距离平方成反比.但是他们不能证明.哈雷问牛顿："假设重力随距离平方减少，行星描出的曲线是什么?"牛顿不假思索地答道："是椭圆."“你怎么知道的?”“算出来的.”牛顿答道.这四个字告诉哈雷，牛顿已经得到了宇宙最基本的定律之一——引力定律.哈雷想马上就看看他的计算，但是牛顿一时找不到笔记.他答应把定理和证明都写出来.牛顿在哈雷坚持催促下为皇家学会写了一个稿子.这样就诞生了《自然哲学之数学原理》，简称《原理》.*

就在它将要出版之际，又发生了一场危机：胡克声称平方反比定律是他的.牛顿威胁要把他的著作中最精华的几章抽去，但是哈雷劝止了他，这样这部伟大的经典著作才得原样出版.哈雷在这桩大事中贡献巨大.他不仅促使牛顿写了这部书，还关照它的出版，付了出版费用，尽管他自己也不是一个富人.



牛顿的环在他的《光学》一书中用图解来解释.线 AB 和 CD 表示一对棱镜的平面和凸面，牛顿把这一对棱境贴在一起得出了著名的彩色环的图案.他对结果的解释是：运动的光粒子(斜线)，穿过两个棱镜之间厚度不同的空气，“一阵阵”地交替反射与折射.

《原理》分成三“编”，(books).牛顿在第一编中给出了三大运动定律，探讨了力的各个规律的推论.他在第二编中讨论了在各种类型的液体中的运动；这里他不算太成功，他的工作在以后

* 译注：此书早在1931年本书就有郑太朴的中译本，由商务印书馆出版，并且收入该馆所编的《万有文库》中.1992年又有武汉出版社出版的王克迪的重译本.

的几十年中需要修订. 他在第三编中讨论了万有引力定律,证明了这个定律,既能解释地球上的物体下落,又能解释我们的月亮和木星卫星的运动,行星的运动和潮汐现象.

最使牛顿苦恼的问题之一是怎样严格证明球体的引力作用和设想把所有质量都集中在球心的引力作用是一样的. 没有这个定理,整个理论就只能以直观而不是以精确计算为基础. 例如,苹果落向地面这个简单的情况——在此情况下可以看到按牛顿自己所讲的引力的中心思想——什么是地球到苹果"之间"的距离呢? 这里微积分就起作用了. 牛顿把地球看成许多小块物质的总体,每一小块物质又都按引力的平方反比定律吸引苹果. 然后他把这些引力都加起来,并且证明了,如果把地球设想为一个质点,而地球的全部物质都挤在球心这一小块区域,则其结果与上面算出的完全相同.

在完成了《原理》以后,牛顿就患上了某种"神经崩溃". 他诉说自己不能入睡,思维也缺少了"过去的协调性". 他写信怒骂朋友们,然后又道歉;例如,他尖刻地指责哲学家洛克(John Locke)"想把他卷入女色纠纷".

1696,牛顿放弃了学术生活,而任造币厂的督事(Warden),后任厂长(Master). 然而,科学成就的荣誉仍纷至沓来:1705 年册封为爵士,多年任皇家学会主席. 但是他一生的最后 1/4 对科学并无大贡献. 有人说他的科学天才已经熄灭了. 另外一些人则为他辩护说,他既已创立了物理光学这门科学,发明了微积分,又说明了宇宙的机制,科学领域中再也没有留下值得他做的事了.

牛顿晚年虽无重要发现,他的思想却不贫瘠. 他既已功成名就,就科学问题发表公开的思考也就无所顾忌了. 他对引力的"原因"提出种种可能的假说,还思考诸如"以太"的本性,物质组成单元的大小,电力与磁力,肌肉服从"意念的命令"的原因,感觉的起源,世界的创造以及人类终极的命运这些问题. 牛顿以后的一个世纪中,许多实验物理学家还追随着他的许多大胆的思辩.

牛顿常被说成是"理性时代"的创始者. 英国大诗人波普(Alexander Pope,1688—1744)的著名诗句表达了他的时代的感情:

"自然和自然律隐没在黑暗中,

神说"要有牛顿",万物俱成光明."*

但已故的凯因斯勋爵(J. M. Keynes,大经济学家)提醒人们还要看到牛顿的另一面:他对自然之谜的答案的渴求,对炼金术,超自然哲学和宗教研究的强烈兴趣,和他的非正统的神学观念. 任何人只要读过牛顿的非科学著作,甚至只要读过他晚年发表的《光学》一书中那些思辩,对波普

* 译注:这两行译文转引自罗素《西方哲学史》下册,58 页,商务印书馆,汉译世界学术名著丛书,1982 年,马元德译.

的著名的联句就难以释然于怀了. 他可能会更赞成另一个诗人华滋渥斯的总结了,他这样来描述牛顿:

"……带着他的棱镜,一个沉静的面容,
……一颗孤独的心,
在陌生的思想海洋中,永远航行."

6.

拉普拉斯

纽曼(James R. Newman),1954 年 6 月号

科学史家把拉普拉斯侯爵称为法国的牛顿是正确的.他因为在天体力学上巨大的工作而赢得这个名声.这个工作是三代数学天文学家劳动的高峰,而且产生出了一个被应用到物理学的几乎一切领域的普遍的原理.传记作家们也觉得拉普拉斯作为一个人比之作为一个科学家差不多同样有趣,虽然不是给人那么深刻的印象.他是多种品质奇怪地混合在一起的人:雄心勃勃但又不咄咄逼人,聪明但又不能免于无耻地盗窃别人的思想,反复无常,所以在他生活的疾风暴雨的年代——法国大革命的年代里,时而是共和派时而又成了保皇派。

皮埃尔·西蒙·德·拉普拉斯(Pierre Simon de Laplace)1749 年 3 月 23 日生于波蒙-昂-奥日(Beaumont-en-Auge),这是一个诺曼底的小村庄,可以看见英伦海峡了.他的生平事迹,特别是关于其早年,既稀少又有争议.为了作出准确叙述所需的原始文件绝大部分毁于 1925 年一场大火,这场大火烧毁了他的第四代孙柯贝尔-拉普拉斯伯爵(Comte de Colbert-Laplace)的城堡;另一些则在二次大战轰炸卡昂城(Caen)时散失.关于拉普拉斯的生平多有讹传:说他的父亲是贫苦农民,说他之能受到教育是由于富裕邻居的善心资助,说他成名以后总想掩盖自己"卑微的出身".数学家惠塔克爵士(Sir Edmund Whittaker)近来的研究似乎可以说明,不论拉普拉斯为什么对自己的童年缄默不语,总不是因为双亲贫困.其实,他的父亲拥有一块小小产业,是教区市政官;他的家庭属于那种"过得不错的土地资产者"了.拉普拉斯有一个叔叔是外科医生,另一位是神父.后者是波蒙的本尼迪克特教派修道院一位授道者,拉普拉斯在这里启蒙,据说是这位叔叔唤起了这孩子对数学的兴趣.有一段时间人们觉得拉普拉斯会继续叔叔的职业做神父,但他 16 岁时进入卡昂大学,表明了自己倾向数学.他写了一篇关于有限差分计算的论文,发表在大

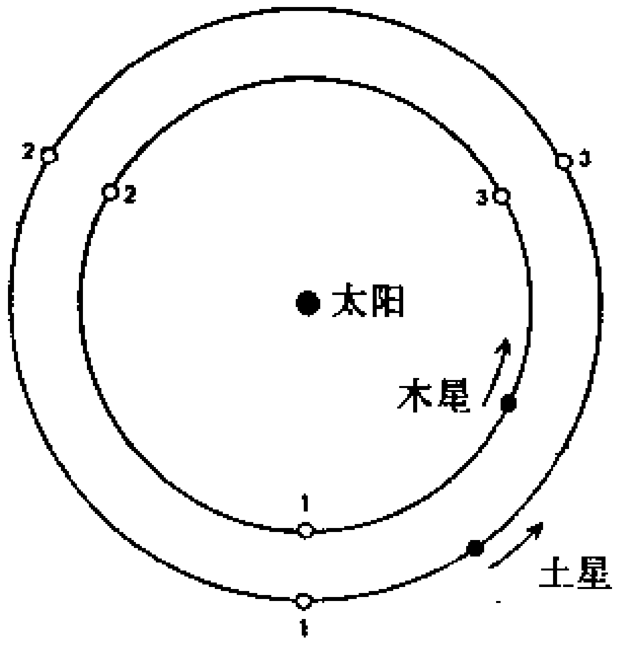
皮埃尔·西蒙·德·拉普拉斯生于 1749 年，卒于 1827 年.这幅 19 世纪的版画，画的是他在读自己著的《天体力学》一书，此书把三代数学家关于引力的研究系统化了.

数学家拉格朗日(Joseph Louis Lagrange)编的杂志上,拉格朗日长他13岁,后来二人有了合作.

拉普拉斯18岁时前往巴黎,带了热情的推荐信去见当时法国最著名的数学家达朗贝尔(Jean le Rond d'Alembert),达朗贝尔没有理会这些推荐信;可是拉普拉斯也不是好相与的,写信给他讨论力学的一般原理,使达朗贝尔得到极深的印象,于是立即请来了这位早慧的青年,并且说:"先生,您已经看到,我没有注意那些推荐信;您不需要它们.您已经表现了自己的价值;这对我已经足够了;我的支持是您所理当得到的."不久后达朗贝尔为他力争得到巴黎军事学院的教授职务.

拉普拉斯如明星般迅速升起.他向科学院投送了一篇又一篇的论文,就行星理论最重大的问题发挥自己令人生畏的数学才能.科学院的那些通常不会激动的博学者的一位发言人说:"我们从未见过一个人如此年轻而能在这样短时间里就范围如此广泛的困难问题发表这么多论文."

拉普拉斯放手攻打的主要问题之一是行星的摄动.行星运动有不正常处,这早已为人所知.例如英国天文学家哈雷(Edmund Halley)就注意的,木星和土星在轨道上处于一种奇异的赛马中,好几个世纪以来,时而落后,时而又加速越过了自己应该在的位置.应用牛顿的引力理论于行星及其卫星的行为会带来可怕的困难.著名的三体问题(三个物体按平方反比律互相吸引时性态如何的问题)至今没有完全解决.拉普拉斯研究的是所有行星彼此互相拉扯还拉着太阳这个复杂得多的问题.



行星的摄动由拉普拉斯和拉格朗日给出了数学的描述.当木星和土星相联(即与太阳在同一直线上)时.一个行星就会超前,另一个就会落后.图上的数字表示,在木星每五次循环中,它与土星有三次相联.

牛顿曾经担心行星的杂处有朝一日会把太阳系搞得一塌糊涂,需要上帝来重整秩序.拉普拉斯决心去寻求安全.他在一篇被称为"曾提交给一个科学团体的最值得注意的论文"中证明了行星的摄动不会积累而会有周期.然后他就着手确立关于这些振动以及行星轨道的倾角的一般的规律.这个工作实与整个太阳系的命运有关.如果能证明,整个行星机器的扰动会逐步被克服而恢复原状——即行星机器有一种自我治疗,自我保持的过程,与坎农(Walter Cannon)称为homeostasis* 的生理学原则相似——则整个宇宙机器的未来,包括其上的偶尔的过

* 译注:此字由两部分组成:homeo是一个希腊文字头,意为"相似,相同".stasis是希腊文字尾,意为"停止".

客，人，的命运，都还合理地是平安的. 然而，如果扰动会积累，每一次振动只是为下一次更狂野的后继者开路，不可避免的结局就是一场灾难. 拉普拉斯作出了一个理论解答，它似乎与观察相符而结局是令人高兴的，即太阳系的变化只是按“规则的时间段重复，不会超过某个适度的量”. 周期本身自然是极长极长，振动则是“永恒这个巨大的摆，它按一个世代摆动，而我们的摆按秒摆动”.

拉普拉斯的定理就这样对于宇宙的星座发条的可靠性给出了保证；它的特有的震颤和其他的不规则之处都是次要的，可以自己改正的小毛病，无论如何也不会危及这个机器整体的旋转. 其实拉普拉斯把这些不正常的东西当作对天文学家的恩惠. 他在《天体力学》(*Mécanique céleste*，以下简称《力学》)一书中写道：“两个行星的不正规处以前被认为是万有引力定律所不能解释的；现在却成了这个定律的激动人心的证明. 这就是这个光辉的发现(指万有引力定律)的命运，产生的每一个困难都成了它的胜利的新课题——这种情况是大自然的真实的系统最为确定不移的特征.”

对拉普拉斯的工作应作两点保留. 拉普拉斯的解答并没有完全证明太阳系的稳定性. 他的解答只适用于不受潮汐摩擦及其他力干扰的理想的太阳系；但是现在知道了，而在拉普拉斯时代则还不知道，地球是一个非刚体，它因潮汐摩擦而变形，所以潮汐是它的运动的一种刹车. 其效应是微小的，但是总是单向地积累起来. 所以我们不能如拉普拉斯那样断言：大自然为天体机器的运行安排了“无限长永恒的持续性，它依据的原理是和如此令人惊羡地遍及整个地球的原理是一样的：个体保持不变，物种绵延不绝.”

第二点是拉普拉斯没有提到他之有负于拉格朗日. 拉普拉斯在物理天文学中几乎每一个成就都对拉格朗日的深刻的数学发现欠了一笔债. 在许多场合，无法把他们的贡献分开. 拉格朗日是更伟大的数学家；拉普拉斯主要是数学物理学家和天文学家，数学只是达到目的的手段. 别人严厉地指责拉普拉斯没有承认合作者的贡献，但拉格朗日没有. 他显然有崇高的灵魂；两人一直亲密地合作.

拉普拉斯的《天体力学》从 1799 年起到 1825 年发表完，共五大卷. 他这样描述其范围：

“我们在这部著作的第一部分给出物体的平衡和运动的一般原理. 应用这些原理于天体的运动，引导我们用几何推理而不需任何假设达到万有引力定律，重力的作用和抛射体的运动则是这个定律的特例. 我们考虑了服从大自然这个伟大定理的物体系统；而用独特的分析得到关于它们的运动，它们的图形和覆盖其上的流体之振动的一般表达式. 从这些表达式推导出关于流动和潮汐的所有已知的现象；地球表面上度和重力的变化；春秋分点的进动；月球的天平动(libration)；土星环的形状和运动. 我们也指出了为什么这些环永远位于土星的赤道平面上. 此

外，我们从同样这个理论中还导出了行星运动的主要方程；特别是木星和土星的，它们的伟大的不等式之周期大于 900 年.”

拿破仑在得到一本《力学》以后，向拉普拉斯提出了质疑，何以如此卷帙浩繁居然不提上帝. 作者回答说他不需要这个假设. 拿破仑感到十分有趣，就把这个回答向拉格朗日转述了. 据说拉格朗日惊呼："啊，但这是一个美丽的假设；它能解释许多事情."

这部著作对数学家特别值得纪念. 爱尔兰数学家哈密尔顿（William Rowan Hamilton）之所以开始数学生涯，据说是始于发现《力学》一书中一个错误. 英国数学家格林（George Green）由之导出了一个关于电的数学理论. 这部著作中最了不起的单个方程大概就是著名的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

拉普拉斯的式子是一个场方程，就是说它能描述场中在任一地点任一时间发生的事，这场可以由有重力的物质，或电荷或液体流动等等产生. 换个说法，这个方程处理连续介质的一个称为位势的物理量之值. 位势函数最先是作为一个纯粹的数学量引入的，后来才得到了物理意义. 位势函数在场中两个不同点处的值之差，度量了把单位物质由这一点移到另一点所需的功；位势在任一方向的变率就是这个方向上的力.

如果给 u 以不同的物理意义（例如令 u 代表温度，速度势等等），就发现这方程有极广泛的应用，例如在静电理论中，在重力，流体动力学，磁学，声学，光学，传热学等等的理论中. 在流体动力学中，u 是速度势（距离平方除以时间），其变率是流体速度的度量. 方程可以用于不可压缩也不可消灭的流体中；如果在这种流体中取任意一小块体积，而流出的流体和流入的流体一样多，速度势就满足拉普拉斯方程. 为什么这个方程能成为物理问题的几乎万能的解药，一个粗糙的解释是它描述了自然性状特有的一种经济性——"即有一种趋向均匀化的倾向，使局部的不均匀会平滑掉."这样，一根一端加热的金属杆会变得整个杆子温度一致；液体中的溶质趋向于均匀分布.

《力学》是一本难度之高与卷帙之大相当的书. 拉普拉斯全然不照顾读者. 推理中很长的步骤他常令人愤怒地说是"容易看到"而一语带过. 把此书前四卷译为英文的美国数学家和天文学家鲍迪奇（Nathaniel Bowditch）说他只要一见到这句话"就知道我要花若干几小时才能补上这个空隙". 拉普拉斯本人有一次被要求把他的推理重写出来，也承认他自知如何得到自己的结论决非"容易看到". 此书也决非谦虚的光明磊落的作品. 著名的天文学史家克勒尔克（Agnes Mary Clerke）写道："定理与公式是成批地随手剽窃而来，全不说明出处. 一个本是一个世纪的辛苦劳作的系统整理却被作为一个人的头脑的产物而提供给世人". 传记作者贝尔（Eric Temple Bell）提到，拉普拉斯之作风就是，"凡他能得到而且用得上的任何东西，他都明目张胆肆无忌惮地剽窃".

对那些受不了《力学》一书的令人生畏的抽象性的读者，拉普拉斯于1796年又写了一本《宇宙体系论》，这是从来没有过的一本最令人喜欢，行文流畅的天文学普及著作.拉普拉斯在这本杰作中提出了著名的星云假说(康德(Immanuel Kant)在1755年早于他就提出过).它的要点就是：太阳系是由一团旋转的气体演化而来，气体凝结而成太阳，后来又抛出许多气体环变成行星.当行星还处于气体状态时也会抛出后来变成卫星的气体环.康德以后这个假说时起时落，拉普拉斯又推进了它.在拉普拉斯理论中，太阳系的成员以反方向旋转是不可能的；但在拉普拉斯死前侯舍尔爵士(Sir William Herschel)就发现天王星的卫星就这样不合规矩地转动，后来还发现了其他一些星体也这样.然而这个理论是智慧的里程碑，它的大部分推理仍被一些宇宙学家接受，认为适用于比太阳系更大的天体集团.

拉普拉斯曾经关注过的另一个数学分支是概率论.他既是作为数学家也是作为业余爱好者来关心它的.他的巨著《概率的解析理论》(*Théorie analytique des probabilités*，以下简称《解析理论》)对于怎样赋予有关偶然事件的命题以“合理的可信度”，给出了可用的计算方法.它的框架是排列和组合理论，它们可以说是关于可能性的数学.

概率论，拉普拉斯说，说到底只不过是把常识化为计算.但是他的著作似乎表明，常识的算术甚至比行星的算术还要精细.即如德·摩根(Augustus De Morgan)这样的数学家也曾经把这部书说成是“我们见到过的最最困难的数学著作”，其复杂超过了《力学》.

拉普拉斯对概率论的贡献，可能不论是谁作为个人也不能相比的；然而《解析理论》也像《力学》一样，没有承认与其中许多结果有关的数学家的贡献.德·摩根这样评论了拉普拉斯：“来自他本人的东西的分量足以使读者想到，如果一个人还敢于很好承认有哪一些是他取自别人的，则对于他一再声称另一些还属于他自己的东西，也开了一个危险先例.”

与之相伴的著作《关于概率的哲学论文》对偶然性的规律作了非技术性的介绍.拉普拉斯在这本书里写了一段话，被认为是对宇宙的决定论的解释最完美的表述，这种决定论是那个乐观而又自信的年代的象征，它认为只要对现在作了一瞥，就能描述过去，预卜未来：

“我们应把宇宙的现状作为过去状况的果和未来状况的因.只要在某一瞬间有了一种智慧：既能懂得使大自然有了生气的所有的力，又能知道组成大自然的一切事物的状况——这个智慧又足够博大能分析所有这些材料——它就能在一个公式中囊括宇宙中从最大的天体到最轻的原子的运动；对于这个智慧，世上无不确定事，未来和过去尽在它的目下.人的心智，就它已赋予天文学的完美而言，已足以使我们对这个智慧有一点初步的印象了.人的心智在力学和几何学中的发现，加上对万有引力的发现，已经使它能用同一个解析式子来理解宇宙体系的过去与未来.人的心智把同样的方法用于其知识的其他对象，已经成功地把观察到的现象归之于一般的

定律，并且预见到给出一定的情况就会产生出什么. 所有这些追寻真理的努力，都不断把它引向我们刚才说过的博大的智慧. 但人类心智离开它还无限遥远. 这个趋势是人所独有的，使它高于一切动物；正是人的心智在这方面的进步才使各个民族、各个时代显出差别，这是人类真正的光荣."

拉普拉斯还和伟大的化学家拉瓦锡(Antoine Lavoisier)一起做实验来确定某些物质的比热. 他们设计了一种仪器：冰热量计，用被融化的冰的量来测定热量，这个方法早前苏格兰化学家布莱克(Joseph Blake)和德国人威尔克(Johann Karl Wilke)也用过.

拉普拉斯是既走财运又走官运. 拉瓦锡死在断头台上，拉普拉斯则在 1784 年被任命为"皇家炮兵主考官"，这可是一个赚钱的好位子. 他交了好运，录取了一个大有前程的 16 岁考生，名叫拿破仑. 这种关系 20 年后使拉普拉斯鸿星高照. 拉普拉斯和拉格朗日一齐在高等师范(École Normale)教数学，成了经度局的成员，后来则是主席. 他为引入十进制出过力，又按革命的改革精神建议一个以某种天文计算为基础的新历法.

有理由相信，他在法国大革命的一段短时期中受过怀疑；他从度量衡委员会中被贬. 但他不仅能保全首级，而且还有了新的官运. 他工于心计能成为那个波涛汹涌年代的弄潮儿. 共和时期他是热忱的共和党人，宣布对"皇政有不共戴天之仇". 在雾月 18(1799 年 11 月 9 日 *)，拿破仑篡夺政权，他马上丢掉了共和主义，拥戴这位第一摄政官. 他协助拿破仑组织去埃及的远征军. 拿破仑马上就回报拉普拉斯以内政部长之职. 当天晚上，他就命令给在恐怖时期被处决的著名学者贝依(Jean Bailly)的未亡人以 2,000 法朗年金. 第二天一早拉普拉斯夫人把第一个半年的收入送给这位"时代的热情的受害者". 长期受拉普拉斯庇护的阿拉戈(Francois Arago)写道："这是一个高尚的开始."但是很难再找到提高他的官声的高尚事迹了. 他的任期很短——只有六个星期. 拿破仑后来在他的流放地圣赫伦纳写的文件中这样尖刻地评论拉普拉斯的缺点："他是一个连二等也算不上的行政官员，处处专找鸡毛蒜皮，把无穷小的精神带到政府事务里来了."但是为了安抚罢官对他的伤害，又给下台的部长在上议院安排了一个席位，1803 年还当上了议长.

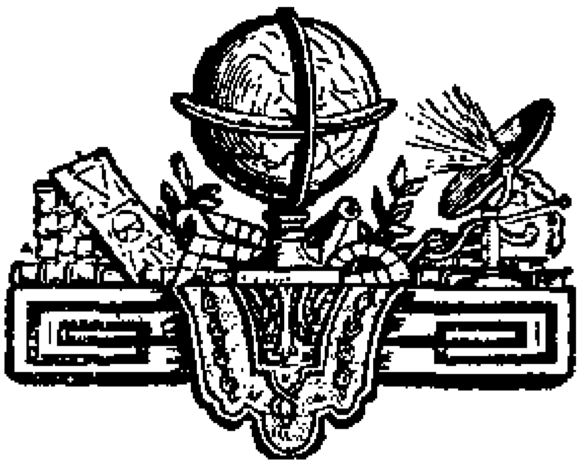
历史学家常以描写拉普拉斯随风转舵的本事为乐. 最清楚不过的是看他在自己著的书的各版中的序言了. 他把《宇宙体系》在 1796 年的第一版题献给五百人会议，1802 年则在《天体力学》第三卷前写上了对解散了这个会议的拿破仑的崇拜赞歌. 拉普拉斯把《概率的解析理论》1812 年那一版题献给"拿破仑大帝"；而在 1814 年那一版中取消了这个题献，而写到"那个妄想统治一

* 译注：这一天拿破仑称帝，号为拿破仑一世.

切的帝国的崩溃，熟悉机遇计算的人是可以很高的概率预测得到的.”拿破仑使拉普拉斯成了一个伯爵，这使他有机会在1814年参予作出罢黜这位封他伯爵的人的诏令. 波旁王朝复辟时，拉普拉斯又第一个跪倒其脚下，由于这个跪拜，他又得到了侯爵封号.

拉普拉斯不是一个坏人，并不心存恶意. 对于许多青年科学家他都曾给以援手. 在他在阿居衣(Arcueil)乡下的家里，他把一大群“他的思想的养子”聚集在自己身旁：其中有天文学家和物理学家阿拉戈；以研究光的偏振而著名的物理学家比奥(Jean Biot)；著名的德国博物学家和旅行家洪堡男爵(Alexander von Humboldt)；伟大的化学家和物理学家盖吕萨克(Joseph Gay-Lussac)；杰出的数学物理学家波阿松(Siméon Poisson). 比奥说过一件事，当他有一次宣读了一篇关于方程式论的论文以后，拉普拉斯把他叫到一边，“要他严守秘密，给了一些因年代久远而发黄的纸，其中是他在很久以前就得到了的这个结果.”拉普拉斯安慰了他的内心，叫他别再提他早年的工作而把自己的结果发表出来.

对拉普拉斯的天才的几乎普遍的仰慕并不能减轻由于他在政治上随风转舵带来的广泛的不信任. 他的同时代人中对他的比较宽容的讥讽说是他“不甚拘泥”. 通常的评价则把他比作布雷(Bray)的牧师. 这个牧师是一个善于迎合的人，两次做天主教徒，又两次做了清教徒，据说当别人攻击他是风派时，他这样为自己辩护：“不是，尽管我在宗教上改换了门庭，我肯定还是坚持了我的原则，那就是我活也好死也好都要当布雷的牧师.”关于拉普拉斯当然也可以这样说.



天文装饰. 引自拉普拉斯《行星的运动和椭圆形状的理论》一书的扉页.

关于他的家庭生活和个人习惯，很奇怪，缺少资料. 拉普拉斯1788年与夏洛特·德·顾尔蒂·德·洛曼日结婚，显然是喜结良缘. 他们有一女一子，儿子爱弥儿后来升为炮兵将军. 拉普拉斯后来大部分时间住在阿居衣，他在那里有一幢房子与化学家贝托莱(Count de Berthollet)为邻. 他的书房里挂着他喜爱的作家拉辛(Racine)的画像，正对着牛顿的画像. 他在书房里以“不减的热忱”继续研究，会见“来自世界各地的显赫宾客”. 他在78岁生日前不几天去世于1827年3月5日. 对于名人总要求他们临终在床上说几句话. 据说拉普拉斯在说了一些合理的意见后才离开人寰，他说“我们所知的渺不足道，我们未知的则茫茫无边”. 德·摩根评论说“这听起来像是对牛顿的小石子的拙劣模仿*”他说，他从很亲密的有权威的人处得知，拉普拉斯最后的话是：“人只是追随幽灵.”

* 译注：这里指牛顿比喻自己是在真理的大海边的小孩子，自己的成就只不过是拾了几个小石子.

7.

哈密尔顿

惠塔克爵士(Sir Edmund Whittaker),1954 年 5 月号

牛顿以后,英语民族最伟大的数学家是威廉·罗恩·哈密尔顿(William Rowan Hamilton),生于 1805 年,卒于 1865 年.他的名声之盛衰有些奇特.在世时,他很有名,但人们并不理解他.身后,他的声望下降,他被看成第二流人物;到 20 世纪,对他的兴趣与赞赏又特别地重新升起.

关于他的家世,可说的不多.他的父亲是都柏林(Dublin,爱尔兰首府)的律师,曾为被放逐的爱尔兰爱国者罗恩(Archibald Hamilton Rowan)辩护并且把判决翻过来了.罗恩为小威廉主持了洗礼,所以后来小威廉就以罗恩为自己的中名.这孩子并不是由自己的双亲带大的.当他大约满周岁时,父母亲决定把孩子交给父亲的兄弟詹姆士教养.詹姆士在都柏林北边 30 英里的一个小城特里姆(Trim)任英国国教牧师,他们偶尔也会来都柏林,一直到他进大学为止.

不知是由于叔父教育得法还是由于孩子的天赋,据说威廉三岁时就能顺利地读英文;五岁就能读能译拉丁文、希腊文和希伯莱文;八岁时还要加上意大利文和法文;不到 10 岁就学阿拉伯文和梵文.14 岁时他用波斯文写信给当时正在访问都柏林的波斯大使.

这孩子喜好古典作品和诗人,但在 15 岁时,他的兴趣以及生活道路完全变了,那年他见到一个美国青年科尔布恩(Zerah Colburn),他正在都柏林表演他的快如闪电的计算能力."后来很长一段时间",哈密尔顿后来写道,"我喜欢心算很长的算术运算;开平方和开立方,以及每一件与数的性质有关的东西."威廉决心终身从事数学.他宣称:"再没有比研究科学更能提高人的心灵,更能把一个人提高到众人之上的了.谁不愿意享有阿基米德的名声,而想去做征服阿基米德的马切卢斯(Marcellus)呢?……在各个时代,伟大的心智都集合在一切,建立宏大美丽的科学

殿堂，并且用不能磨灭的文字把他们的名字镌刻其上；但是大厦尚未完工；再添上一根柱子，一件装饰为时还不算晚. 我们没有来到它的脚下，但是我可以热望有朝一日达到它的顶峰."

在他的日记里，马上就出现了这样的条目如"读牛顿的《生平》"还有"开始读牛顿的《原理》"* 在16岁时，他看到了拉普拉斯的《天体力学》（在他大约当时的日记中有这样一段："有好几天我们——就是叔父和我——五点以前就起床了；他用上一晚穿过墙壁系在我衬衣上的绳子拉醒我."）1823年，他的非凡智力的名声引导"神童哈密尔顿"进入了都柏林的三一学院. 在那里，不论在考试还是在独创的研究上，他的进展光辉. 他递交给爱尔兰皇家科学院题为"光线系的理论"，此文实际上建立了数理光学的新科学，当年他年仅21岁.

哈密尔顿这篇论文的目的是通过建立一种能解决光的几何学之一切问题的统一的方法来重建这门科学. 他从一个已知的原理出发，即光束总是沿这样的路径前进的，或者（按光的波动学说）需时最少，或者（按光的微粒学说）"作用"最小；不论路径是直的，或者因折射而弯曲，它都是对的. 哈密尔顿的贡献在于把作用（或时间）表为光在其间行进的两点之位置的函数，他证明了，当这两个点的坐标变化时，这个函数服从一个定律：他称之为变作用定律. 他证明了对任何光线系统所进行的一切研究，都可归结为研究这一个函数. 哈密尔顿发现了这个他称之为"特征函数"的东西，是科学天才的非凡成就. 他只16岁时就已初步达到了这项发现，而到21岁就给了它以接近完全的形式.

递交了这篇论文后，哈密尔顿的境遇有了很大变化. 三一学院天文学教授的职位在1826年出缺了，这项职位年薪250镑，而身居此职者同时将被授予爱尔兰皇家天文学家的头衔. 那时身居此职的布林克利牧师（Reverend John Brinkley）受任伟大哲学家贝克莱（George Berkeley）担任过的克洛因（Cloyne）大主教. 几个月后，哈密尔顿当选为布林克利的继任者. 选一位尚未毕业的大学生并授以教授教席，是一惊人的事，而且带来一些奇怪的后果. 例如，皇家天文学家按其职位是主教律奖（Bishop Law Prize）的主考人. 这是一项数学方面的殊荣，参予竞争者必有初级学士学位，这样就出现了一个在数学的最高分支中，一位未毕业者考已毕业者的不正常的程序. 虽然每个人都承认哈密尔顿获得这一职位的殊荣，但对于他接受这一职务是否明智之举却有尖锐分歧. 本来，再过一两年，他无疑会当选为三一学院的 Fellow**，经济上和其他前景都更好. 他决定作出这一选择是考虑到，皇家天文学家的职务实际上是一个研究位置，固定的任务极

---

* 译注：即牛顿的主要著作：《自然哲学之数学原理》.

** 译注：Fellow 一词没有适当的中文译名. 用于学术团体时常指会员；用于科学院时有时相当于我国的院士. 用于大学时，有时译为"评议员"、"校务委员"，是指一个管理集体的成员；用于一项学术基金时常指接受资助从事研究者.

少，作为一个 Fellow，就必须成为一个牧师，而且必然很快就做一个导师和讲师. 任务繁重会占据他的绝大部分时间. 肯定地说，天文台的设备极差，但是哈密尔顿和选举他的人想的都不是天文学，而是给他一个安排以便继续他的理论研究. 他关于光线系的论文是一个光辉的开始.

哈密尔顿确有教一门天文学课程的任务. 他的习惯是讲课时讨论天文学与一般物理学的关系，与形而上学和一切有关的思想领域的关系. 他的讲演充满诗意又十分博学，吸引了大批教授和访问者以及他的班上的大学生来听讲；1831 年当有传言说他将转到数学教授的职位时，董事会坚持他留任原职. 为了安他的心，董事会把他的年薪提高为 580 镑，并允许他主要研究数学.

哈密尔顿于 1832 年向爱尔兰皇家科学院宣布了继光线系理论以后一项在光学中的重大发现. 早就知道，在某些双轴晶体如黄玉和冰晶石中会产生两个折射光线，于是有双影出现. 法国的菲涅尔（Augustin Fresnel）已经得出了双折射的规律. 现在哈密尔顿用他的一般方法研究菲涅尔的定律，得出以下的结论：有些情况下，单个人射光会在双轴晶体中产生不止两个而是无限多个折射光线，形成一个锥，在有些情况下单个入射光线又会产生不同的锥. 于是他从理论出发提出两个关于光的新定律，并称之为内外锥折射. 这两个定律很快就由他的朋友，都柏林的物理学家劳埃德（Humphrey Lloyd）用实验证实了.

1834 年哈密尔顿，时年 29，给他的叔父写信说到："我的原意和目的是用我的特征函数的思想，重构整个最广泛意义下的动力学."他进而把这个原理用于物体系统的运动，把运动方程写成这样一种形状，便于表明此动力系统的动量成分与其位置成分的对偶性. 只是到了一个世纪以后，由于量子理论的发展，物理学家和数学家才充分认识到这种对偶性的重要.

哈密尔顿 1835 年得爵士称号，两年后又当选为爱尔兰皇家科学院主席. 但是他的个人生活却不太幸福. 在成了教授后，他和他的三个姐妹在距都柏林五英里处小山上的邓辛克（Dunsink）天文台建了一座房屋. 26 岁那一年，哈密尔顿爱上了贝利小姐（Helen Maria Bayly）. 她是蒂帕拉里郡（Tiperary）一位前教区牧师的女儿. 她先是拒绝了求婚，后来才答应. 婚礼在 1833 年 4 月 9 日举行. 他曾在给朋友的一封信中这样评论她："极为羞怯，又极为纤细"；这种性格在婚后完全得到证实. 哈密尔顿夫人六年中生二子一女，但她觉得自己不胜家政，于是离开邓辛克两年去英格兰和她一位已婚姐姐同住. 1842 年她回到家中，但情况并无好转. 自此，哈密尔顿食无定时，酗酒到危险的程度.

我于 1906 年荣获继任哈密尔顿的教席，那时他已谢世多年. 我遇见了许多认识他的人. 乡下处处流传着他的轶事. 其中之一讲他如何经营邓辛克天文台附近由皇家天文学家管辖的 17 英亩的农场. 哈密尔顿是城市里长大的，对农事一窍不通，但是为了家里有牛奶，他买了一头奶牛. 过了一些时，产量自然而然地减少了. 哈密尔顿求教于附近的一位农民，那农民知道他对付的是谁，就说，那牛独居 17 英亩的农场，是苦于寂寞. 哈密尔顿就问能不能给奶牛找一些伴侣，

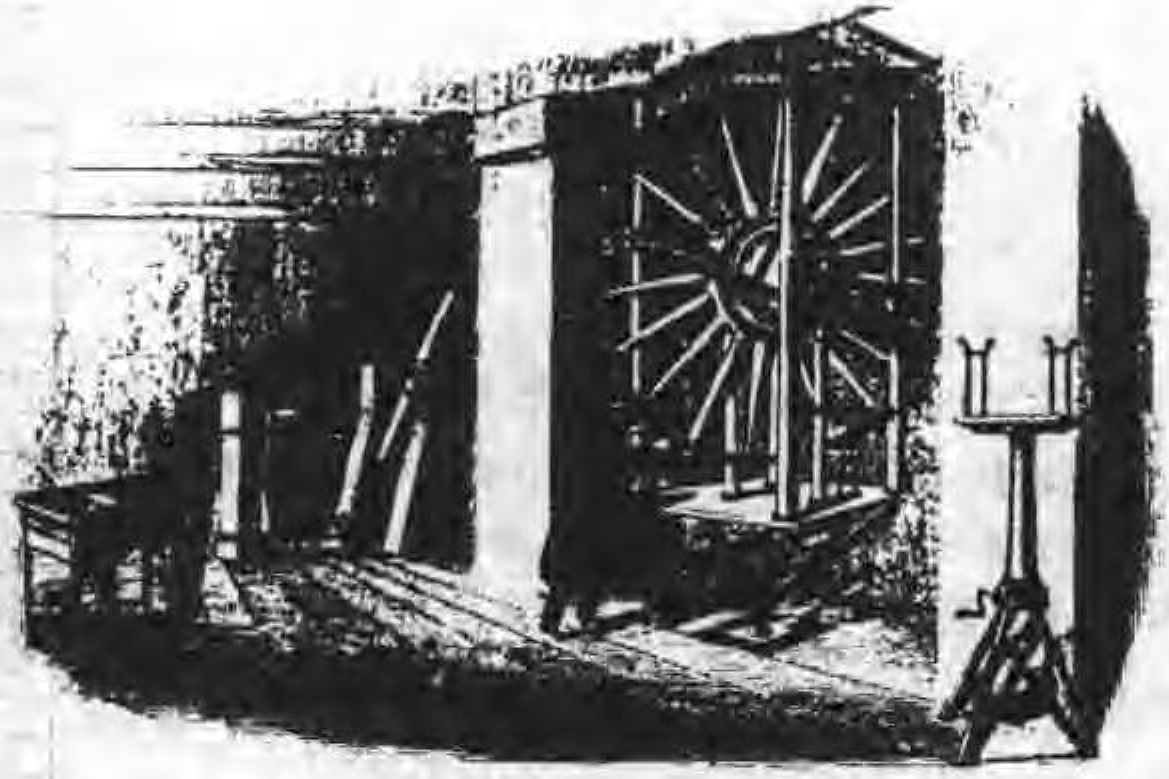
那农民得到哈密尔顿的报酬，慷慨地同意让自己的牲口在邓辛克富饶的草地上放牧.

尽管生活条件很不利，哈密尔顿的科学研究仍在继续. 1843 年他得到一项伟大的发现——四元数的计算.

他得出这一发现是由于长期思考如何找到一个求三个有向直线段的第四比例项的一般方法. 有特定方向的线段就叫做向量. 众所周知，平面上的向量可以用复数表示；复数即由实数与虚数来表示的数，即 $x+y\cdot\sqrt{-1}$（-1 的平方根通常用 i 表示，这样上式就成了 $x+yi$.）如果我们用图形

哈密尔顿的画像，这是同时代一位画家之作，前面是他作为爱尔兰皇家科学院主席的权杖. 从 1826 年到 1865 年，他任爱尔兰皇家天文学家.

的 x 轴上的距离表示实数，用 -1 乘任意数就把它变成反号的数，而用 -1 的平方根来乘就表示旋转 90°（见下页插图）。这样，虚数就表示在 y 轴上，i 就可以视为该轴上的单位，即 y 轴上的单位向量。平面上的任意向量就可以用复数表示，它给出此向量的 x 与 y 分量。这样一对数，可称为二元数，它服从和单个数同样的代数规律；二元数可以按通常的规律加、减、乘、除。这样就能计算同一平面上的三个向量的第四比例项：$V_1:V_2=V_3:x$。



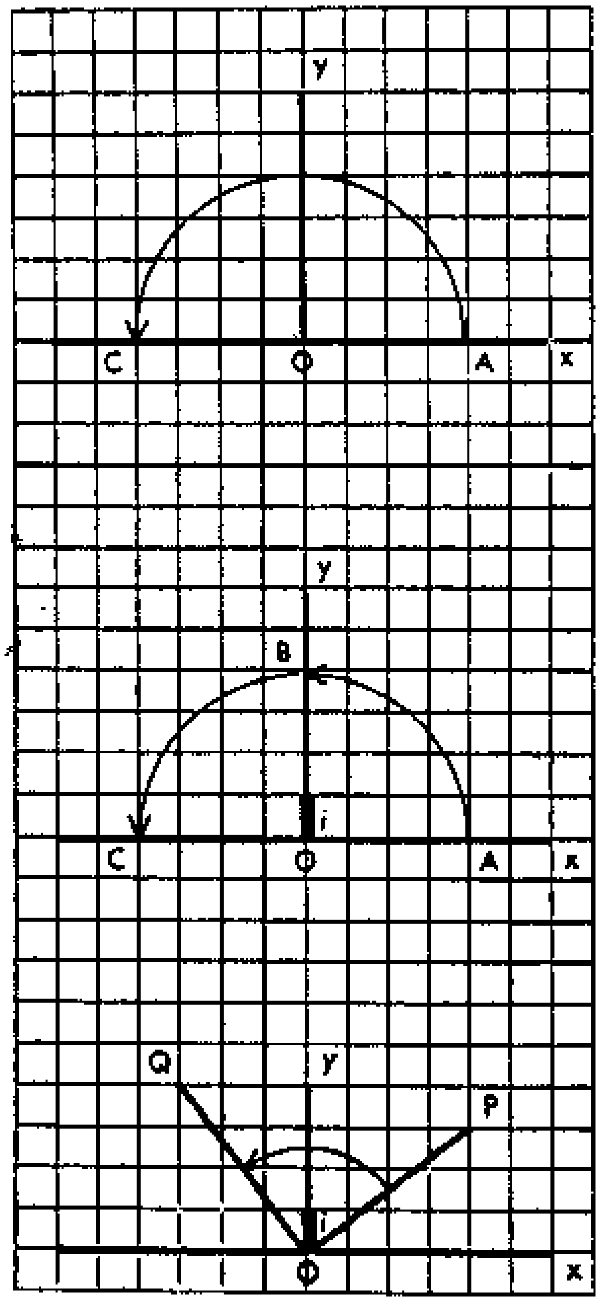
邓辛克天文台的子午线室，皇家天文学家的家就在天文台中，画于 1845 年。台中装备很差。哈密尔顿几乎把所有时间都用于数学。

哈密尔顿猜想，三维空间中的向量可以用一组三个数，即一个三元数来表示，正如平面上的向量可以用二元数表示那样。他想把两个三元数乘起来，这样来求第四比例项，但遇到了困难。当研究工作在进行时，邓辛克这个家庭的年轻成员充满感情地与他们杰出的父亲分享希望与失望。他的两个儿子威廉·爱德文（William Edwin Hamilton）（九岁）和阿奇波德·亨利（Archibald Henry Hamilton）（八岁），时常在早餐餐桌上问道："嗯，爸爸，你会乘三元数了吗？"对此，他只好哀伤地摇摇头回答说："不，我还只会加和减。"

一天，当他从邓辛克步行去都柏林时，哈密尔顿突然找到了答案*：三维空间的几何描述不能用三元数而要用四元数。为了规定把三维空间的一个向量变为另一个所需的运算，需要知道四个数：(1)两个向量的长度比，(2)二者之交角，(3)结点，(4)它们所决定的平面的倾角。

---

* 译注：《古今数学思想史》第三卷，第 177 页（上海科技出版社，1980 年）有以上记载："1843 年 10 月 16 日，当我和夫人步行去都柏林途中来到勃洛翰桥的时候，它就来到了人世间，或者说出生了，发育成熟了。这就是说，此时此地我感到思想的电路接通了，而从中落下的火花就是 i，j，k 之间的基本方程；恰恰就是我此后使用它们的那个样子。我当场抽出笔记本，印象还在，我就将这些做了记录，同一时刻，我感到也许值得花上未来的至少 10 年（也许 15 年）的劳动。但当时已完全可以说，这是因为我感觉到一个问题就在那一刻已经解决了，智力该缓口气了，它已经纠缠住我至少 15 年了"。这是哈密尔顿 15 年后的回忆文字，引文稍有修改。一说哈密尔顿把这些公式刻在一块石头上，至今桥头仍镌刻着这个公式。



复数可用来表示线段的长度和方向，它由实数和虚数即 - 1 的平方根构成. 复数的乘法过程相当于一个几何运算：旋转（译注：原文误为复数的加、减、乘都是旋转）. 上图，表示 + 4 的线段 OA 乘以 - 1 后变成表示 - 4 的线段 OC. 所以乘以 - 1 相当于旋转 180°. 中图把乘以 - 1 分成了两步，即先乘以一个 $\sqrt{-1}$，再乘以一个 $\sqrt{-1}$（ - 1 的平方根常记为 i）. 所以乘以 i 可以看成是旋转 90°. 这就导致在 y 轴上测量虚距离的思想，即用 i 来标注 y 轴上的"单位向量". 下图证明了，即令对于端点不在 x 轴上的向量，乘以 i 仍有旋转 90°的效果. 由点 $O(x=0, y=0)$ 到点 $P(x=4, y-3)$ 的线段可以用**复数** $4+3i$ 来表示. 用 i 乘此数得出 $4i+3i^2$ 即 $-3+4i$. 此数可用图上的线段 $OO(x=-3, y=4)$ 表示，恰好是 OP 旋转了 90°.

哈密尔顿把这样一组四个数叫做一个四元数，而且发现，四元数可以像单个数一样相乘. 但是他发现四元数的代数在一个关键的方面与通常的代数不同：它是非交换的. 这个词需要一些解释. 当我们用 3 去乘 2 时，乘积和用 2 去乘 3 一样. 这称为乘法的交换律，可写为一个代数公式 $ab=ba$. 它也适用于虚数而和实数一样. 但是对四元数的计算则不行，因为后者能描述如旋转这样的几何运算. 82 页上的插图说明为什么不行. 图上有三个互相垂直的轴，y 和 z 轴在纸面上，x 轴则指向读者. i，j，k 分别表示三个轴上的单位向量. 乘以 i 定义为在纸面上反时针向的旋转 90°；乘以 j，k 则是垂直于纸面上的两个平面上的反时针 90°旋转. 用 i 乘 j 就把 j 变成 k；即是说 ij＝k. 但是用 j 乘 i 则把 i 变为－k，即 ji＝－k. 这样 ij 不等于 ji.

放弃交换律是对传统的重大突破. 它标志了一个新时代的开始. 发现的新闻迅速传开了，至少是在都柏林，在上流社会中引起了兴趣的热潮，就像后来广义相对论在伦敦引起的热潮一样，当时，荷尔登勋爵（Lord Haldane）就曾邀请爱因斯坦与坎特伯雷大主教共进早餐. 哈密尔顿也有类似经历：有一次哈密尔顿在街上被一位英国——爱尔兰世家的成员恭维地问道："天哪，四

元数到底是个什么?”为了满足这些人,他写了一本轻松的小书《给一位夫人的信》,其中他这样解释四元数这个词的来源:“例如我的版本的圣经,那里说,希律王派出四个四员的兵去看守使徒彼得.再举一个比较轻松比较现代的例子,斯各特(Walter Scott,著名苏格兰作家)在“Guy Mannering”一书中说到哈泽伍德地方(Hazelwood)的哈泽伍德爵士的长句子充满了‘三言诗和四言诗’,“四元”一词就来自“四员”或“四言”. *

由此时直到他去世的22年中,哈密尔顿主要的兴趣是发展这种新的演算.这些年代大多是不幸而孤独的,由于多病而妻子也不能照看他.他整天在天文台房屋的大餐厅中工作,厨师不时送给他一些羊肉.(他死后人们发现许多盛着羊骨的盘子夹在他的手稿里.)

其他的新代数例如矩阵理论,很快地跟着哈密尔顿的发现而来.矩阵也是非交换的.这样,他开创了数学中一个光荣的新学派,虽然直到半个世纪之后它才完全开了花.我还记得在1900年我曾与怀特海德(Alfred North Whitehead 译注:英国大哲学家,与罗素合著了卷帙宏大的名著《算术原理》(*Principles of Mathematics*)三大卷,是数理逻辑开山之作之一)讨论过四元数和别的非交换代数在对物理学的应用方面有没有大的前景.怀特海德说,尽管当时已知的物理学全都可用通常的代数来处理,可能有朝一日会发现物理学的新领域,对于它,非交换代数才是唯一自然的表述.恰好在这一年,这个期望在实现的道路上启动了.普朗克(Max Planch)在这一年引进了量子 h,这就是量子理论的开端. h 是作用量的量子,而作用量则是哈密尔顿的动力学体系的中心概念.于是,哈密尔顿关于动力学的思想才逐渐显示出来.但是非常慢.当我写的《解析力学》(*Analytic Dynamics*)一书1904年出版时,我因为用了很大篇幅讨论坐标——动量的对偶性,作用量和其他哈密尔顿的思想,而受到严厉批评.批评者把这些称为数学把戏.

但是,好的工作一定会继续.狭义相对论的发现把四元数推上了前台,因为剑桥大学的凯莱(Arthur Cayley)1854年就指出,四元数可以用来表示四维空间的旋转.他的结果对最一般的洛伦兹(Lorentz)变换给出了特别漂亮的表示.此外,这些新发现再次强调了作用量的重要性,因为作用量在不同的参考系中形式不变,所以它在相对论物理中是基本的.

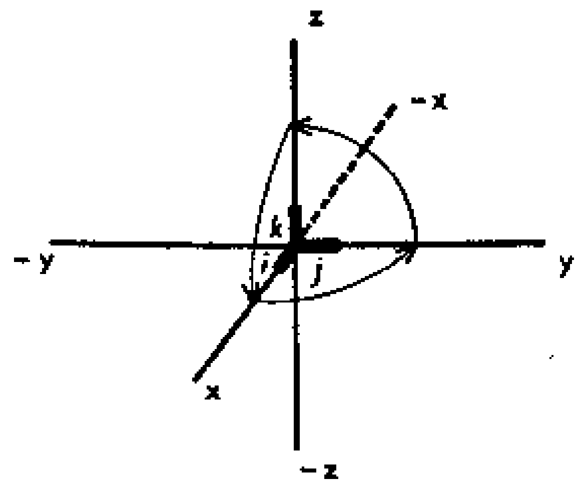
同时,研究量子理论的人逐渐认识到,哈密尔顿关于动力学的概念必须成为量子化的一切

---

* 译注:哈密尔顿这里玩了一些文字游戏:圣经上记载希律王(即杀害耶稣的希律王之孙),逮捕了使徒彼得交给几个兵去看守.哈密尔顿故意说交给四“连”兵去看守,而且仿照排连的说法,捏造了一种士兵的编组单位:“四员”,因为 quarter 一字可以解释为列队礼仪或操练的士兵的队形.所以这里说是“我的版本”的圣经.下面“三言诗和四言诗”,原文作“triads and quartenions”,triads 是古爱尔兰的一种文体,三字一句或三句一段(有时押韵)的格言,警句.故译为“三言”,仿此,将 quartenion 译为“四言”,取“言”和“元”的谐音.因为查到此书,故说明如上,不当之处望读者指正.

规律的基础. 1925 年,他的工作的另外一个侧面——即他的非交换代数——被海森堡(Werner Heisenberg),波恩(Max Born)和约当(Pascual Jordan)引入了量子力学,他们证明了通常的哈密尔顿动力学方程在量子力学中仍成立,只要把经典动力学中的坐标和动量解释成非可换的算子就行了.

非交换代数可用来表示三维空间中的几何运算. 三维空间中的向量可以用三根垂直的轴所成的坐标系来表示(x 轴指向读者,y 轴 z 轴则在纸面上),即用此三轴上的单位向量来表示. 乘以 i 就表示在垂直于 i 的平面(即 y,z 平面)上按逆时针方向旋转 90°,这是相当随意规定的. 乘以 j 和 k 也可类似地规定,如图上的箭头所示. 现在可看到,把 i 作用于 j,即 i×j 的效果是把 j 变成 k. 另一方面,把 j 作用于 i,即 j×i,效果是把 i 变成 −k. 所以 i×j = k,j×i = −k. 换言之:这种乘法是非交换的,i×j 不等于 j×i.



时间有力地为哈密尔顿关于广义坐标与广义动量的对偶性的直觉辩护了. 这特别惊人地表现在 1927 年,那一年海森堡发现了测不准原理,它通常是这样表述的:粒子的坐标确定得越准确,则对其动量知道得越不准确,反过来也一样:二者的乘积之差可用与其不确定程度的乘积来表示,而这个乘积则与普朗克常数有相同数量级,因而不会为 0,这就是说坐标与动量这两个物理量的乘积是非交换的. *

研究量子力学的人一般倾向于认为最适合于他们的问题的非交换代数是矩阵代数而不是四元数代数. 但是哈密尔顿原始的公式还会钻出来. 泡利(Wolfgang Pauli)的"自旋矩阵"就是哈密尔顿的三个四元数单位 i,j,k,而关于旋转和角动量的量子理论就依赖于它. 康威(Arthur Conway)证明了,把四元数方法用于讨论狄拉克关于自旋电子的方程很有利. 甚至还可以期待证明哈密尔顿 1843 年的公式是新物理学最自然的表示.

* 译注:译者作了一些文字修改.

8.

巴贝奇奇特的一生

P·和 E·莫里斯(Philip and Emily Morris),1952 年 4 月号

去年夏天英国节时,在南肯星顿科学博物馆举行的科学展览会上,有一部分展台的中心是一台叫做尼姆洛德(Nimrod)的光亮的、流线型的计算机.一个参观者如果离开了主要的吸引人的地方,就会找到尼姆洛德的盖满灰尘的祖先,塞在一个远远的仓库里.它是由轮子和连杆很复杂地组成的,标记说明它叫做巴贝奇(Babbage)差分机.它是 1833 年制造的,它是一个耗尽了年华和财富来制造一台数学机器的设计者的作品,设计者所处的年代还没有为这种机器的出现作好准备,但现在制造这种机器已经实现了.

今天有些数学家知道巴贝奇(Charles Babbage)的名字了.他的同时代人却极少有人认识到他的工作的价值,他被他在伦敦的邻居看成疯子,充满古怪念头专门讨伐街上摇风琴的人;确实,他去世时,伦敦泰晤士报上他的讣告第一段就说他"尽管备受摇风琴的人折磨"却活到将近 80 岁.今天的数学家把他看成远远走在自己时代前头的人.英国《自然》杂志一篇讲一种美国计算机的文章,标题就是"巴贝奇梦想成真".

巴贝奇是一个多才多艺的人.他写过一本书:《论制造业和机器业的经济》(*On the Economy of Manufactures and Machinery*),已预告了我们今天所说的运筹学;在他的时代,当科学研究在很大程度上只是绅士们的爱好时,他发起了一场坚决的战斗,要政府资助科研;他出版过一本从 1 到 108,000 的对数表;他作出过一个死亡率表,企图为普及人寿保险开创风气;他设计过机械工具;他提议过好一些发明,从防止铁路事故的程序到灯塔信号系统都有;他写过物理,地质,天文和考古学的论文.但是数学机器才是他终身最大的热情追求.

巴贝奇 1792 年生于德文郡,是银行家的儿子,最终他继承了相当大一笔财富.因为健康很

差,在1810年进入剑桥三一学院前,一直受教于私人教师.他热爱数学,但当他知道他比老师知道得还多时,他感到沮丧.他在大学最亲密的朋友一是约翰·侯舍尔(John Herschel),著名天文学家威廉·侯舍尔(William Herschel)之子,另一位是乔治·皮科克(George Peacoch).三个大学生互相约定"要尽自己所能使世界比他们降生时更聪明一些".作为这个方向的第一步,他们在1812年成立一个分析学会,其主旨是鼓励英国数学家采用大陆上通用的莱布尼兹的符号取代牛顿的数学记号.牛顿用一个点放在所讨论的某字母上,表示它的变率,莱布尼兹则在这个字母前写一个d.巴贝奇有一次说,他发起这个学会就是为"纯粹的d-主义原则辩护,反对大学的点-时代."虽然遭到相当大的反对,却对数学在英格兰未来的发展有深刻的影响.

巴贝奇自认为在tripos考试*中必不如侯舍尔和皮科克两位朋友,就在三年级时从三一学院转学到彼得豪斯(Peterhouse)学院,宁在彼得豪斯当第一,不在三一当第三.他确实是在彼得豪斯毕业的,而且继续在1817年取得了M.A.学位.巴贝奇,侯舍尔和皮科克在离开学校以后仍是好朋友.每人都以自己的方式遵守了他们的约定,然而他们的生活道路却大相径庭.皮科克走的是官路,不久就成了伊利(Ely)学校的学监.侯舍尔在法律方面短期见习以后,决心随父亲攻读天文学.他不仅在天文学方面出人头地,还从国王荣获爵士封号,做了造币厂的厂长,从此摆脱了有关科学的争吵,他的传记作者说他的一生充满宁静与天真.

巴贝奇则相反,为了他的数学机器,注定要过着充满辛酸挫折的一生.他在晚年曾有一次对朋友说他一生没有过一天快活日子,还说他"恨一切人,特别是英国人,尤其是英国政府和街上摇风琴的人."其实情况并不那么糟:他一生绝大部分时间,他都是最喜群居善交往的人,而且不乏幽默感.有一次他和侯舍尔同去法国,早餐时他为每人点了两个鸡蛋,而且用法语告诉侍者:pour chacun deux(每人两个),侍者一听,大叫着往厨房跑去:"两位英国先生要煮52个蛋"(译注:bouillir cinquante deux,"煮52个",法语发音和"pour chacun deux"似乎相近,看来巴贝奇先生法语未必高明).他们总算及时制止了这件事,但是故事比人快,先到了巴黎而且有了几个版本.不久以后,在一次宴会上一位客人问他是否认为两个年轻英国人一顿早餐吃了52个蛋和一个果派是真的,巴贝奇非常镇静地回答说:"什么荒唐事英国青年人都会偶尔干上一番."有一次,一位爱丁堡的教授应巴贝奇之邀晚餐之后说:"过了一个最愉快的夜晚后,到凌晨两点我才好不容易从他那里逃出来."巴贝奇常去欧洲大陆旅行,常常寻找种种人作伴:名门世家、数学家,有技巧的技师.

尽管如此,巴贝奇为他的机器困扰,从一个欢乐的青年变成一个悲苦的老人.他最开始怎样被这个想法所占据,他自己就有多种不同说法,其中最可信的是,这始于他和他的朋友侯舍尔的

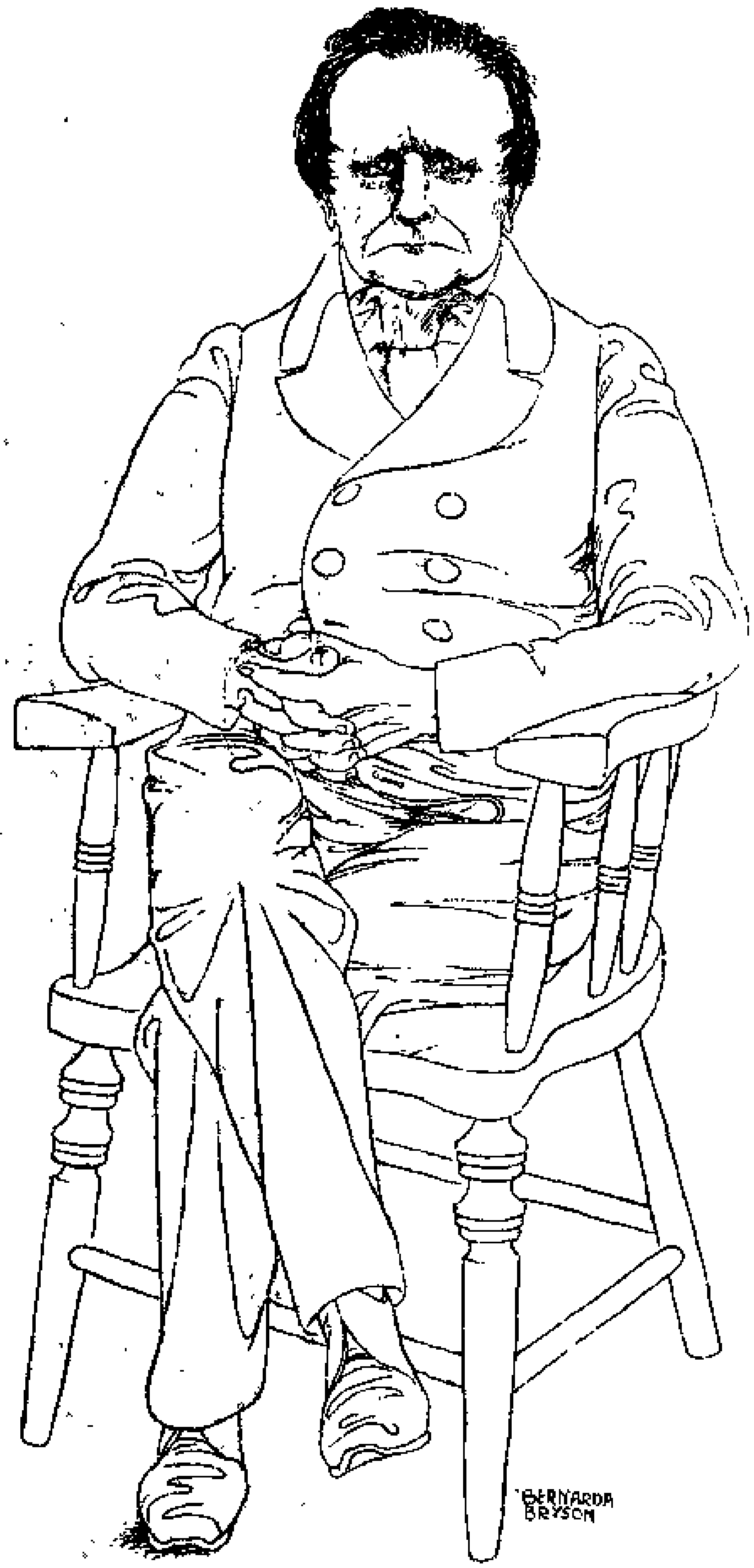
---

* 译注:见本书第10章麦克斯韦传.

偶然的谈话. 侯舍尔带来了一些为天文学会作的计算. 侯舍尔和巴贝奇对数字作繁复的检查时, 找到了一些错误, 巴贝奇在有一个地方就说: "我向上帝发一个愿, 希望能有一个蒸汽机完成这些计算". 侯舍尔说"这很有可能". 巴贝奇越想这件事就越相信能用机器来计算数学表, 并且把表印出来. "他把初步想法做成一个粗略的纲要, 而且做了一个小模型, 共有 96 个轮子和 24 根轴, 后来又简化为 18 个轮子 3 根轴. 1822 年他把自己的想法写信给皇家学会主席戴维爵士 (Sir Humphrey Davy), 指出他的"差分机"的好处, 并且建议造一台为政府之用. 皇家学会很赞成他的计划并作了报告, 财政大臣作了一个不明确的口头同意用政府资金为这个项目承担风险.

巴贝奇原来希望用三年时间完成这个计划, 但是他老是有新想法, 而把已经做出来的东西全部不要, 所以四年完了, 自己的目标还全然看不见呢. 政府为他在家附近造了一座防火的建筑以及工场. 有一次威灵顿公爵又亲自造访检查了他的作坊, 以后政府再次慷慨地让他继续做下去. 一段时间以后, 巴贝奇和他的极为出色的工程师克里门特 (Joseph Clement) 为了工资问题"发生了误会". 克里门特断然解散了工场, 遣走了工匠, 带走了所有工具, 本来他才是这些工具合法所有者, 还有所有图纸.

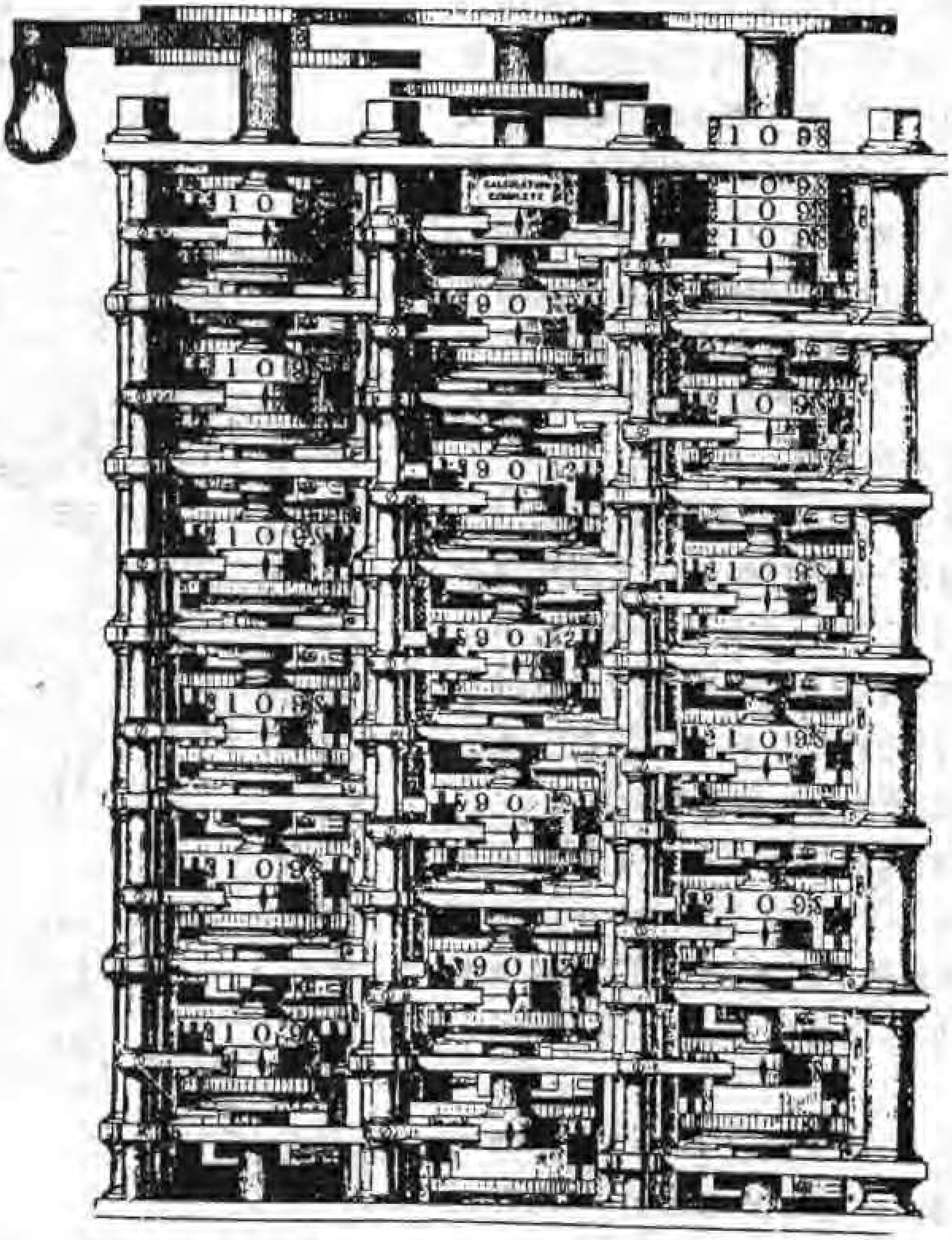
在这个节骨眼上, 巴贝奇又有了一个全新的想法: 造一台分析机, 它造起来比较简单, 运算更快, 而且比差分机能力强多了. 他热诚地把设计提交政府, 问是继续造差分机还是按新想法搞. 他追着政府作出正式决定前后八年之久; 最后他被告



巴贝奇生于 1792 年, 卒于 1871 年. 他的这个画像是按他儿子的书《巴贝奇的计算机器》中的照片画出的.

知，政府很遗憾地必须放弃这个计划.政府为此已经花了 17 000 英镑；巴贝奇也掏自己腰包花了可以与之相比的一笔钱.这个没有完成的差分机放在伦敦国王学院的博物馆里，他对此早已丧失兴趣；最后，他的梦想的遗骨给送到南肯星顿博物馆，现在还在那里.

巴贝奇用自己的钱搞分析机搞了好几年.后来他又抛弃了分析机去造第二台差分机，利用了他搞分析机的工作所想到的一切改进和简化.他再次请求政府资助，但是财政大臣拒绝了.巴



差分机是巴贝奇第一个伟大的概念.这幅木刻引自《巴贝奇的计算机器》一书，"是巴贝奇的差分机的一部分.……它的制作始于 1823 年，……而于 1842 年放弃."

贝奇尖刻地斥之为"科学的希罗斯特塔斯，人们如果还没有完全遗忘他，一定是因为联想起了以弗所神庙的毁坏者*".

终于巴贝奇没有造出一台能工作的机器. 他的视野超出了当时所能提供的完成计划的手段. 巴贝奇所期望的，其实比一台简单的台式计算机更高；他的计划是要造一台机器，它能算出很长的数学表并且直接排版出来. 他说："能做……普通的算术运算的机器……不会有这样的用处，只有能够造表的机器才会有这样的用处."

他的差分机本是要以定常差分原理为基础的. 为了说明这个原理，我们以机器设计本来想求解的问题为例，即求相继的数的平方：$1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ 等等. 所有自然数的平方，只要我们有耐心，所有的自然数的平方都可以用加法这个简单程序得出. 而以 2 为定常差分. 我们画上三行. 第一行我们都写上 2(表示求平方). 第二行以 1 打头，而以下每一步都加上 2，结果送到第三行，这一行也是以 1 打头，这样就可以得出答案. 例如 1 加 2 再加 1 得出 4 即 2 的平方；3 加 2 加 4 得 9 即 3 的平方，5 加 2 加 9 得 16 即 4 的平方，仿此以往. 表如下

Ⅰ		Ⅱ		Ⅲ
		1		1
2	→	$\overline{3}$	→	$\overline{4}$
2	→	$\overline{5}$	→	$\overline{9}$
2	→	$\overline{7}$	→	$\overline{16}$

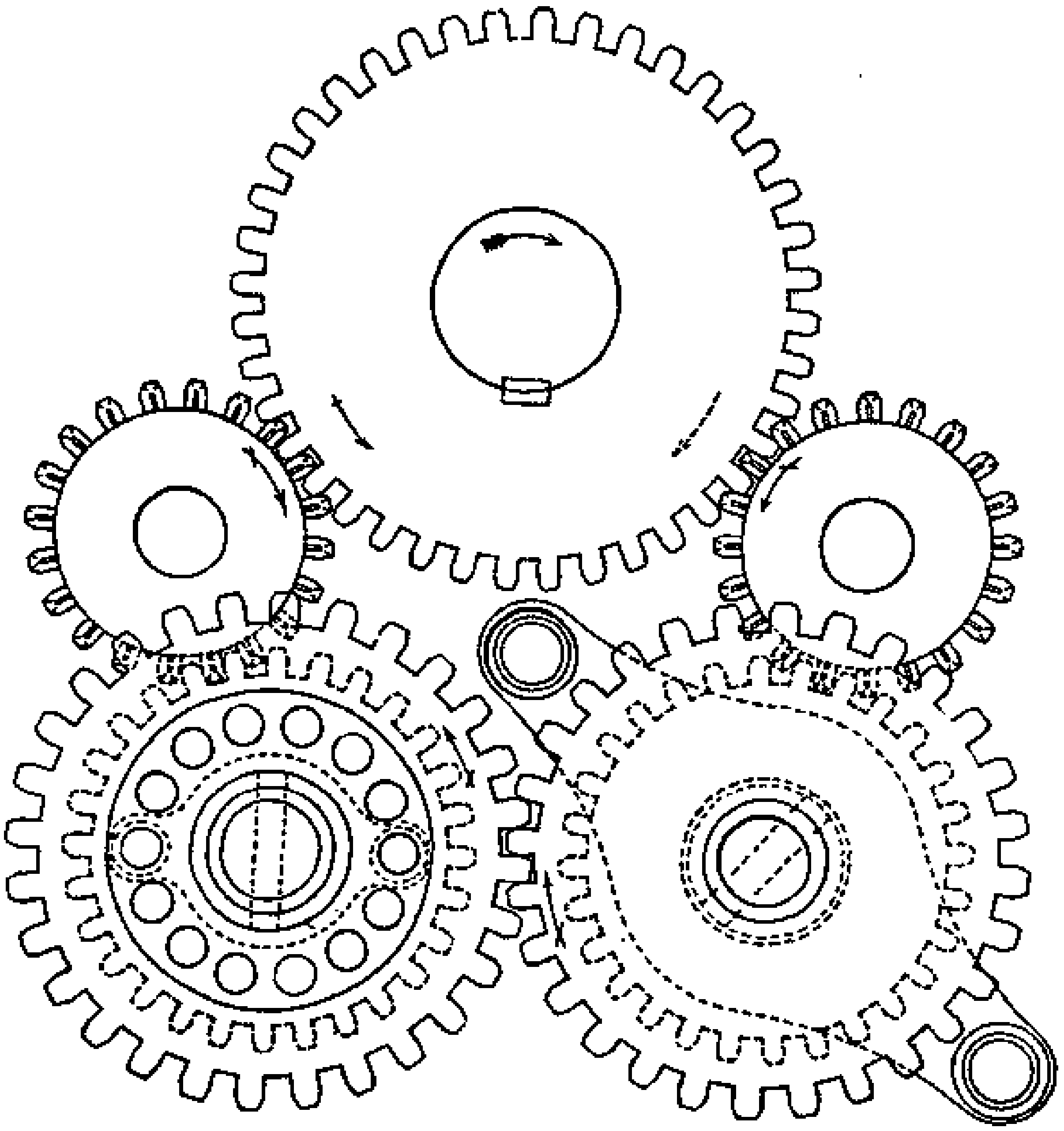
这些简单可以很容易地在机器上完成，很像汽车上的里程表，它用转动上面有数字的轮子来作加法. 巴贝奇的差分机第一个初步的模型是由轴上的齿轮做的，并用曲柄来转动，它能做直到结果五位数的平方. 但是他计划造的机器大得多. 巴贝奇的计划要容量不小于 20 位，含有直到六阶而不是二阶的差分. 此外，出现在答案这一行的数要经过许多杠杆和凸轮送到一组钢印上去，它就把数打在铜板上去印刷.

从机械上说，这一些成了很高级的问题. 想一下需要多少件多少种螺帽，螺母，抓钩，棘轮，凸轮，连杆，轴和齿轮. 还要记住，当时不需要人工装配的标准化零件实际上不存在！巴贝奇要用很大的技巧来克服这个问题. 他和他的助手们十分小心地设计了每一种零件，给出了附加的

---

* 译注：希罗斯特塔斯(Herostatus)，据 *Oxford Companion to Classical Literature*，1989，p. 285）载："根据 Valerius Maximus 的说法，希罗斯特塔斯是在公元前 356 年烧毁了以弗所(Ephesus)神庙以求留名于永久的人". Valerius Maximus 是在公元 14—37 年间从事写作的一位拉丁轶闻历史学家. 看来希罗斯特塔斯是他编造的一个人物. 译者感谢美国 Mount Holyoke College 的 Mrs. Jane R. Ting 为译文查出了以上的出处.

机械以减少磨损.他成了一个技工专家,做出了不少优于当时的工具和工艺方法,预示了一些现代仪器设计的作法.但是最大的弱点是设计要极端小心和有彻底性.如果这机器真做出来了,那会是按规格化标准的大约两吨重的新奇的铜、钢、铅锡合金的发条机器,它是前所未有的.



分析机是设计来完成任意数学运算的.图上这一部分,在上述关于巴贝奇的书上是描写为这样一种装置,"它能做用10的任意次幂去乘或除这样的运算".

当巴贝奇从差分机进而到达分析机的思想时,他看到的是真正宏大的远景.他早就有了一个想法,他自己形象化地说成是"咬自己尾巴的机器".这句话的意思就是,输出行里出现的结果可以做得影响以前各行,这样改变已经给机器定好的指令.分析机是要能够做任意的数学运算的.给它设置好的指令会告诉它做些什么运算,按什么次序去做.它会做加,减,乘,除;它有一个存储,能存1 000个50位的数字;它可以应用于一些辅助的功能如对数表,它自己就有一个放对数表的库房.它能比较数,并按其判断行动,这样就能按机器的指令,沿着并非事前唯一定好的路线行动.

这一切或其大部分都已在现代的计算机上通过了. 但是巴贝奇受到限制只能用机械实现它;他的设计没有预想到电路会有什么用,更不说电子管了. 他提出全用穿孔卡片——并不是我们现在用的转动很快的电动卡片机上用的穿孔卡,而是仿照贾夸德(Jacquard)织机上用的穿孔卡. 指令和数据都以编码了的一行行小孔来记在卡片上. 当卡片输入机器时,读卡机就用线扫过它们. 只要小孔成了适当的图式,线就可以穿过小孔,而使一行行组成"连锁"运动起来以至整个部分组合. 机器这样就会完成所有的运算. 这个系统的巨大复杂性并没有使巴贝奇胆怯,因为他有一幅丝绣的贾夸德(Joseph Jacquard)的画像,为了织这幅画像使用了大约两万张穿孔卡片!

这就是分析机最概略的概要了. 巴贝奇可以感到骄傲,他的分析机的逻辑结构多么完全地为今天的大型电子计算机所采用了.

除了概念以外,巴贝奇还创造了许多立刻可以实用的机械装置. 正如今天设计数学机器的队伍立刻就会被卷进电子管和电子线路的纷纷扰扰的大堆问题一样,巴贝奇也被卷进机器工场和绘图室的问题里去了. 他和他的一组人发明了许多新工具用于车床之上. 他的工场里技术很高的工匠中有一个名叫惠特沃斯(J. Whitworth)的人,后来被封为准男爵. 所以称为 Sir Joseph Whitworth, Bart. 他是英国精密仪器制造者的首屈一指者. 巴贝奇为他的机器画的图纸,铺开来超过 400 平方英尺,现代的专家还会评论为大概是历来所画过的机械制图的最好范本.

巴贝奇关于运筹学的书《论制造业和机器业的经济》,出了好几版,在美国重印过,还被译为德文,法文,意大利文和西班牙文. 他在这本书里把别针的制作分解开来——用些什么操作,需要什么技巧,每步程序的费用——并且对当时的实际作法提出了改进建议. 他提出了一些一般的方法来分析工厂和工艺流程,以及确定工厂的适当的规模和厂址. 一个英国工人对他说:"这本书教会了我思想",巴贝奇对此十分珍视,认为是自己所得到的最好的评论.

年过 70 时,巴贝奇写了一本自传,题为《一个哲学家的生平片断》. 这是一本愤世嫉俗而又不乏幽默感的书. 在扉页上自己的名字后面列了长长一串学术团体(主要是外国的)的单子. 他的自传既是他的失望的记录,也是他的成就的记录. 他说,写这本书是为了使他的计算机的历史"不是那么伤感".

但是完全没有必要感到遗憾. 这种机器的思想是天才的. 他的整个故事证明了,一方面是纯粹的科学创新,一方面是当时的技术,公众的理解以及他人的支持这些社会结构,这两方面多么强有力地互相作用. 他的伟大的机器什么问题的答案也没有转出来,因为创造才能可以超过它的环境. 但是不能不顾环境. 他的纪念碑不是尘封的老书上的争吵,不是一个蓬勃兴起的科学分支中的优先权,也不是博物馆中的几个齿轮. 他的纪念碑决不是完全美丽的,但肯定是宏伟的,那就是集中体现在今天的大计算机中的那些研究工作.

9.

克里福德

纽曼(James R. Newman),1953 年 2 月号

前些年,要我准备一本 19 世纪数学经典著作的小书《精确科学的常识》的新版.当我去寻找它的作者克里福德(William Kingdon Clifford)的生平,为这本书作一个序言时,我惊奇地发现,能得到的很少.关于克里福德的生平的已发表的材料,只有很少几篇分散的文章和讣告,他的全集的简短的传记序言,还有一位同时代人,律师与法学史家波洛克爵士(Sir Frederick Pollock)写的几篇散文.

克里福德之被忽视是很难解释的.他不仅是那个世纪最伟大的数学家之一,而且是颇有创见的哲学家,维多利亚时代英国精神生活的领袖之一.克里福德的大部分思想都超前于他的时代.他的数学工作是预言式的,其杰出之处在 3/4 个世纪数学的巨大发展后仍未被触及;他的哲学思想是理性主义与人道主义的;他的明晰性是一种艺术,正如罗素(Bertrand Russell)说的,“这是深刻的有秩序的理解的结果,由此,原理变得清晰明白,推理变得易于理解.”对理性的力量和人类进步的鼓舞人心的忠诚,引导着克里福德异常多产而又悲剧性的短暂的一生 35 年.

他于 1845 年 5 月 4 日生于爱克塞特(Exeter).父亲是城里有地位的人,曾任治安法官.母亲是有文化品位的纤弱的敏感女子,当他还是孩子时就辞世了——后来克里福德也死于同一疾病.克里福德是一个早慧的青年,18 岁时就已发表了两篇几何论文,这使他在剑桥大学的辅导教师预言他将跻身于科学领导者之中.在三一学院做大学生时,他已广泛地阅读了哲学、古典文学和现代史的著作.他喜欢与人作伴,和同学以及导师从天主教教义到化学,从阿奎那(Thomas Aquinas)到达尔文和斯宾塞(Spencer)作无休止的辩论.克里福德的好运是,他当大学生时正处于这样一个时期:长期被人接受的科学和逻辑方面的信念在新理论和新发现的攻击下开始摇摇

欲坠. 剑桥是这个革命的中心，而克里福德也获得了它的激励，接受了它的“大胆”言论. 他一开始本是虔诚的信教的人，“爱用聪明的科学类比来支持天主教义”，后来逐步成了有组织的宗教，特别是他称之为“教阀”的人的难以对付的敌人. 克里福德在辩论中一旦开了口就如同一阵旋风，“步武惊人”. 他在剑桥的格洛特俱乐部(Grote Club)中才华横溢. 半个世纪以后，另一位俱乐部会员，后来的大经济学家马歇尔(Alfred Marshall)* 还记得他，并以极大的崇敬来写他，虽然他感到克里福德“太喜欢惊世骇俗”.

克里福德热心地攻读法文、德文和西班牙文(为工作之用)；阿拉伯文、希腊文和梵文(因为它们很难)，还有种种象形文字(因为它们是谜)；速记和莫尔斯电码(因为他喜欢“传递思想的各种方法”). 每一种数学和科学文献都对得上他的兼容博收的胃口. 他获得了许许多多文学的、科学的和演讲的奖项. 然而他最骄傲的是他在体育上的成就：他的大学生生活的顶峰是用脚趾把自己倒挂在一个教堂尖顶的风信鸡的横梁上——这是剑桥的一项古老的古怪行为，倒也不常死人. 他在繁难的竞赛性考试 tripos** 中名列第二，这样可与当年的凯尔文勋爵*** 和无与伦比的麦克斯韦比美.

他受过良好训练，成绩又出众，1868 年成为三一学院的 Fellow. 那时，他已能经常地每年发表三、四篇一流数学论文. 他第一次重要的公开讲座题为“智力发展的条件”. 他和 19 世纪重要的科学家、哲学家以及作家一样，借此讲坛以普及学问. 克里福德在使困难概念易于理解上十分出色，他也喜欢做这种工作. 他变抽象为具体的能力使他的讲演流畅引人，虽然时间流逝，又写成文字，也并不减色.

克里福德在剑桥任 Fellow 两年从事教学、研究——或自行研究，或与其他有创造性与挑战性的人互相交流. 然后于 1870 年他参加了一次英国组织的观察队去观测月食. 全队所乘的船在西西里海外失事，幸而人手和装备均获救. 克里福德以他惯有的乐观心情对待这次不幸. 沉船后不多久，他在弗罗伦萨(Florence)写信给他的朋友弗雷德利克·波洛克爵士(Sir Frederick Pollock)的夫人：

“到卡塔尼亚(Catania)，桔树丛与望远镜；宿营于奥古斯塔(Augusta)；约那达布(Jonadab)，雷卡布(Rechab)之子，十分有趣，用白绳子把当地人拦在营地外；总有 200 人早晨看我们漱

* 译注：另一位大经济学家凯因斯的老师.

** 译注：见本书第 10 章“麦克斯韦”传一文.

*** 译注：凯尔文勋爵(Lord Kelvin)即威廉·汤姆生(William Thomson)，1824 年生于北爱尔兰的贝尔法斯特(Belfast)，1866 年封为爵士，1892 年封为男爵，爵号为凯尔文，采邑在拉尔格斯，故称 Baron Kelvin of Largs. 英制，男爵的尊称为 Lord，故称凯尔文勋爵.

洗——此仪式恒为诱人——无云时间共只 5 秒钟，月面上可见极化，与皮克林(Pickering)一致，他人亦成功……在罗马 2½ 日，绘画，雕塑，月光下的斗兽场. 次晨二人均大打喷嚏. 今晨抵弗罗伦斯——皮梯宫(Pitti Palace)——钱全用完，将困于科隆(Cologne)与奥斯腾德(Ostend)间，除非隔日仅吃一个鸡蛋，然由蛋中亦可吸出不少好处——在巴黎更好. ”

1871 年克里福德离剑桥去伦敦大学学院任应用数学教授. 大力推荐他任此职的人中就有麦克斯韦，他强调克里福德的研究之新颖与广度，而不只是以“精巧的计算细论深奥的定理. ”以后两年中克里福德作了几次他最著名的讲演，发表了相当多数学论文，包括一篇论双四元数的论文，处理推广的空间的概念，这篇论文在数学中地位很高. 有两次讲演可以作为他的奇异的力量的令人崇敬的范本，一次是 1872 年在英国科学促进会上，另一次是 1873 年于皇家学院.

第一个讲演题为“论科学思想的目的与工具”. 它讲到了对欧氏几何的深刻的再评价，这是由于一批对几何基础有新视野的数学家的研究而不得不有这样的再评价. 在那时之前，对欧氏几何的普遍适用性与永恒的确实性，从未有过怀疑，因为从无人检验过. 非欧几何这个异端邪说终结了这个平静的信念.

克里福德以大师式的手法说明了这个问题. 他说，科学思想的进步其实基于一种假设，即我们在自然事件中所看见的秩序，在我们未得经验之处仍可保持. 虽然人类的经验是有限度的，但是借助于这样一个一致性原理，我们“可以从已经看到的事物来推断未曾见到的事物. 然而，这个假设必须准确地界定；我们必须断定，我们的推断以之为基础的一致性原理在数学上是否准确的. 对宇宙的力学解释在 18 世纪是大大地详尽展开了，它基于这样一个信念：“如果我们知道了关于大自然的一切，就会发现它普遍地服从准确的数值定律. ”但是数学家表明，大自然是否真正服从这样的定律，这一点还远未解决.

“无疑地，人们会对我说”，克里福德说：“关于这种[准确的]定律，我们已经知道得很多了，这就是几何和力学；正是以这些科学为范本，引导人们在其他领域中去寻求准确性. 如果上世纪人们对我这样说，我还不知道该怎样回答. 但是恰好在本世纪开始时，几何学的基础受到两个数学家独立的批判，他们就是罗巴切夫斯基(Nikolai Ivanovich Lobachevski)和不朽的高斯，他们的结果稍晚一些又被黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann)和赫姆霍兹(H. von Helmholtz)推广. 他们的研究引导我们达到的结论就是：古代几何学家非常恰当地作出的假设实际上是准确的——即是说比实验更准确——却只是对于我们要处理的有限大小的事物，对于我们能够达到的那一部分空间如此；对于大得多或小得多的东西，对于我们目前尚不能及的那部分空间，它们是否为真实的，是需要等到实验的力量大为增强以后由实验来决定的事. 我想把这个问题的真实现状尽可能说清楚，因为它时常被说成是一个文字的或形而上学的问题，其实它是一个非

常明晰而简单的事实问题."

克里福德就这样坚定地站在黎曼一边.黎曼是那个世纪最伟大的数学家,克里福德和他一样认为,应用于经验世界的几何学是一个实验科学,是物理学的一部分.按这种观点,几何学仍然是一个精确科学,但不再是一种普遍的科学.一个定律要是普遍的,只有在一切可能情况下均

克里福德在学生们中间

为真才行,"而我们对任一种定律都不知道是这样的."所以,几何学只在一个有限度的范围内才是精确科学.

这在今天是人所熟知的观点——即把几何看成是对理想空间的纯粹科学时,它是逻辑学的形式的练习,而在把它看成是用于描述现实空间(小到原子以内,大到猎户座*以外)的应用数学时,它像烹调和昆虫学一样是一门实验学科,它需要验证,而且在进一步探讨时还会有变化.但在1870年,它既不为人熟知,也未被普遍接受.这个观点与当时普遍认可的数学与哲学的主体之矛盾简直是声名狼藉.克里福德的看法是对下面的信念的一个挑战,即欧氏几何是在任何时候对真实空间的任何部分都是完美的描述——这个挑战最终引导到关于空间、时间、能和物质的现代的观点.从哲学的观点看,克里福德的观点与康德提出的超验的审美观相对立.康德的观点是,长期为人接受的空间概念是不会改变的,因为它们是由我们感觉的方式或者由意念的构造所决定的.

克里福德的第二个讲演"纯粹科学的哲学"对于由非欧几何的创始者们引起的科学上的革命,"宇宙观念的变化"作了一个透彻的,有时简直是诗意的概述.

"维萨留斯(Andreas Vesalius)之于盖伦(Galen)**,哥白尼之于托勒密,罗巴切夫斯基之于欧几里得就是这样…….在哥白尼时代之前,人们关于宇宙的一切都懂得.在学校里他们就会拍拍胸膛告诉你,现在的一切怎样,过去又怎样,将来会怎样.地是平的,苍穹覆盖大地,如同大教堂的圆顶,明亮而寒冷的星星贴在上面;太阳和行星则在其间运行.而在比较有学问的人中则说,地是宇宙中心的一个球,天是一个同心球,其间的构造则和上述一样.总之,如果说天外还有什么,那就是一无所有的空间,不必再去探讨.所有这一切的历史可以追溯到它的起始;在这以前就是毫无变化的永恒,它已经完全地描述过了,讨论过了.但不论是哪种说法,宇宙都是一个已知的东西.哥白尼体系以及随之而来的天文学发现的巨大的效果就在于,关于永恒和无垠的一点点知识,却被称为关于宇宙的知识;现在知识已经多得多了;但我们却称它为关于此地和此时的知识.关于太阳系我们可以说上许多,但是它毕竟只是我们的家而不是我们的城市.关于我们的太阳所属的星系我们也可以说上一些;但是它也只是我们的星系而不是宇宙.我们谈论此地,意下还有一个彼地,有一天我们会对彼地有一些了解,但现在则完全不了解.

"于是,这就是哥白尼在关于宇宙的概念上引起的变化.但是还需要再一个变化.因为空间

* 译注:原文为Betelgeuse,是猎户座一个大星.

** 译注:维萨留斯是16世纪比利时解剖学家,近代解剖学的奠基人;盖伦是古希腊医学家与解剖学家.

和运动的定律……意味有无限的空间与无限的延续，其作为时空的性质已全都准确地知道了.它离我们有无限距离的那些部分的构造，即"无穷远平面上的几何学"，如果欧几里得的假设为真，应该了解得和这间房间任意部分的几何学一样好.所以我们至少对于涉及宇宙的某些事有了真实的知识，这些事在无垠和永恒中总是对的.罗巴切夫斯基和他的继承者把"这些事"拿走了.今天的几何学家对在无穷远处实际存在的空间是一无所知的，他对今天的空间在过去和未来的永恒中的性质也一无所知.他真的知道欧几里得假设的定理之为真，其精确程度任何直接的实验均无法接近……但他知道这只是此地与此时；在此范围之外还有彼地彼时，他目前对之还一无所知，但是最终可能知道一些.所以你们看到.哥白尼及其继承者的工作，以及罗巴切夫斯基及其继承者的工作，二者有真正的平行性".

关于空间的通常的欧氏概念基于四个基本公设，而克里福德依次作了透彻的分析.第一个公设是：空间是连续的，什么破裂和缺口也没有.但是克里福德指出，连续性是由我们的感觉得到的印象，而可能欺骗我们.使用物理和化学仪器可以把似乎光滑而没有破裂的对象分裂成原子或其他分开来的单位.我们有什么证据说空间不是也有这种性质，不是看起来光滑，而实际上是由具有小小裂缝的花边织物交叉而成的呢？所以关于连续空间的欧氏假设有待经验证实.

第二个假设是"空间的最小部分的平坦性".即若在空间中取三个互相非常接近的点，并用最可能短的线连接它们，这样形成的三角形状的图形非常近于位于同一平面上.克里福德依照黎曼关于通常的几何定律对于"无穷小空间的度量关系"不一定成立这一意见，对第二个公设是否普遍成立也表示怀疑.

第三个欧氏公设是，在空间中运动的物体不改变其大小和形状，即是说"空间各部分均相似".第四个公设则是"任意图形任意地放大或缩小都不会改变形状".（这蕴含了欧几里得平行线不会相交的规则.）第三和第四公设合起来就是空间均匀地具有零曲率.克里福德发现这两个公设容易从"很大"这一方面受到攻击，正如前两个公设可以从"很小"这一方面受到攻击一样.即是说，正如空间的很小的区域可以是不连续的一样，很大的部分可能是弯曲的.为了描述一个空间与基本的平坦性这一标准的偏离，需要有特别复杂的特定的几何学.这与现代的物理概念紧密相关，即所有现象，甚至物质自身可能由空间的皱析与曲率的变化构成.

如果放弃第四个"相似性"公设，则就平行面言，这就为非欧几何开辟了道路.例如有双曲几何，其中三角形内角和小于 180°，又有椭圆几何，内角和大于 180°.椭圆几何或黎曼几何的空间意味着一个很大的但是弯曲的有限宇宙，这很吸引克里福德："我不怕承认，我个人时常希望空间的真实情况是这样的.这可以安慰我，可以摆脱一个枯燥的无限但是千篇一律的空间".

克里福德 1874 年成为皇家学会会员，而早一些则拒绝提名，因为觉得自己"还不够格得到

克里福德在黑板前

尊敬”. 他健康良好，精力充沛地教学，发表他的最新研究成果，还有余暇作科普讲演以及关于社会和道德哲学的讲演. 他提出关于“意念材料”和“种族自我”的一些形而上学理论. 它们含混而无生气. 但是他的伦理观念却充满了温情. 对于缺少宽容的憎恨，对于理性的忠诚，这些正是他的人格的特征. 他的伦理学的总纲建立在关于进化的新的学说的基础上. 他认为，自由，独立，“按自己的内在信念行动”，是一个社会最基本的价值：“世上只有一种东西比命令他人的意欲更加邪恶，这就是屈从的意愿”. 他企图在与他的科学哲学同样的客观基础上发展他的伦理理论. 他的头脑中，除了依据理性和经验的教导以外，绝没有用其他论据来支持道德和宗教价值的念头. 在伦理学中和在几何学中一样，他不准备接受永恒的价值.

克里福德在个人生活中绝无丝毫伪善或自以为是. 在他就关于行为的“理想的理论”写给波洛克爵士夫人的信结尾说：“顺便说一下，所说的一切都只是理论；我的实际作为和别人是一样的.”克里福德本人绝不装腔作势，而对别人这样做，他的批评是尖刻的. 在谈到一位熟人打算从事一项哲学中的工作时，他这样评论说：

“他在写一本关于形而上学的书，他确实有所需的才能. 他作为哲学家的财富就是：他对于自以为他懂得了什么是非常清楚的，但是他完全不能表达出自己所知之微.”

但他完全学不会对别人怀有恶意. 他曾经这样写道：

“我遭到很大的不幸；我和某某人握了手. 我相信，如果世上所有的杀人犯、教士和说谎者合并成了一个人，而他突然在街角遇见我，而且微笑着对我说‘您好’，我也不能一下子就对他不客气.”

1875 年 4 月 7 日，克里福德与露西 • 兰(Lucy Lane)结婚. 当他为此向大学学院请假时，他

通知他的班上说:"他为一件重要的事不得不缺席,这种事以后大概不会再发生了."他的妻子成了一个著名的小说家和剧作家,并用露西·克里福德(Lucy Clifford)的名字写作.她比他多活了半个世纪.他们有两个女儿,这给了克里福德很大的喜悦.他爱所有的孩子,十分高兴地为他们编游戏,写童话和诗.他把有些寓言编了一本集子:《小人》.他计划出一套小小的学校教材,其课程的设计是为了帮助"孩子们自己发现事物".

克里福德和孩子们在一起的愉快,他对孩子们学习和成长问题的深切关怀,这与他和自己的孩子在一起的时间之短暂,成了令人伤心的对比.1876年,出现了关于肺结核的第一批警号.他一生都过分消耗了自己的体力;他虽是运动员,却体质衰弱.克里福德尽管有重病症状,却没有停止工作.1876年他发表了不少于9篇数学论文和其他作品.有一篇论文"关于物质的空间理论"是投给剑桥哲学学会的一篇出色稿子.他在其中提出空间的小部分"好像曲面上的小山,曲面平均地是平坦的,而其弯曲变形的性质以波的方式从空间的一部分不断地传到另一部分;空间曲率的变化就是物质运动时实在发生的事……在物理世界中发生的只有这种变化,它(可能)服从于连续性定律……"这些话是在爱因斯坦宣布他的引力理论前40年发表的.

克里福德于1876年秋不得不同意因健康而请假六个月,和妻子一同去阿尔及利亚和西班牙旅行.他回到英国时情况有了改善,以后的一年半加速工作,发表了两篇最著名的论文,还有一些别的数学文章,一本出色的关于动力学的书,一些散文,讲演和书评.然后他又垮了下来,于是在1878年到意大利度过春天和夏天,然后回到英国,看起来病重虚弱.1879年春,他航海去马德拉群岛(Madeira,属葡萄牙),在明媚阳光下平静地过了几天.1879年3月3日去世.

波洛克爵士写道:"这见证了在人的一生中,从没有人比他更热爱生命,更不惧死亡.他完美而真诚地做到了斯宾洛莎(Spinoza)伟大的话,这话他总是记在心间,挂在口边:Homo liber de nulla re minus quam de morte cogitat[一个自由的人考虑最少的事就是死亡]."

克里福德不仅是一个伟大的职业数学家,一个出色的哲学家和一位才华出众的作家,而且是科学的一个公民.他不休止地努力加强其基础及其有机的统一性,而且通过宣讲科学方法最广泛的应用,来促进理性,击败非理性.他的形象是一个高尚的心地宽阔的人:"记住,[科学思想]是行动的向导;它所达到的真理不是为了我们可以用来沉思而不犯错误,而是为了我们可以依据它行动而无所畏惧;你们不会看不到,科学思想并不是人类进步的伴随物或者条件,它就是人类进步本身."这是一个格言.在我们这个时常搞错了科学的阀门或杠杆的时代,应该好好回想一下这个格言.

10.

麦克斯韦

纽曼(James R. Newman),1955 年 6 月号

詹姆士·克拉克·麦克斯韦(James Clerk Maxwell),19 世纪最伟大的理论物理学家,开辟了科学的一个新时代.使我们的世界区别于前人的东西,有许多要归功于他.因为他的最蔚为壮观的发现是理论研究而非实验研究的成果,所以他常被看成是完全用纸和笔建立起自己的体系的那一种科学家的杰出范例.但是这个概念是不对的.麦克斯韦能把深刻的物理直觉与令人敬畏的数学能力结合起来.洞察物理现象,而又不忘记需要说明的对现象的观察.这样把具体与抽象相融合,是他几乎全部研究工作的特征.

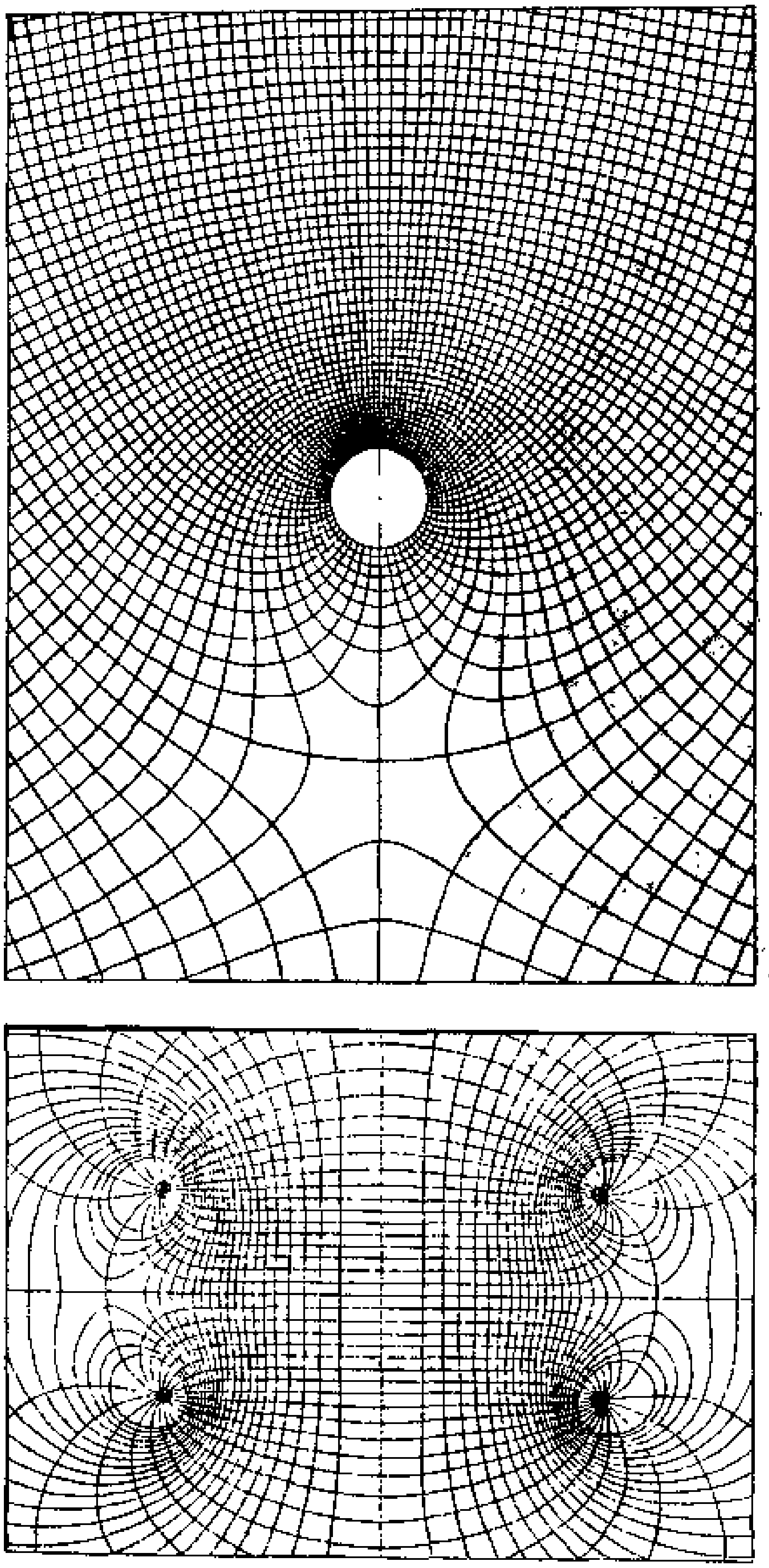
麦克斯韦 1831 年 11 月 13 日生于爱丁堡,这一年法拉第宣布了他关于电磁感应的著名发现.他出身于一个古老苏格兰世家,这家人独立特行乃至濒于怪癖,然而才能出众(它的子弟中有著名的法官,政治家,矿产投机商,商人,诗人,音乐家).他的父亲是一个苏格兰律师,然而对辩护人肮脏的追逐毫无兴趣,而致力于管理自己的小家产,关心本郡的事务,充满爱心地教育自己的独子.麦克斯韦的父亲是一个温情而又相当简单的人,富有幽默感,对机械发明颇有兴趣.他的母亲,人家都说,有一副"乐天活泼的脾气".

他的小名叫詹姆西,在离爱丁堡有两日马车车程的格伦内尔(Glenair)自家的家园里度过了早期童年.他是一个活泼而且重感情的小孩,像他的父亲一样老是好问,对机械入了迷.对每一件都想发现"它是怎么回事",这是他不变的目的.他会问"难处在哪里?"如果回答不能满足他,他就会再加一句"实在的难处究竟在哪里?"他自己的第一个创造就是关于"生命之轮"的一组图形,这是一个科学玩具,能给人一种幻想好像这是一个永动机;他喜欢自己动手做东西,在后来生活中知道怎样设计体现最复杂运动和其他物理过程的模型.

麦克斯韦的雕版像. 见于他的全集(The Collected Papers of James Clerk Maxwell). 本图与后三图均来自伯恩第(Burndy)图书馆.

麦克斯韦九岁时,母亲死于癌症,40年后他自己也死于癌症. 她的去世使父子二人更加相依为命. 一年后,孩子白天上学,就学于爱丁堡学院 Academy*. 他的早期学校生活是痛苦的. 他的教师是一个枯燥的苏格兰人,而且有一个好卖弄学问的教师的名声,因为他写过一本关于希腊文中不规则动词的书. 他要求他的学生举止有序,在通常的科目上都有良好基础而不许逾越常规. 麦克斯韦在这些方面都公开不从. 他穿的衣服多少引起一些骚动,这是他的专断的父亲设计的,其

* 译注:Academy 并不是科学院,这是苏格兰一种特殊的说法. 它是12岁～18岁的孩子小学毕业后就读的学校. 因此相当于中学. 感谢 B. D. Sleeman 教授告诉译者这些情况.



电力线，见《电磁通论》一书. 上图：受到直导体中电流扰动的均匀磁场. 下图：两个圆形电流. *

中有"卫生"方头鞋，镶花边的紧身上衣. 孩子们给他取了一个绰号："笨笨"，故意把他的衣服弄脏. 但是他是一个固执的孩子，不久就赢得了班上同学的敬意，尽管他仍然使他们迷惑不解.

数学的年代

在学校里，麦克斯韦对数学的爱好逐渐觉醒了. 他写信给他的父亲说，他做了一个"四——面体，一个十二——面体，还有两个什么面体，我也不知道它们的正确名称是什么."在他 14 年级时，他得到学院的数学奖，还写了一篇用针和线作一完全卵形线的论文. 在这个问题上，另一个神童笛卡儿先已做过了，但麦克斯韦的贡献是独创的. 福布斯教授(James Forbes)在爱丁堡皇家科学院宣读了这孩子关于卵形线的论文的这一天确实是父子二人美好的日子，关于这件事，父亲在日记中写到："受到很大的关注和普遍赞许."

在学院六年后，麦克斯韦进入了爱丁堡大学. 他年方 16，是一个不知休止，令人迷惑而又绝顶聪明的少年，他写了一首关于物质和能量的诗，虽不太好却奇特地好似预言：

> 那时地球和太阳成了冰冷的土块，
> 一切能量都已蜕化，
> 一切物质都凋谢成为以太.

他的朋友和传记作者坎贝尔(Lewis Campbell)记录说他的衣着完全整洁，"但对上

* 译注：见中译本《电磁通论》下册 590 页和 592 页. 武汉出版社，1994 年.

浆的衬衣和手套等虚荣有天生的反感”. 而且对“毁坏任何东西——哪怕是一张写字纸也有一种虔诚的恐惧”. 他如饥似渴地读书，把大量时间用于数学思考，以及化学、磁学和光学实验. “他常在餐桌上出了神，完全忘记了吃饭，全神观察洗手指的玻璃盏中光的折射效应，或者用自己的眼睛做实验——从眼角看东西，把眼睛当成看不见的立体镜，如此等等. 凯小姐(Miss Cay，他的姑母)就时常叫他注意吃饭，说“詹姆西，你又进了题吧(就是说他进入了数学命题)”.

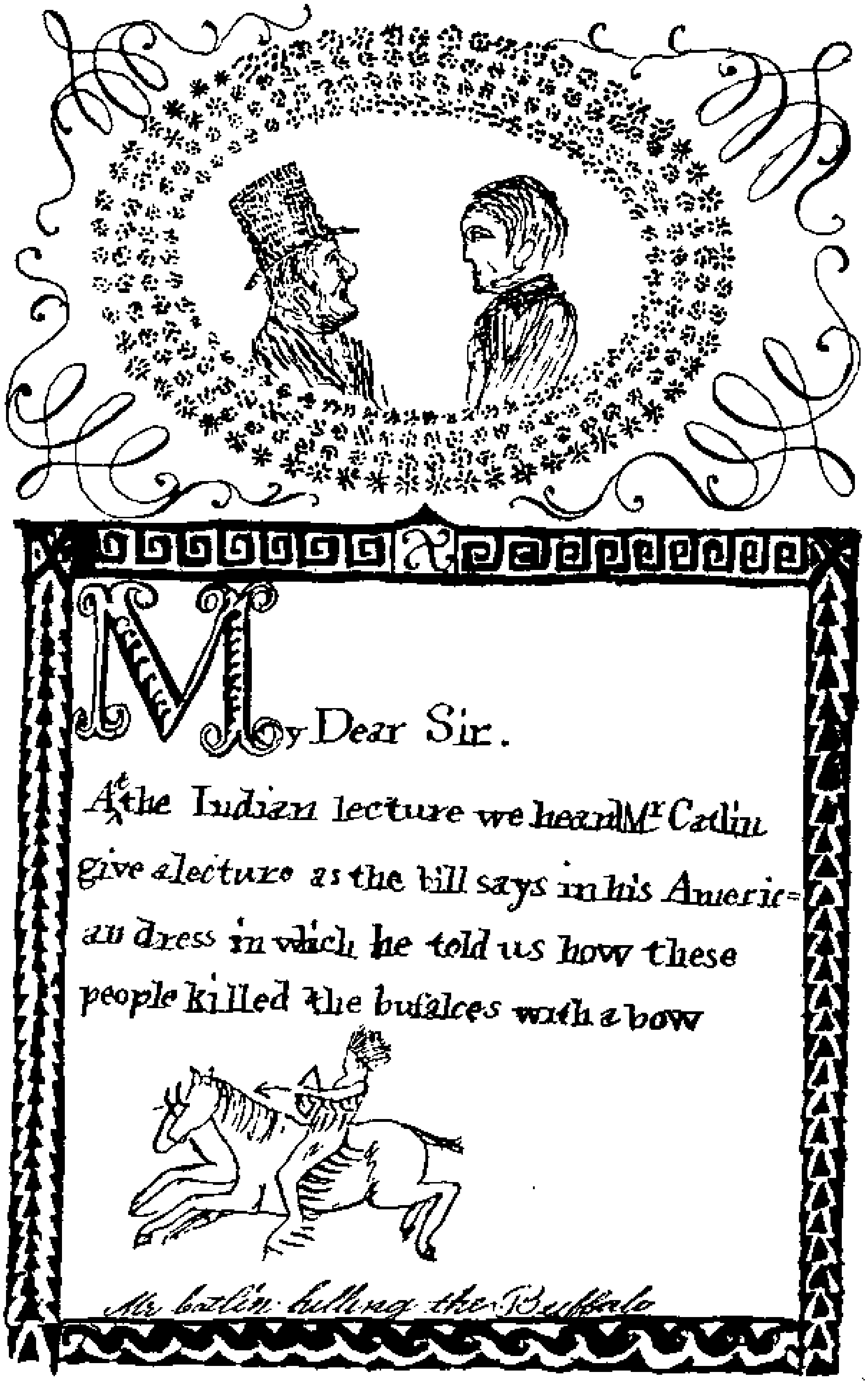
在爱丁堡时，麦克斯韦定期参加皇家学会的会议. 他的两篇论文“论滚动曲线”和“论弹性体的平衡”都发表在学会汇刊上. 论文是由他人代替在学会上宣读的. “因为让一个穿圆领上衣的少年登上讲坛被认为是不适当的”. 当他在格伦内尔度假时，他会给朋友们写长信报告自己五花八门的活动. 他的许多信表现了他对道德哲学浓厚的兴趣，反映了他的社会同情心，基督徒的热诚，理性主义和单纯的信仰的混合体. 在 19 世纪那是颇为常见的. 那是这样一个时代，人们相信可以在研究光学和力学的同时也研究智慧、幸福和美德这些问题.

1850 年麦克斯韦来到剑桥大学，成了霍普金斯(William Hopkins)的自费学生，霍普金斯当年被公认为当时最好的数学教练，他帮麦克斯韦参加数学 tripos 考试*，这是当时最出色学生参与竞争的严格的竞赛考试. 霍普金斯马上看出这个黑发苏格兰青年的才能，称他是“我所见到过的最出色的人.”又说“说他在物理学科中会想得不对，简直是不可能的事.”麦克斯韦除了奋力攻读外，还全部地参加了大学的社会活动和心智的活动. 他被选入“使徒会”，这是一个成员 12 人的俱乐部，多年来都是由剑桥出色的青年人组成. 一个同时代人这样描写麦克斯韦：“最亲切喜人的同伴，许多奇怪理论的提出者，许多智力游戏的创作者.”他有一个相当奇怪的关于睡眠的经济学的理论. 他从下午 5 点睡到 9 点半，从 10 点到凌晨 2 点苦读，再从 2 点到 2:30 在走廊里跑步和上下楼梯当作运动，再从 2:30 睡到 7 点. 同宿舍的人不高兴了，麦克斯韦照旧坚持这个奇特的实验. 再一项研究是关于猫何以总能四脚落地. 他证明了把一只猫背朝下从两英寸的高度落到桌子上或床上，猫也能转过身来四脚先着地.

1853 年夏，麦克斯韦患了一种“脑热”. 好几个星期完全不能动，而且后来很久还感到这场病的影响. 这个插曲无疑是一场感情危机，但其原因一直隐而未宣. 只知道这场病加深了麦克斯韦

---

* 译注：tripos 原意是三脚凳子. 这是一种起源于 18 世纪主要是数学考试的答辩会，当时参加者都坐在这种凳子上答辩、答辩者依成绩分为三类. 第一类称为 wrangler. Tripos 越来越受到尊敬，成为一种能力的考试，而得到最佳成绩的叫做 senior wrangler，是一种很高的成就. 许多 senior wrangler 中后来颇有一些人成了大数学家和物理学家，例如斯托克斯、凯莱等人. 到 19 世纪，许多其他学科也有了 tripos. tripos 分成两部分，应考者可以在不同年份分别通过这两部分考试. 但要得学士学位必须两部分都通过. 见 J. Mehra et al. *The Historical Development of Quantum Theory*. Vol. 4, p. 24, Springer, 1982.

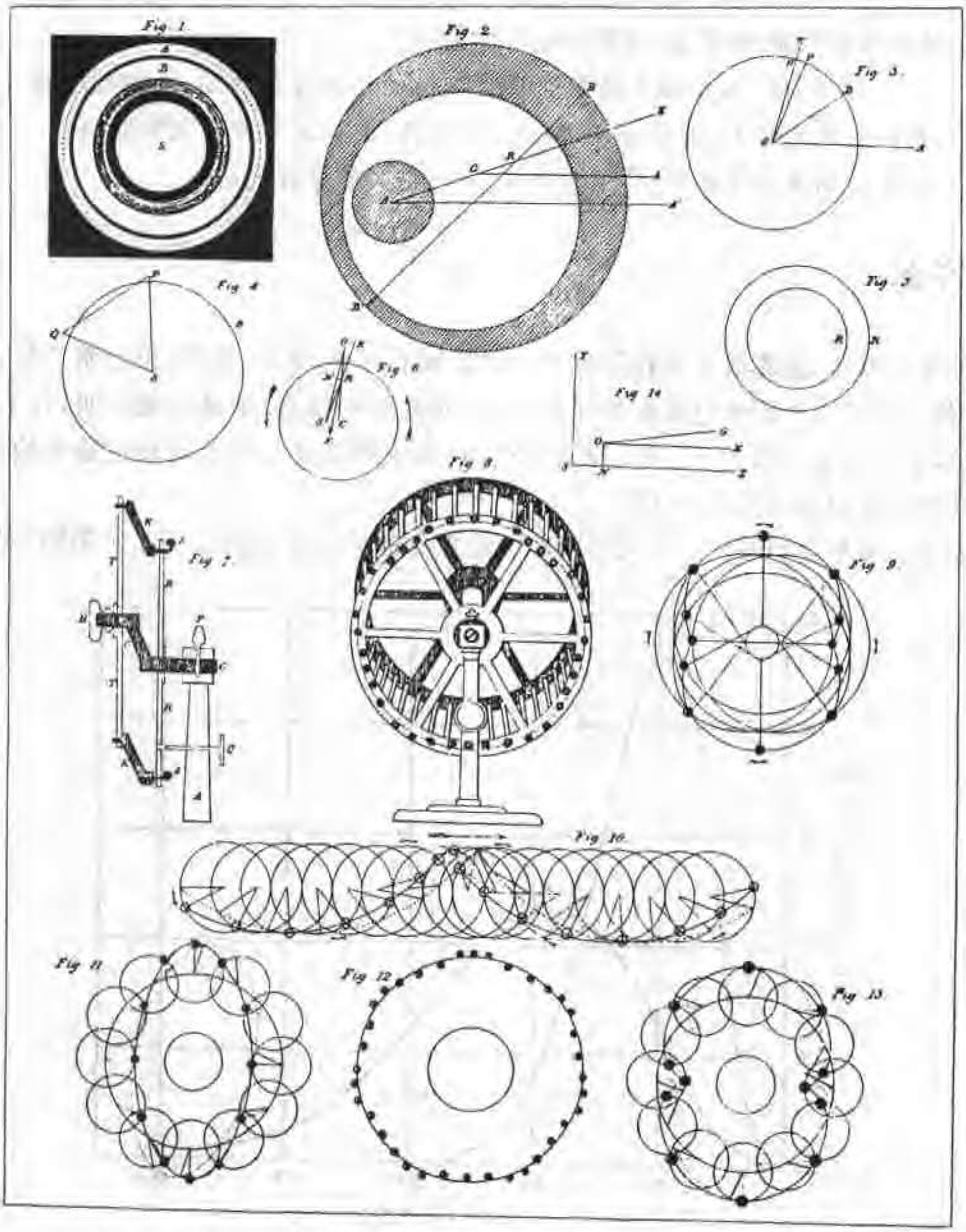


My Dear Sir.

At the Indian lecture we heard Mr Catlin give a lecture as the bill says in his Americ= an dress in which he told us how these people killed the bufalces with a bow

Mr Catlin killing the Buffalo

插图的信件，是麦克斯韦 1843 年写给父亲的，那时小麦克斯韦只 11 岁. 信中说到一位美国新边疆区艺术家凯特林(George Catlin)的演讲.



麦克斯韦的论文"论土星环运动的稳定性"中的一页，其中第 7，8 两图是他的力学模型. 麦克斯韦在这篇论文中证明，土星环既非液体又非固体，而是由颗粒组成.

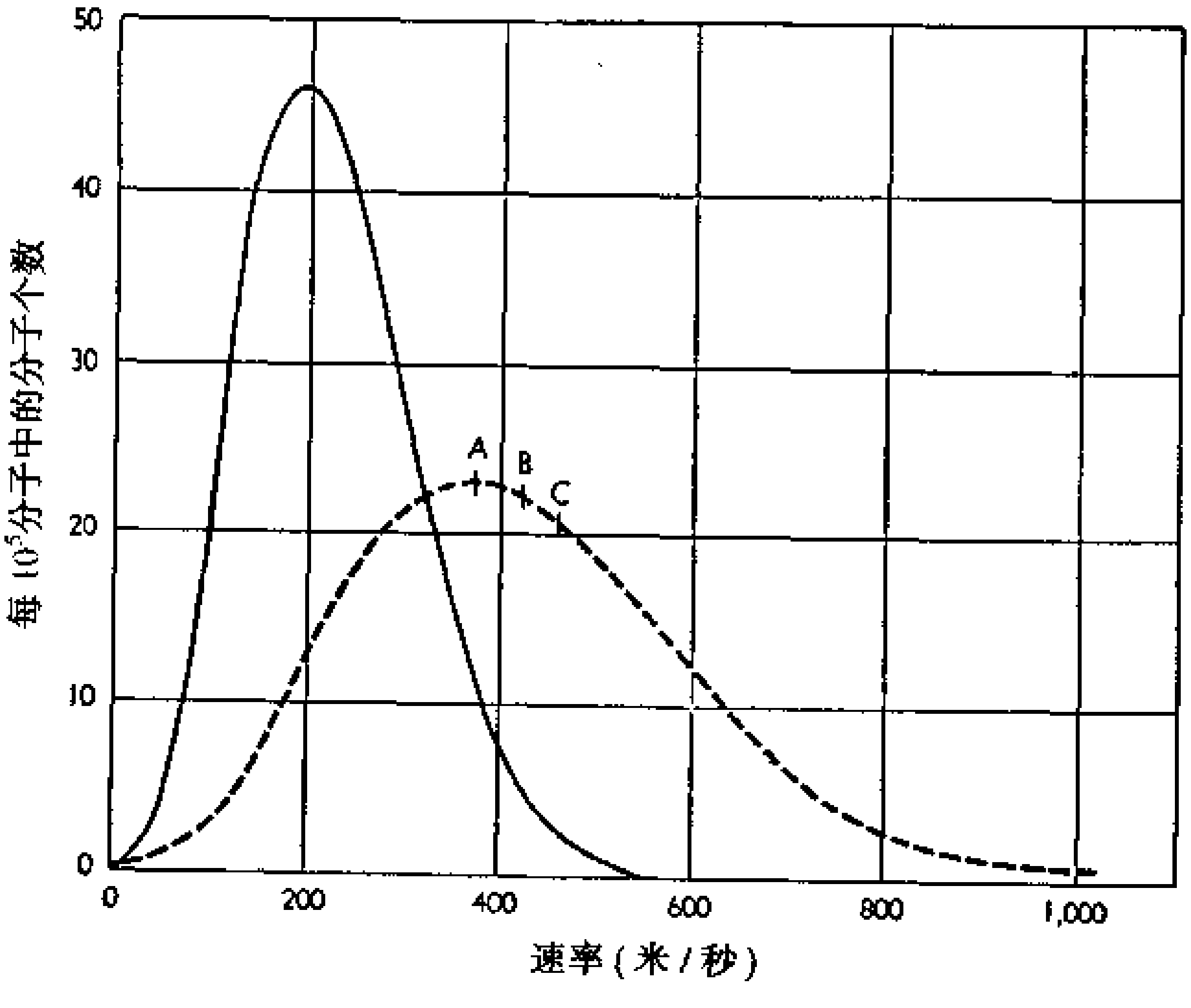
的宗教信仰——这是一种深沉的、热烈的虔诚，倾向于苏格兰的加尔文教派．但他从未完全皈依于某个特定的系统或教派．他常说"我嗅不出异端邪说"．

1854 年 1 月，麦克斯韦在剑桥上院参加 tripos，像他父亲建议的那样，用毯子裹住下肢减少刺骨的寒冷．他的头很暖和了．他获得 wrangler 第二名，次于著名数学家罗斯(Edward Routh)．(在剑桥另一次史密斯奖的竞赛中，科目更高深一些，他和罗斯并列第一．)

问题和答案

在得到学位以后，麦克斯韦又在剑桥三一学院呆了两年．研究，教课，带自费学生，还做一些光学实验．他设计了一个用彩色版做的陀螺，用来研究光的混合．他就此能证明，几乎对光谱上的一切彩色，适当配合三原色——红、绿、蓝，就能"接近得很好"．由于对彩色感觉的工作，他得到了皇家学会的伦福特(Rumford)奖．

然而麦克斯韦毕业后在三一学院的两年中最重要的活动是他研读了法拉第的《实验研究》，



气体分子的麦克斯韦分布．实线是温度 200℃ 时的曲线，虚线则为 0℃ 时的曲线．曲线上每一点表明在该温度下每十万个气体分子中按该速率运动的分子数．*A* 点是分子的最可几速率，相应于 *B* 点的速率是平均速率．相应于 *C* 点的速率是均方根速率．

由此进人了对电的研究，并终于得到了他的最伟大的发现. 在离开三一学院以前，他就已发表了“论法拉第的力线”这篇漂亮的论文. 1856 年麦克斯韦受聘为阿伯丁(Aberdeen)大学的马里沙尔学院(Marischal College)的自然哲学教授；他申请这一职位，部分是为了离他的健康日益衰退的父亲更近一点. 但在得到这个职位前的几天，他的父亲就去世了. 这对麦克斯韦是不可弥补的损失，他们一直是最互相亲近的父子. 麦克斯韦在阿伯丁继续研究电. 他的教学负担很轻. 虽然他教学认真，却不能说麦克斯韦是一个出色的教师. 对于“不太聪明”的班级，他觉得难以找到合适的进度. 他不能遵从他曾经给他的一位朋友的劝告，那位朋友要在乡村聚会上布道，他的劝告是：“为什么不能讲浅一点?”

由于一项工作，麦克斯韦在阿伯丁关于电的研究中断了几乎两年. 他参加了剑桥大学关于土星环的一项竞赛. 环是固体还是液体? 它们是由“互相不相粘合”的物质组成的吗? 问题是要证明，哪一种结构能充分说明这些环的运动和稳定性. 麦克斯韦写了一篇出色的长达 68 页的论文，证明了，只有由互不相连的颗粒组成，才是唯一稳定的结构. 对于这篇论文，当时的皇家天文学家艾里爵士(Sir George Airy)称赞其对数学的应用是他所见过的最引人注目的. 他的论文得了奖而且由此确定了他作为领先的数学物理学家的地位.

他对土星的研究引发了他对气体运动论的兴趣. 麦克斯韦在这个领域中的先驱者是克劳修斯(Rudolf Clausius)，伯努利(Daniel Bernoulli)和焦耳(James Joule)等人. 他们已经用气体是由快速运动的粒子组成这个假设，成功地解释了气体的许多性质：如压力，温度，密度等等. 但是他们为了简化数学的分析，都假设气体的所有粒子都以相同的速率运动. 麦克斯韦看出了这是一个全然不合理的假设，因为分子的碰撞将使它们的速度不同. 如果想在“严格的力学原理”之上来发展关于气体的科学，他说，就必须在表述粒子运动规律时，把这一点也考虑进去.

麦克斯韦的气体定律

麦克斯韦进而从数学上考虑碰撞粒子的总体的性态，而把粒子看作“小的、坚硬的、完全弹性小球，而只在碰撞时相互作用”. 由于有许许多多分子而不可能逐个考虑，他引进了统计方法去处理它们. 他假设气体的分子速率的分布服从著名的钟形频率曲线. 这曲线可应用于许多现象，从靶子上弹着点的分布到人们按身高来分组. 这样，尽管个别分子的速度很难描述，一群分子的速度却不是这样. 麦克斯韦在得到了组成气体的分子的速率之数学描述后，就能写出气压的精确公式. 说来也怪，这个公式和假设所有分子速率均相同时得出的公式完全一样. 但是这个正确的结论最终是由正确的推理得到的. 此外，麦克斯韦的数学方法之普遍性和优美使它被推广到物理学的几乎所有分支中.

麦克斯韦进而考虑为了准确表述气体定律所必须考虑的另一个因素:即分子在两次碰撞之间的平均的行走距离——即平均自由行程.他的推理是,一种气体的分子之平均自由行程可以用该气体的粘性来度量.假设气体是由一群群彼此不同速度的分子组成,这些群体彼此擦身而过,因此产生了摩擦.这就解释了气体的粘性.分子的平均自由行程和粘性的关系如下.设有分子所成的两层彼此滑动而过.如果一个分子由一层进入另一层只行走了很短距离就与另一分子碰撞,这两个粒子不会交换太多的动量,因为在两层之间的边界附近,速度之差不会很大.但若分子深入到另一层之内才有碰撞,速度差就会大一些,因此碰撞粒子交换的动量也更多.这就相当于说,在粘性更高的气体中,分子必有较长的平均自由行程.麦克斯韦进一步还导出了一个似非实是的事实,即粘性与气体密度无关;因为在更密的气体中碰撞的概率必更大这个事实被另一个事实抵销了:即在这种气体中分子进入另一层中不远就会发生碰撞.平衡起来,每秒时间通过单位面积传递的动量仍是一样的而与密度无关.

麦克斯韦这样构造了气体的数学模型:气体是许许多多"各自带有自己的动量与能量"的熙熙攘攘的粒子.行走一段距离,然后碰撞,改变了速度再继续行走,如此以往.他的这一图像使得能用精确定量的语言考虑气体的种种性质——粘性,扩散,热传导.总的说来这是第一流的科学成就.后来这个模型受到了种种批评.例如,指出分子并不是像台球那样坚硬的完全弹性体,它们的相互作用也不仅限于在碰撞的时刻才有.然而,尽管模型有不足之处,推理也有毛病,但是它的结果,正如琴斯爵士(Sir James Jeans)说的,"本应当是完全毫无希望地错了",却是精确地正确的.麦克斯韦关于气体性态的定律直到今天还在使用.

奥地利*物理学家波尔茨曼(Ludwig Boltzmann)立刻看出了这些发现的意义,并着手来改进和推广麦克斯韦的证明.他证明了麦克斯韦的速度分布是气体唯一可能的平衡态.他们二人都认识到,平衡态就是最大熵的热力学条件——最大熵即最无序的状态,能转化为有用功的能量最少的状态.

熵的概念引导麦克斯韦作出了现代科学最有名的形象之一,就是那个会分检的精灵**.因为人不够聪明,熵的增加就成了人的命运.但是一个精灵会更有天赋,能够把气体中动得慢的和快的粒子分检开,这样变无序为有序,变无用能为有用能.麦克斯韦设想有一个小精灵"负责一扇无摩擦的滑门,这门开在一个充满气体的容器的隔墙上.如果一个快运动分子自左向右而来,精灵就会开门;慢运动分子过来,精灵就把门关上.于是快运动分子聚集在右方室内,慢分子则在左边.第一室内的气体变热,第二室的则变冷."小精灵这样就阻挠了热力学第二定律.有人提出,

* 译注:原文误为德国.

** 译注:这就是著名的"麦克斯韦妖".

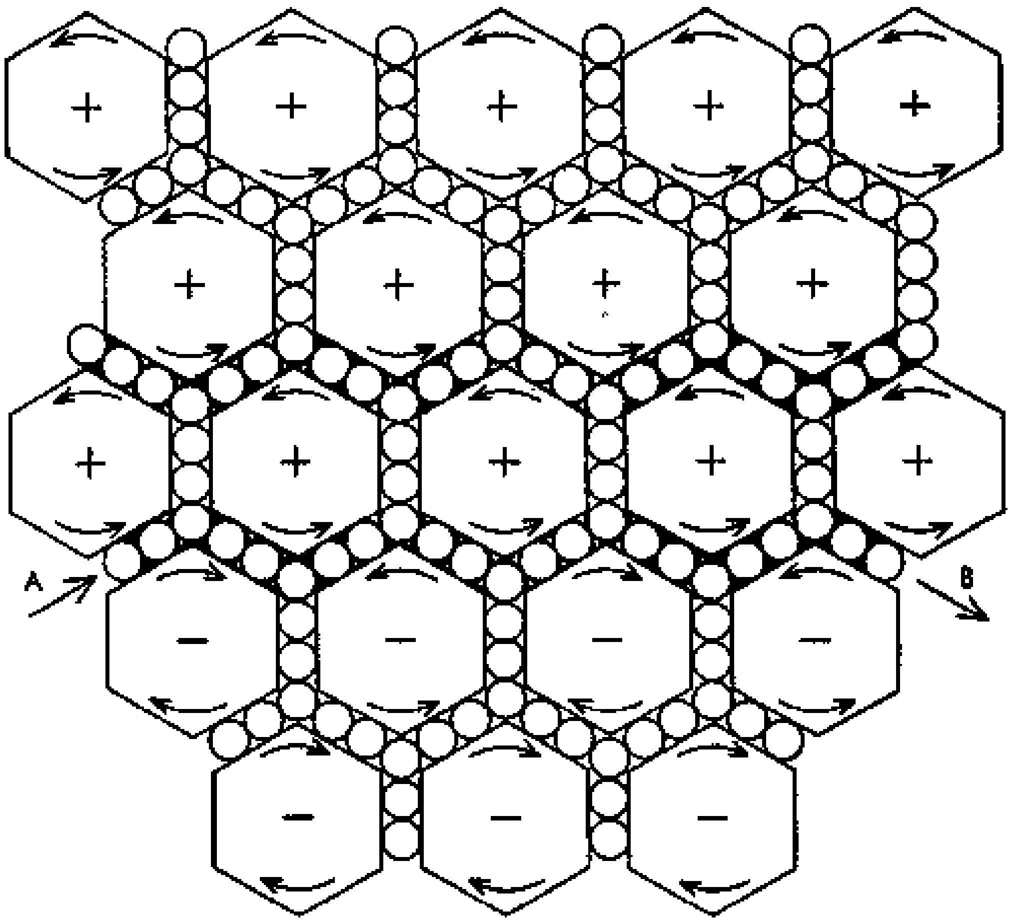
有生命的机体能做到类似的过程;按照薛定谔(Erwin Schrödinger)的说法,它们通过吃的食物和吸的空气,从环境中吮吸负熵.

麦克斯韦独立地工作,友好地竞争,一开始在用统计力学解释气体性态上取得了可观的进展.然而,一段时间以后就产生了难以克服的困难.例如,他们写不出某些气体比热(即使一定量气体温度升高一定量所需的热量)的准确的理论公式.要解释他们发现的理论与实际的矛盾,有待于量子理论的发展,它表明分子的旋转和振动只能取一定值.但是,如果没有这些自然哲学家用统计方法研究气体的光辉的工作,不论是量子理论、相对论还是构成20世纪物理学革命的其他的思维方式,都是不可能的.

婚 姻

1858年2月麦克斯韦写信给他的姑母凯小姐:"这封信是报告我将要娶妻了."他又说,"别害怕,她不是以数学为生.但还有一点要说,她肯定也放不下数学".新娘是杜尔小姐(Katherine Mary Dewar),马里沙尔学院院长的女儿.他们的结合十分亲密:他们为共同做一切事而感到幸福——骑马,为对方朗读,旅行,甚至在实验中也给她找到有用的事来做.他们没有子女,但这件事更使他们相互依恋忠诚不渝.

1860夏,麦克斯韦转到伦敦任国王学院自然哲学教授.他在伦敦住了五年.住在伦敦使他多少有机会可以见到法拉第,过去他一直只与法拉第有书信往返,还可以结识别的科学家.他不是离群索居的人."工作是好的,读书也是好的,但是朋友更好",他这样写信给他的朋友李奇菲尔德(Litchfeld).尽管在国王学院有社会活动分心,教学任务又重,在伦敦的五年是麦克斯韦一生中最多产的时期.他还继续做关于气体的研究.他



麦克斯韦的电磁场模型的形象是在空间中旋转的"分子旋涡".图中的分子旋涡都是很细的柱体从一端看去的剖面.(麦克斯韦给这些柱体以六边形断面是为了简化其几何形状.)旋涡之间有小"滚珠".如果一列小滚珠由 A 运动到 B,就使相邻的旋涡按反向旋转.

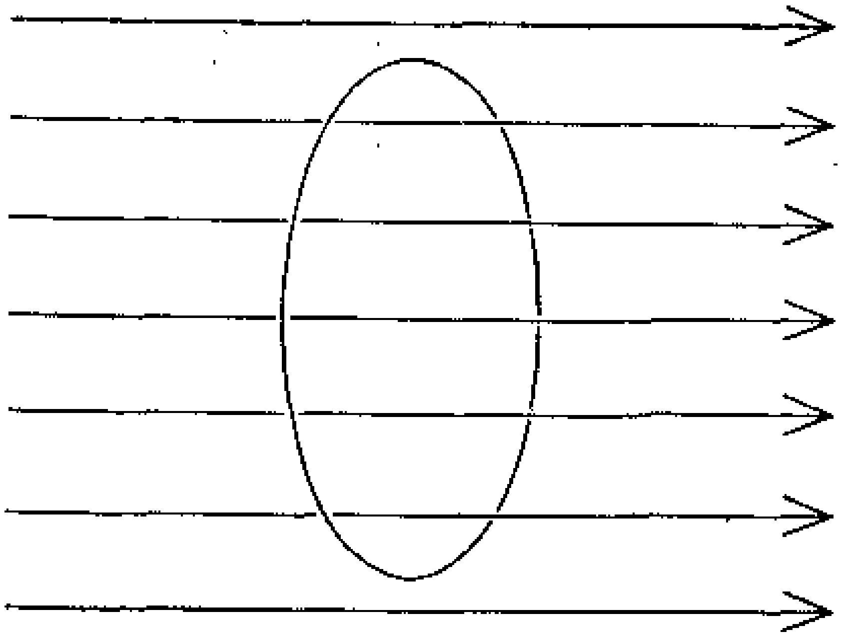
在肯星顿(Kensington)寓所的大阁楼上测量气体的粘性,得到了理论工作的实际验证.(为了保持必要的温度,在炎热的盛夏房里还要点火,还要让水壶一直沸腾着保持有水蒸汽流入室内.麦克斯韦夫人权充锅炉工).但他主要研究电的理论.过去他曾做过这项研究,现在又回到这个问题上来了.

电的模型

法拉第的实验是一个世纪的研究的高峰(研究者有库伦(Coulomb),奥斯特(Oersted),安培(Ampère)等人).这些研究确定了关于电的性态及其与磁的关系的许多事实.他们证明了,电荷按照一个与引力相似的定律而彼此吸引或排斥(与电荷之积成正比而与两个电荷之距离的平方成反比);电流产生磁场,而运动的磁针产生电流;一个线圈中的电流会在为一个线圈中感生出另一个电流.

最吸引麦克斯韦的是力求解释这些现象.什么是场?电和磁怎样穿过空间以施加其影响,法拉第提出过一个新概念来回答这个问题.而正是他的思想激发了麦克斯韦的兴趣.

大多数理论家都追寻电与引力的相似,并力求用"超距作用"来解释种种现象.他们想像,位于空间一点处的电荷(质量)可以神秘地影响另一处的电荷(质量),而两个电荷(质量)之间没有任何种类的联结.法拉第提出把电解释为一种力学系统.他断定电和磁的作用的媒介是穿过空间的力线——这不是设想的线,而是真正的物理实体,具有张力、吸引、排斥、运动等等性质.



本图表示麦克斯韦方程中的旋度.箭头是运动的磁场.圆则是"旋着"绕过磁力线的电场.

麦克斯韦令人钦佩地概括了两种观点的对立:"法拉第用他心智的眼睛看见了穿过整个空间的力线,而数学家们看见的则是力的中心超距的吸引;法拉第看见了媒介物,数学家除距离以外什么也没有看见;法拉第着眼于真实作用的现象之舞台即媒介物,数学家们则满足于把超距作用强加于电流体上".

麦克斯韦相信法拉第的概念并着手发展它.他在第一篇论文"论法拉第的力线"中试图设想一个能体现法拉第的力线的物理模型,把力线的性态化为公式和数.他并没有说这个模型代表了事物的真实情况,但是他感到"重要的是掌握一个清晰的物理概

念，而不再束缚于一种基于已有的物理科学的理论，并且由此理论得出概念”. 这一种方法能保护研究者不被引入抽象化的死胡同，也不致“被一个自己偏好的假设带离了真理”.

麦克斯韦提出了一个流体力学模型，其中法拉第的力线组成“流管”之形，其中有水那样的不可压缩液体. 在管中运动的液体就表示运动中的电，管的形状和直径会给出关于诸如流的强度和方向的信息. 液体的速度等价于电力；液体的压力差类似于电压或电位差；压力通过弹性的管壁由一个管向另一个管的传播给出了电感的类似物. 麦克斯韦把已经确立了的流体力学方程应用到这个系统上，就能解释关于电的许多已观察到的现象.

这是一篇出奇的论文，法拉第表示了赞赏. 他给麦克斯韦写信说：“我一开始几乎被震惊了，我看见对这个主题用了如此的数学力量，然后奇怪这个主题竟能如此完善地适合这种数学力量”. 然而别的研究电的学者则觉得主题并不能那么好地适合这种数学. 电已经够神秘了，何况还要加上什么管子，什么不可压缩流体. 但是麦克斯韦对于被人看成怪人早已安之若素了，他继续进行推广法拉第的思想的工作.

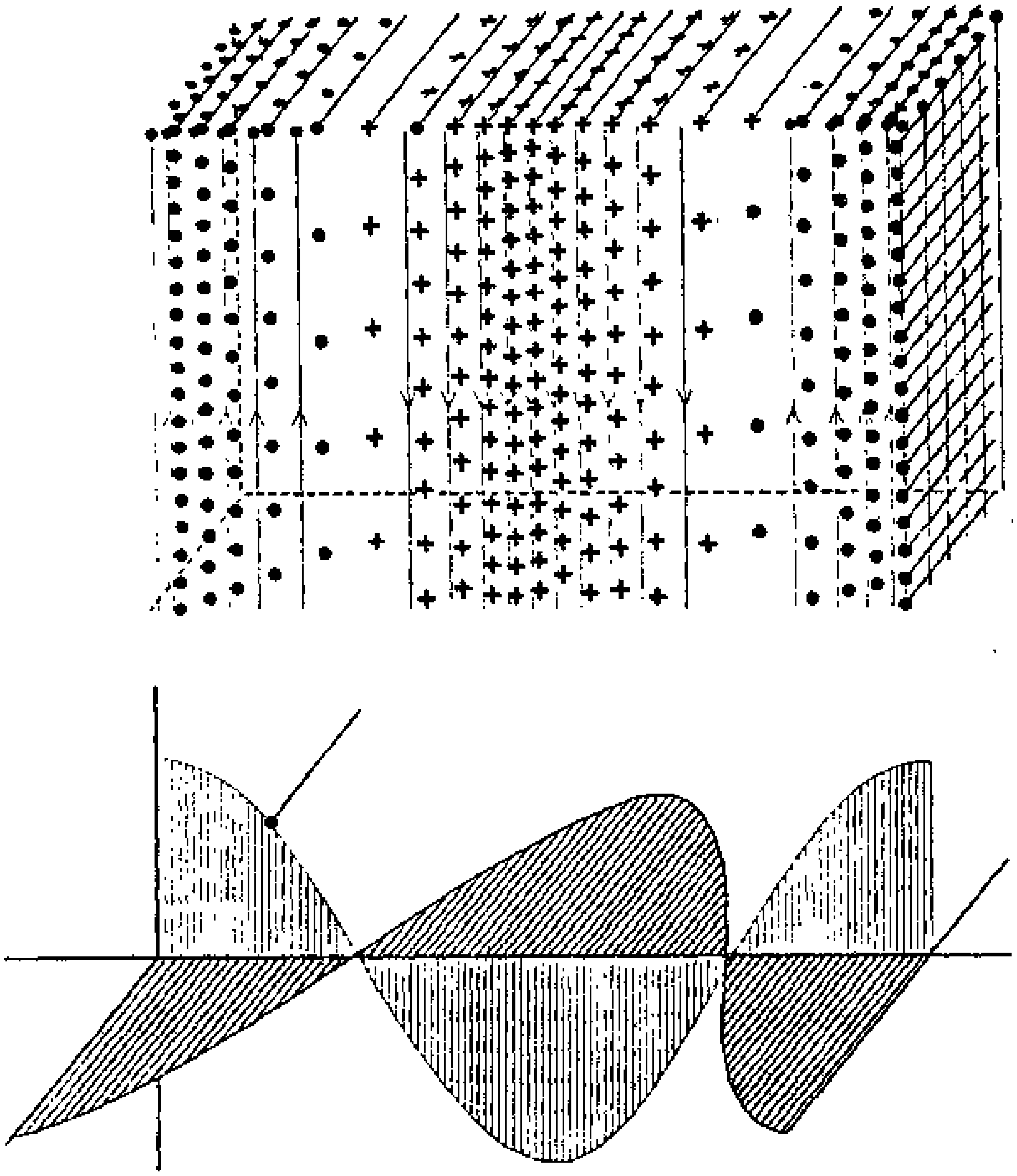
柱与球

麦克斯韦在伦敦回到电的问题后的第二篇伟大论文“论物理的力线”发表了. 他现在构造了一个更精巧的模型，不仅能解释静电效应，还能解释磁引力和电磁感应. 在这个新模型中，在空间中旋转的“分子旋涡”是产生磁场的要素. 一个分子旋涡可以想成是一个绕磁力线旋转的细柱形. 旋转的速度依赖于磁力的强度. 有两个力学效应与柱形有关：一是力线方向的张力，一是由旋转的柱形之离心力产生的侧压力. 这些效应合起来就可以力学地再现磁现象：磁是一种既沿轴向也由轴向外作用的力.

麦克斯韦进而说明这个奇怪的安排怎么能说明电流产生磁场以及变动的场产生电流. 他先假设均匀的磁场是空间的一部分，其中填满了“绕几乎平行的轴”以相同速度和顺时针或逆时针 * 方向旋转的柱形. 但是他马上就遇到了一个困难. 这些柱都是互相接触的，怎么能同按逆时针方向或顺时针方向旋呢？人人都知道，一个旋转的轮子或柱都会使相邻的轮子或柱按相反方向旋转. 麦克思韦突然得到一个奇妙的想法. 他假设有一排小球位于柱形之间好像一层球轴承一样，它们起齿轮的作用(麦克思韦称为“懒滚珠”). 这样一来，所有的柱形都可以按同一方向转动了.

现在，麦克斯韦的天才得到公正的回报了，他发现这些小球还可以起一个更有价值的作用.

* 译注：为清楚起见，译者加上了“顺时针”“逆时针”这字样. 如有不当应由译者负责.



电磁波在麦克斯韦是看成一种运动着的扰动,它倾向于把正电荷(+号)与负电荷(·号)分开.上图中磁力线(箭头)与扰动传播方向垂直.下图画出了电磁波的两个成分.深色的是电的成分,浅色的是磁的成分.

把它们想像为电的粒子.然后用纯粹力学推理可以证明,小球作为这部机器的部件,它们的运动能说明许多关于电的现象.

考虑一些例子.不变磁场中所有柱形都以同样速率旋转.小球也会旋转但是位置不变;没有粒子的运动所以没有电流.现在设磁力有变化*.这意味着柱的转速有变化.当一个柱被加速时,

* 译注:第 107 页图上最下一排三个柱形和倒数第二排有两个柱形旋转方向与其他柱形不协调.

它就会把速度的变化传给相邻的柱. 但因现在一个柱的速度与相邻柱的速度稍有不同，它们中间的小球就会受到一种剪切作用而被拉离原来的位置. 粒子的这种平移就是电流.

现在要注意，这个模型怎样自己活起来了. 设计它本来是为了说明变化的磁场如何产生电流，它现在回过头来向麦克斯韦建议了一种电力的变化可以产生磁力的机制. 设球和柱都是静止的. 有力作用于表示电的小球，使它们运动，则与它们接触的表示磁的柱也就开始旋转，从而产生磁力. 此外，这个模型到细节都是对的. 举一个例. 检查一下麦克斯韦的模型，就会看见柱将在垂直于球运动的方向上旋转，这样符合于所观察到的磁场的作用力垂直于电流这个事实！

"我并不是把它提出来，"麦克斯韦关于他自己的系统这样写道："作为存在于大自然中的联系的模式……然而，它是一种在力学上可以想像而且便于研究的联系的模式，它可以用于把已知的电磁现象的真实的力学联系找出来". 除了其他的"力学联系"外，麦克斯韦能证明两条平行的，其上各有相反方向电流的导线之间必有电斥力（在此模型中，这个效应归之于旋转的柱对于电粒子的离心压力），还能证明电流的感应（这是旋转速度由一个柱传递到另一个柱的结果）.

有了模型麦克斯韦的事还没有完. 它还没有通过最高的检验：即给电磁波的起源以力学的解释. 为使在这类事情上我们能有路可循，我们必须简短地考查一下电容器和绝缘体的问题.

法拉第在他的实验中碰上了一件奇怪的事情. 用在电容器中的绝缘材料的类型对电容器容纳或保持电荷的能力有相当影响. 如果所有绝缘体对电流都有相同的不可穿透性，这就很难理解了. 麦克斯韦借助于他的模型提出了一个大胆的假想. 在绝缘材料中，电的小粒子不知为什么不能由一个柱形自由地向另一个柱形运动；所以不会有电流. 然而，在绝缘体中确有"局部电现象"产生，这又是已知的. 麦克斯韦提出这些现象是一种特别的电流. 当电力作用在绝缘体上时，电的粒子受到"位移"但是没有被拉松；换言之，它们的行为就像是大风暴时锚泊了的船一样. 它们只能移动一个有限的距离，直到推动它们的力被弹性柱的阻力平衡为止. 一旦推动力停止作用，电粒子马上就冲回原来位置. 粒子反冲过度，就会在其固定位置处振动. 这个振动将成为一个波在绝缘体中传播. 这样在很短的瞬间会出现位移电流，波就是电流. 如果作用到绝缘体上的电力不断变化，就会产生不断变化的位移电流：换言之，将连续地有电流.

麦克斯韦由此得出划时代的结论. 就是关于位移波或位移电流的速度与光速的关系. 关于它的出发点，我们要回到德国的物理学家威伯（Wilhelm Weber）与柯尔劳什（Friedrich Kohlrausch）关于静电力与动电力关系的早年的工作. 电荷的静电单位定义为两个同样单位电荷相距单位距离时的斥力. 动电单位则定义为两个载有电流的一定长导线之间的斥力，电流则由"单位时间内通过一定点的电荷量来确定."为了比较静止电荷与运动电荷的斥力，因为二者单位不同故必须引入一个比例因子. 这个因子应是速度，因为导线的长度是固定的，而在一固定时间内通

过定点的电量又是可以测量的，研究者必须考虑的就是长度除以时间，即速度.威伯和柯尔劳什发现，电扰动在完全导电的导线上的传播速度接近 3×10^{10} 厘米/秒.这是令人震惊的巧合，因为这个数字与不多年前才测定出来的光速差不多相同.

麦克斯韦沿这个巧合追寻下去.他先亲自验证了威伯—柯尔劳什的结果：他用一个灵巧的扭秤来比较两个静电荷间的斥力与两根有电流通过的导线间的斥力，同时又计算了电介质（即非导体）中位移电流的速度，所得的值吻合得很好.换句话说，导线中的电流，电介质中的位移电流，与真空（它当然也是介电的）中的光，都以相同速度行走.有这个证据在手，麦克斯韦毫不迟疑地断定，电扰动和光这两种现象是同一的."我们很难避免作出一个推论，"他说"即光就是同一种介质中的横振动，这就是电磁现象的根源."

麦克斯韦方程

麦克斯韦现在必须要超过自己的模型了.在发表于 1864 的论文"电磁场的动力学理论"中，他展示了他的系统的结构，正如惠塔克爵士（Sir Edmund Whittaker）说的："他拆掉了建造这个结构时用的脚手架".小球和柱形都不见了，代之而来的是场和以太，后者是一种特殊的"运动中的物质，我们所观察到的电磁现象由此产生."构成以太的物质有很了不起的性质.它非常细，能穿透一切物体；它作为一种弹性介质充满了空间，"它是光和热的振动的载体."

以太尽管对它已作了许多改进并且十分微妙，仍然和柱形及小球一样只是一种力学的装置.它能动，它能传递运动，它能经受弹性形变，它能贮藏位能（机械能），并在形变压力解除时把能量又释放出来.作为一种机制，麦克斯韦说，"它必须服从动力学的一般定律，而且只要我们知道其各部分的运动之间的关系，就应该得出其运动的全部后果."他在从事这个工作时，制定了关于电磁场的著名的麦克斯韦方程.其最完善的形式见于他所著《电磁通论》*，这是他二十年思考与实验的成果.

麦克斯韦的方程基于四个原理：(1)作用在导体上的电力产生一个正比于此力的电流；(2)作用于电介质上的电力产生正比于此力的位移电流；(3)电流产生垂直于流线而正比于其强度的磁场；(4)变化的磁场产生正比于场强度的电力.第三和第四个原理有令人瞩目的对称性.第三个就是法拉第的电磁感应定律，它指出，"穿过一个线圈的磁力线的数目之变化率等于令单位电荷在此线圈上行走一周所需作的功."麦克斯韦与之相补的定理，即第四个定律则说："通过

* 译注：有中译本，《电磁通论》上，下.武汉出版社，1994 年.

一个线圈的电力线数目之变化率等于令一单位磁极绕此线圈一周所需作的功."

在这个基础上可以建立起两组互相对称的方程.一组表示电场与磁场的连续本性;第二组指出一个场的变化如何产生另一个场的变化.

场的概念是怎样进入这个理论的呢?我们已经看见麦克斯韦怎样从他的模型剥去了小球与柱形而化成了以太介质.现在他又从介质身上剥去了几乎一切属性,余下的只有形式了.现在,它的性质全是纯几何的了.笑容还在,猫却走了.* 这是数学抽象的完美的例子.

以太是这样一种东西;你刺一刺,它就颤一颤,自己却什么别的动作也不做.电磁场中有两类能量:静电能即位能和动电能即动能.以太贮存能量好像一个万有的电容器,它是弹性的,贮存了能量就会变形.因为以太充塞全部空间,所以既穿透导体,也穿透电介质。不论处理传导电流还是位移电流,对它都是一样,总之以太就会运动.这个运动就会按力学方式从介质一部分传到另一部分,我们就会感受到热、光、机械力(例如导线之间的斥力)和其他电磁现象.应该注意,统帅这一切现象的原理就是最小作用原理.这是大自然的包罗一切的节俭性的伟大原理:一个系统中的每一个作用都是消耗最少的能量来完成的.电现象应该满足这个原理,这对麦克斯韦有第一等重要性,否则他对这些现象的力学解释就会是不可能的.

散度和旋度

上述各点在胸,我们就可以来考查描述无电荷、无电流的这一部分空的空间中电磁场性态的麦克斯韦方程了.没有导体与自由电荷;场的源在空间的另一部分中.

第一个方程是

$$\mathrm{div}\mathbf{E}=0.$$

E 是电场强度,它依时间地点变化. div 是散度的记号.它是一种表示变化率的数学运算.这方程说,进入空间任意小一块的电力线数目(即场强)必需等于离开它的电力线数目.即电力线数目的变化率为 0.电力线既不能创造,也不能消灭.

第二个方程是

$$\mathrm{div}\mathbf{H}=0.$$

它对磁场 **H** 作出了如第一个方程对电场作出的同样论断.

---

* 译注:作者在这里引用了《阿丽思漫游奇境记》中一段有名的故事:阿丽思看见猫在树枝上对她笑,后来,猫慢慢地隐去了,树枝上只留下猫的笑容.

第三个方程是

$$\mathrm{curl}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}.$$

这是麦克斯韦对法拉第电磁感应定律的描述：它描述了变化的磁场会发生什么. $\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$只不过是表示磁场的时间变化率. 变化的磁场会产生一个电场，这一点表现在方程左方，其中的"curl"是一种处理旋转的数学运算. 这个方程不止是一个数学分析的式子；它确实给出事件的图景. 一个简单的图就能帮助把它弄清(见108页插图)设在空间的一个区域中有均匀的磁场. 用一束平行线表示此场的强度与方向. 如果这个磁场发生了变化(或因运动或因强度的增减)，就会产生一个电场，它作用于围绕这些磁力线的圆上. 若此电场驱动一个单位电荷绕圆圈一周，它就会作功，称为绕此圆的净电动势. 如果这个圆是由导线做的，变动的磁力线当然会诱导出电流；但是即令没有导线，仍然会诱导出一个力. 用圆所围成区域的面积去除这个力，就得出(单位面积的)净电动势，它绕着这个圆"旋". 现在想像这个圆越缩越小最后缩成一点 P. 在极限过程中将得到单位面积的净电动势的极限值：称为电场 $\mathbf{E}$ 的旋度，这就是 P 点处的 curl$\mathbf{E}$. 所以，这个方程就是说，在 P 点的单位面积净电动势的极限值，等于在 P 点的 $\mathbf{H}$ 的变率，除以一个很小的负分数 $-\frac{1}{c}$. c 代表电荷的静电单位和电磁单位的比值. 之所以需要它，是为了把 $\mathbf{E}$(这是静电现象)和 $\mathbf{H}$(这是动电现象)化到相同的单位系统. 这个方程解释了何以麦克斯韦能把电和磁现象与光速联系起来，因为 c 事实上就是光速.

最后一个方程是

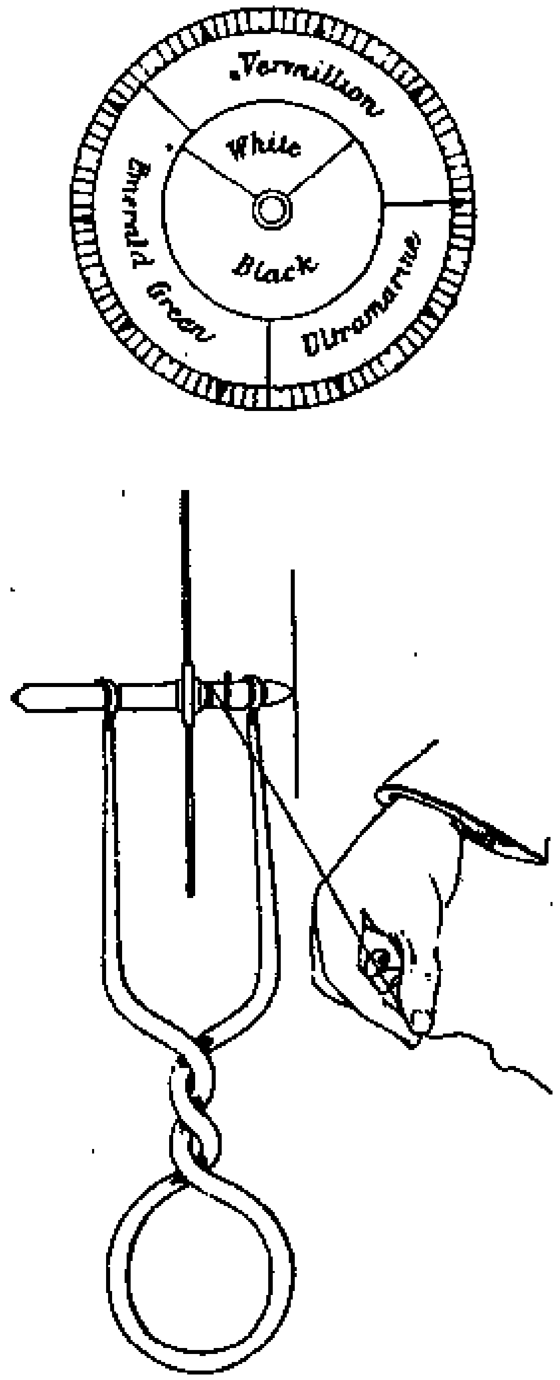
$$\mathrm{curl}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

它说，除了相差一个符号以外(这与场的方向有关)，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 在第三个方程中的作用可以倒过来. 在任意地点和时刻，由变化的电场产生的单位面积的磁力，等于电场的时间变化率乘以一个小分数$\frac{1}{c}$. 这个时间变率恰好是麦克斯韦的位移电流. 因为现在一切变化都发生在一种电介质中，这种电介质就叫做空的空间，所以，可能有的电流就只能是位移电流. 在麦克斯韦以前，都认为磁场只能由导线中的电流产生. 麦克斯韦用力学方法从他的模型导出了一个伟大发现，又用数学方法用方程来表示了它，即随时间变化的电场甚至在绝缘体或空的空间中也会产生磁力.

按照麦克斯韦的理论，在电介质中引入时变的电力就会产生具有光速的位移波. 这个周期的电位移波必由周期的磁力伴随着. 波前本身就是与传播方向成直角的电振动，而磁力又与电位移成直角. 电位移和磁力的振动合在一起故称为电磁波. 光波(作为一种位移波)，正如庞加莱

(Henri Poincaré)后来详细说明的，就是“一系列交变电流，它在电介质中，在空气中，或在行星际空间中流动，而每秒钟变换方向 10^{15}=1 000 000 000 000 000 次. 这种急速的变化的巨大感应效应，在相邻的电介质中产生其他的电流，光波就是这样由一处传到另一处.

光的电磁理论可以用实验来检验，而在实验室的试验中极好地经受了检验. 还可以用其他方法验证. 如果他的推理是正确的，不同的扰动源就会产生频率与光波不同的电波. 它们是看不见的，但可以用适当的仪器侦查出来. 麦克斯韦在世时没有看到这种电磁波的发现，但在他去世后十年，赫芝取得了证明其存在的竞争的胜利. 他用一系列光辉的实验成功地生成了无线电波. 他结论说：“关于光与电之间的[联系]，……在[麦克斯韦的]理论中有提示，有猜想，甚至有预言. 现在已经确定. ……光波不再只限于波长很短的以太波，其波长只有一毫米的很小一部分；它的领域被推广到波长为分米、米，甚至千米. 而尽管有了这样的推广，仍只是……伟大的电的领域的小小附属物. 我们看到，后者已变成了一个强大的王国.”



色轮图示于麦克斯韦“眼睛所觉察到的色彩的实验，并论色盲”这篇论文中. 上图就是色轮. 下图是使它转动的装置.

建设工程

麦克斯韦是在他“息影”于格伦内尔时完成电磁理论的伟大工作的. 这只动用了他一部分能力. 这一个时期的“副产品”是，他写了一本关于热的教科书，一些关于数学，色彩视觉和其他物理问题的论文. 他写了大量关于科学和社会的书信，扩大了房屋，研究神学，写歪诗，骑马，带着狗作长长的散步，看望邻居，和他们的孩子玩，还时常去剑桥作数学 tripos 考试的协调人和主试人.

1871 年在剑桥设立了应用物理教席. 很难想像，当时在那里连热学、电磁学的课程都没有开，也没有实验室来研究这些神奇的东西. 正如一位当代学者细致地描述的：剑桥大学与“墙外的伟大科学运动失去了联系.”教授们的一个委员会起来激励自己，发出了报告. 这些可悲的事实被德文郡公爵(Duke of Devonshire)即当时剑桥大学校长，注意

到了.他拿出钱来建设和装备了著名的卡文迪希实验室.麦克斯韦本不愿离开格伦内尔,但经不起朋友们坚请,成为这一职位的候选人.他立即当选.

他现在用全力来筹划与监督实验室的建立.他的目的是使它成为同类中最好的机构,有最新的设备和对研究工作最好的安排.他把自己所有的仪器都捐赠给实验室,还慷慨捐资以补充公爵的礼物.要管的具体事务这么多,所以实验室的建造和人员安排到1874年才完成.这种迁延虽难避免,却造成许多不便.麦克斯韦写道:"我没有一个窝来安自己的席位,只有像杜鹃鸟一样四处游荡.第一学期在化学教室里安放自己的概念,春季学期放在植物学教室里,到复活节学期又转到比较解剖学".他说的"概念"就是他教的热学,电学和电磁学课程.

麦克斯韦的经典著作《物质与运动》是"关一个伟大主题的小书",出版于1876年.此时他还为大英百科全书著名的第九版写了"原子","以太","引力","法拉第"这些条目.他的公开演讲包括引人入胜的讲话"关于电话".作讲演时他虽已重病在身,却不仅像他最好的讲演一样清楚,而且充满了欢乐和使人愉悦.在讲到贝尔(Bell)教授的发明时,他是这样评论的:"整个装置有完美的对称性,中间是电线,电线两头各有一个电话听筒,听筒两头又各有一些废话".麦克斯韦花了五年时间编辑卡文迪希(Henry Cavendish)的20包未发表的科学论文.这部光辉的两卷集发表于1879年,大大确定了这位极有天赋的18世纪研究者的名声.卡文迪希关于电的工作,他的同时代人都不知道,因为仅存于手稿中.麦克斯韦重复了卡文迪希的实验,说明他已预见到关于电的主要发现,包括欧姆定律.

格伦内尔

当麦克斯韦一天天衰老时,朋友们却谈到他的精神"日益清醒".他照样去看他的朋友,写游戏诗文,溜他的狗托比(Toby),开一些小小的实际玩笑.但他多少有些沉默了,或多或少地把自己的感情和思想藏在讥刺的外表之下.他本性的坚强的、理性的,苏格兰式的常识的弦总是与神秘主义的线相交织.他对科学有信仰,但是对于只靠科学能对大自然和终极的意义学到多少又是怀疑的.他的同代人描写他既谦虚又在心智上蔑视世人,在科学的意见上多有商量,而对于他觉得不谦虚自重的人则是独断的.

麦克斯韦的特性中最引人注意的是他的和顺.对待他接近的人,非常无私是他的特点.当他的内弟来伦敦做手术时,他把自己房子的底层全让给病人和护士,自己住到一间房子里,小得时常要跪在地上早餐,因为房子小得放不下一张桌子一把椅子.在麦克斯韦一生最后的年代里,他的夫人一直重病绵延,他一直看护着夫人.有一次据说三个星期不能上床睡觉.但是他工作如

常，而且表现愉快，好像是以严酷考验为乐——当时确是严酷的考验. 当他自己身患绝症时，他也没有露出丝毫沮丧与自怜.

1877 年春，他开始感到吞咽时痛苦并难于呼吸. 由于某些奇怪的原因，大约有两年之久他没有对任何人诉说自己的症状，而情况一天天恶化. 他在剑桥的朋友们看到他衰退了，步履开始蹒跚. 1879 年夏他回到格伦内尔家中时，他明显衰弱了，这才去求医. 他极为痛苦，“几乎不能静卧一分钟，无眠，对自己如此需要的食物毫无食欲”. 他完全知道是没有希望了，然而他主要关心的是他妻子的健康. 他死于 11 月 5 日. 他的医生帕杰大夫（Dr. Paget）写道：“没有一个人能如他那样自觉地，平静地面对死亡”. 当麦克斯韦被安葬于格伦内尔的巴顿墓地（Parton Churchyard）时，世界还跟不上他的思想. 甚至直到今天，也还没有充分地探索了他的想像力所创造的王国.

11.

湿利尼呋萨·拉马奴金

纽曼(James R. Newman),1948 年 6 月号

我在此写下一个穷苦印度孩子一生的简述.我能得到的材料很少,而这个孩子后来成了"我们时代的最不寻常的数学家",这是一个著名的有权威的人的说法.湿利尼呋萨·拉马奴金(Srinivasa Ramanujan)于 1920 年 4 月 26 日因肺结核死于印度,年仅 33 岁.他的名字除了在数学家中,几乎无人知晓.他是数学家中的数学家,所以在此领域之外没有引起多少注意.但是他的工作在数学思想上留下了可资纪念的烙印.

有两点成为这篇简述的背景.第一点是,拉马奴金 1914 年来到英国就学时,虽然受过的正式教育极为有限,却已经是一个出色的数学家了.他以卡尔(Carr)所著的一本称为《纯粹数学概要》(*Synopsis of Pure Mathematics*)的书为基础,建起了"一座分析数学的知识和发现的令人敬畏的大厦".看一看他所能得到的这本书就可以明白拉马奴金的数学成就的本性了.这虽是一本真有优点有学问的著作,却只不过是代数、三角、微积分和解析几何大约 6000 个定理的总览,其证明"时常只是略多于文献的引用".卡尔的书中所含有的数学知识一般都是 1860 年代以前的.然而在拉马奴金到达英国时,在他喜爱的领域中,他已熟知甚至超前于当时的数学知识.所以他并未借力于人,而是孤独地横扫他的领域,重新创造了极为丰富的半个世纪的欧洲数学.可以怀疑,在整个思想史上,谁曾经有过如此骄人的巨大业绩.

值得注意的第二点是,拉马奴金是一个特殊类型的数学家.他不如高斯或庞加莱那样广泛.他不是几何学家;他从不关心数学物理,更不必说他的数学工作在其他学科中可能有什么"用处".相反地,他的直觉在令人眼花瞭乱的数系的空隙中最为优游自如.大家会看到,数是他的朋友.在数字的最简单的阵列中,他会看出逃脱了最有才华的数学家的眼光的奇异的性质和关系.现代的数

论在数学中既是最丰富,又是最不易捉摸、最困难的分支之一.它的一些主要定理,尽管其陈述是自明的,甚至简单得有如儿戏,但要想证明它们,甚至作了最艰辛的努力还会遭到挫败.哥德巴赫猜想是一个好例子,它说每个偶数都是两个素数之和.一位著名的数学家说过,任何一个傻瓜都可能想到这个定理;它是完全清楚的,而且事实上从来没有找到过不服从它的偶数.然而一直没有证明过它能适用于每一个偶数.拉马奴金正是在对付这一类问题上显示出了最大的才能.

剑桥大学已故的哈代(G. H. Hardy)教授,当时一位居于领导地位的数学家,是拉马奴金在英国最富成果的五年中,在专业上与个人关系上与他关系最密切的人.本文所用材料的大部分都是取自哈代为拉马奴金所写的著名讣告和他在哈佛大学三百周年纪念会上关于拉马奴金的著名讲演;其余则取自艾耶尔(P. V. Seshu Aiyar)和拉奥(R. Ramachadra Rao)为他写的传略(见于拉马奴金《全集》*).有些材料只有专业数学家才懂.但我觉得,把这位真正的天才的生平和工作介绍给有兴趣的行外人仍是很有意义的,是值得做的.

*　　*　　*

湿利尼吠萨·拉马奴金·艾延加尔(Srinivasa Ramanujan Aiyangar),按他的传记作者艾耶尔所说,出生于马德拉斯(Madras)邦坦卓尔(Tanjore)区一个比较清贫的婆罗门家庭中.他的父亲是昆巴柯南(Kumbakonam)一位布商的会计,母亲是有"很强的常识感"的妇女,是艾罗德(Erode)法院一个婆罗门小官员的女儿.婚后一段时间尚无子息,"但是她的父亲向邻城那马卡儿一个著名女神娜摩·吉利祈求保佑女儿能有子嗣.不久以后,她的长子即数学家拉马奴金出生于1887年12月22日".

他5岁入学,7岁时转入昆巴柯南的高级学校,并且得到奖学金.他的特殊才能立刻就被发现了.他安静沉思,记忆力惊人.他喜欢拿一些定理与公式和朋友们玩,背诵全部梵文字根,或者计算 π 和 $\sqrt{2}$ 到任意位小数.

他15岁时进入六年级,这时他的一个朋友为他从当地政府学院的图书馆借到一本卡尔写的《纯粹数学概要》.拉马奴金欣喜地探讨这个向他打开了的新世界.这本书唤醒了他的天才.他着手来证明书中的公式.因为没有别的书帮助,每解答一条都是一项创造性的研究.他先找出了构造幻方的方法.然后他又转入几何学,从事化圆为方的研究,甚至能算出地球赤道之长,与准确值只相差几英尺.当他发现几何学的领域有限时,他又转向代数.拉马奴金常说,娜摩吉利女

* 上海科技教育出版社2002年出版了卡尼格尔著《知无涯者》(R. Kanigol, *The man who knew infinity: The life of the genius Ramanujan*),是拉马奴金的详细传记.

拉马奴金，他的一位朋友写道："身材矮小笨拙，……，却有一个显著的特点——一双闪亮的眼睛.

神在梦中向他显示公式. 早上起床，他就时常记下这些公式并且加以验证，虽然不一定能得到严格证明. 这真是奇妙的事. 这种模式在他一生中反复出现过多次.

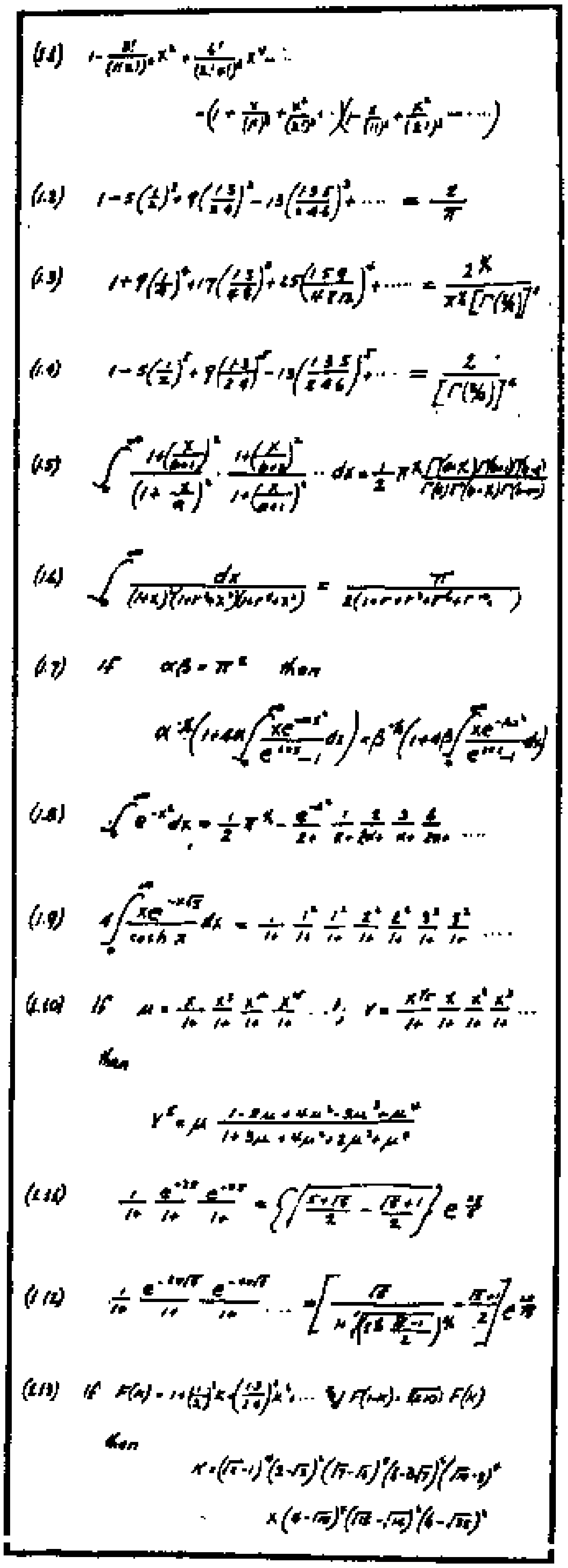
16 岁时他通过了昆巴柯南政府学院的入学考试，获得"初级苏婆罗门扬(Subrahmanyam)奖学

金”. 由于英语不够——他除了数学以外什么都不想学——第二次考试失败，也失去了奖学金. 他于是离开了昆巴柯南，先到了维扎加帕坦(Vizagapatam)，后来又到马德拉斯. 这里他于 1906 年 12 月参加第一艺术考试，但又失败，所以后来再不去参加了. 以后几年中，他独立研究数学. 他于 1909 年结婚，所以必须找一个永久的职业. 在求职过程中他被人用书信推荐给一位真正的数学爱好者拉马钱德拉·拉奥(Diwan Bahadur R. Ramachandra Rao)，当时是马德拉斯城北 80 英里处一个小城奈罗尔(Nelore)的税务官. 拉奥看过了拉马奴金的塞满了他的奇异思想的厚厚两大本笔记中的一本. 他和拉马奴金第一次的见面经过最好用他自己的话来说：

“几年以前，我的一位完全与数学无缘的侄儿告诉过我：‘叔叔，我有一位来访的人谈到数学；我完全听不懂；你能不能看一下他的谈话里有没有一点什么？’我自认为有充分的数学智慧，就允许他来见我. 他身材矮小、笨拙而结实，没有刮脸，不甚整洁，却有一个显著的特点：一双闪亮的眼睛. 走进来时胁下夹着一本磨破了的笔记簿. 他穷困可怜，他从昆巴柯南跑出来为的是在马德拉斯找到空闲时间继续他的研究. 他从不渴求荣华. 他求的是空闲；换句话说，但求能糊口，但希望不要苛求于他，而允许他梦想.

他打开了笔记本，开始解释他的一些发现. 我立即发现有一些不同寻常的东西，但是我的数学知识不允许我判断他所讲的有没有道理. 我暂时不作判断，并请他再来，而他果然来了. 这一次他已摸到了我的水平，就只讲些比较简单的结果. 这也超过了现有的书籍而我确信他是一个了不起的人. 然后，他一步步地把我引导到椭圆积分和超几何级数，最后是他的尚未公诸于世的发散级数理论转变了我. 我问他需要什么，他说只要有微薄的报酬维生，使他能继续研究.”

拉奥给了拉马奴金一段时间的生活费用. 不久以后，寻求其他奖学金的打算也都未成，而拉马奴金又不愿长期依



拉马奴金信上的定理(上面是复制件)使数学家哈代大为震惊.

靠他人资助，就在马德拉斯港口信托局谋了一个小差事.

但他从未放松数学工作. 他第一篇论文发表在 1911 年印度数学会会刊上，当时拉马奴金 23 岁. 他的第一篇长论文“伯努利数的一些性质”也发表于同年. 1912 年他又在此刊上发表了两篇短文以及回答了几个征解问题.

此时，拉奥已说服了马德拉斯工学院的一位格里菲斯(Griffith)先生关心拉马奴金，而格里菲斯又对马德拉斯港口信托局主席斯普林爵士(Sir Francis Spring)讲了，拉马奴金也正受雇于此. 到这时他的工作已经容易得到承认了. 按照艾耶尔(Seshu Aiyar)和其他人的建议，拉马奴金开始给当时剑桥大学三一学院的 Fellow 哈代(G. H. Hardy)通信. 他致哈代的第一封信日期是 1913 年 1 月 16 日，是他的朋友帮他用英文写的：

“先生：

请允许自我介绍，我是马德拉斯港口信托局会计部的书记，年薪 20 镑. 现年 23 [应为 25——编者注]. 我未受过大学教育而读过普通中学课程. 离开学校后我一直以业余可用的时间研究数学. 我没有走过大学课程的那一条常规的道路，而努力自辟途径. 我曾对一般的发散级数作过特殊的研究，本地的数学家称我所得的结果为‘惊人的’……

我愿请您读一下所附论文. 我很贫穷，若您认为其中还有有价值的东西，我愿发表我的定理. 我未附上详尽的研究和我所得的表达式，而只指出了我循以前进的路径. 因为我缺少经验，对您的建议我都高度评价. 对我给您的麻烦，我祈求原谅.

先生，您的忠实的

S·拉马奴金”

信后附了 120 个定理，其中 13 个(见图)是哈代选出认为“颇有代表性”的一组定理中的一部分. 哈代对这些定理的评论是：

“我请您先设想一下，一个通常的职业数学家在接到一位他素不相识的印度书记这样一封信时，其立即的反应是什么.

“第一个问题是我是不是能认出什么东西. 我本人曾经证明过很像(1.7)那样的东西，而(1.8)也似曾相识. 事实上，(1.8)是经典的，他是拉普拉斯的一个公式，最早是雅可比(Jacobi)给出了适当的证明；(1.9)出现在罗杰斯(Rogers)1907 的一篇论文中. 作为一个定积分的专家，我想我可能曾经证过(1.5)和(1.6)，而确实也是证过，不过比我设想的麻烦得多.

"级数公式(1.1)—(1.4)我发现要麻烦得多,马上就很明白,拉马奴金必有更为一般的定理,而且手上还有许多.第二个是勒让得(Legendre)级数理论中熟知的鲍尔(Bauer)公式,其余的则比表面看来要难得多.

"公式(1.10)—(1.13)是在不同层次上的,显然是既困难又深刻.一个椭圆函数专家会看出(1.13)可以以某种方法由'复乘法'理论导出,但(1.10)—(1.12)我完全无法对付;我从未见到哪怕与它们稍有相似的东西.稍微看一下就知道只有最高级的数学家才写得出来.它们必然是真的,因为若它们不真,谁也没有这样的想像力能发明它们.最后,……作者必定是完全诚实的,因为大数学家在这种不可信任的技巧方面实在不如普通的小偷和骗子那么在行……

尽管拉马奴金有许多光辉的成功,他关于素数和此理论中相关问题的工作肯定是错的.这可以说是他的一大失败.然而我不能肯定,是否在某种意义上,他的失败和胜利不是同样令人惊奇……."

拉马奴金关于这个领域中一个数学名词的记号,哈代写道,"与朗道(Landau)在1908年用的是一样的.拉马奴金手上完全没有朗道的那些武器;他从没有见过法文书或德文书;他甚至关于英文的知识还不足以得到学位.他哪怕是做梦遇到这些问题就了不起了,这些问题欧洲最好的数学家花了一百年才解决,而且其解答直到今天还是不完全的."

终于在1913年5月拉马奴金在许多朋友的帮助下解脱了马德拉斯港口信托局的书记职务并得到一个特别奖学金.哈代从一开始就努力把拉马奴金请到剑桥.道路似乎是畅通了,但是拉马奴金一开始却拒绝了,一是因为种姓制度的偏见,同时母亲又不允许.

"这个允许,"哈代写到,"却终于轻易地不期而至.因为他的母亲有一天早上说昨晚她梦见儿子坐在大厅里一群欧洲人中间.娜摩吉利女神命令她别挡住儿子完成人生使命的道路."

当拉马奴金终于来到剑桥时,他从马德拉斯得到一笔250镑的奖学金,其中分出50镑以支持他在印度的家人,三一学院另给60镑资助.

"有一个大的困惑",哈代这样评论拉马奴金,"在教他现代数学时应该做些什么?他的知识的局限性和其渊深同样令人吃惊.这里的这个人能做出模方程和复乘法的定理真到未所闻及的程度,他对连分数的掌握,至少在形式方面,超出世上任一个数学家.他可以自己找出ζ—函数的函数方程,以及解析数论中许多最著名问题的主项;然而他从未听说过双周期函数,也没听说过柯西(Cauchy)定理,他对什么是复变量函数只有最模糊的思想.他对于什么是数学证明的想法只是最含混的描述.所有他的结果,不论是新发现的还是原来就有的,对的还是错的,他得出这些结果的过程都是论证、直觉和归纳的混合物,而他对这个过程完全不能给出任何一种协调一致的论述.

“不可能要求这样一个人去听系统的讲授，或者把数学从头再学一次.我还害怕如果我不适当地坚持拉马奴金讨厌的东西，我就可能毁掉他的信心和灵感的魔力.另一方面又有一些东西他老是不知道.他有些结果是错的，特别是涉及素数分布的结果，而对此他最为重视.不可能允许他一辈子都以为 ζ—函数的零点都是实的.所以我就试着来教他，而在一定程度上我得到成功，虽然很明显，我从他学到的比他从我学到的要多得多.

“关于拉马奴金在数学以外的兴趣我还要讲几句.就如同他的数学一样，这些兴趣也呈现了最奇特的对比.我应该说，他对文学本身，还有艺术，几乎毫无兴趣，但他能分辨出好坏文学.另一方面，他是一个敏锐的哲学家，而在现代剑桥学派的追随者看来则是一个模糊不清的那一类哲学家，他又是一个热忱的政治家，是和平主义和超激进类型的.他遵守他的种姓的宗教仪式，其严格在居住于英国的印度人中极为少见；但是他的宗教又仅仅是一些教规而非心灵的信念.而我清楚地记得他告诉过我(使我大吃一惊)，所有的宗教在他看来或多或少是同样真实的.不论是在文学、哲学和数学中，他对未曾预料的，奇特的，古怪的东西都抱有热情；他藏有颇多的化圆为方者或其他怪人写的书……他是最严格的吃素的人——这一点在他后来病中造成极大困难——在他整个住在剑桥时期，他都自己做饭，而且做饭时一定要换上印度人穿的那种宽脚裤……

“1917 年春天起拉马奴金开始感到不适.这年初夏他搬进剑桥一个小疗养院，以后能起床的时间就不多了.他又先后来到威尔士的、马特洛克(Matlock)的和伦敦的疗养院，直到 1918 年秋病情才明显好转.于是他又恢复积极的工作，可能也是由于被选入皇家学会的激励，他的一些最漂亮的定理就是在这段时间发现的.他被选为三一学院的 Fellow 又是一个鼓励；每一个这种著名学会都可以感到庆幸，在为时尚不为晚前就认识到他的身价.”

1919 年初，拉马奴金回到家乡印度，次年去世.

要对拉马奴金在数学中的方法与工作做一个评价，又得引述哈代的话：“时常有人问我，拉马奴金是不是有特别的秘密；他的方法与其他数学家的是否属于不同类型；他的思维方式是否有什么确属不正常.我对这种问题无法作出有把握的回答；但是我不相信.我的信念是，所有数学家，归根结底，都以同一类方式思维，拉马奴金也不例外.当然他记忆超凡.他记得数的特性近于怪诞.李特伍德(J. E. Littlewood) * 说过‘每个正整数都是他的私人朋友’(这一点我也相信).我记得有一次乘出租车去看望在普特尼患病的他，车号 1729，我对他说，这个数很平淡无奇，希望这不是恶兆.他说：‘不然，这个数很有趣；它是最小的能够用两种不同方式表为两个立方之和

* 译注：英国数学家，哈代的著名合作者.

的数.'我自然地就问他是否知道关于四次方相应问题的答案;他想了一会,说看不到显然的例子,他想,第一个这种数想必很大.他的记忆力和计算能力确是很不平常,但是称之为'不正常'是没有理由的.如果他要乘两个大数,他也是用通常的方法去乘,只是他的速度和准确性都非同寻常.但是比之生来敏捷又有计算习惯的数学家,就不一定更快了.

"最令人吃惊的是他对代数公式、级数变换等等的洞察力.在这方面我完全肯定从未见到与他相当的人,我只能把他与欧拉和雅可比*相比拟了.他利用数值例子作归纳来进行研究工作,比大多数现代数学家要多得多.例如他关于分割的同余性质的工作都是这样做出来的.但是他除了记忆力、耐心和计算能力之外,还加之有善于推广的能力,对于形式的敏锐感觉,以及迅速修正自己的假设的能力,这时常是真正惊人的,而使他在自己的领域中,在自己的时代找不到敌手.

"时常有人说,今天的数学家要有独创性,比之为现代分析奠定基础的年代,要难多了;无疑,在一定程度上这是真的.拉马奴金的工作重要性如何,应该用什么标准去判断,他对未来的数学会有什么影响,在这些方面意见可以是不同的.它没有最伟大的工作的简洁性和不可抗拒性;如果它不那么奇特,那就更伟大了.他有一种天赋却是谁也不能否认的——那就是深刻性和不能战胜的独创性.如果能在他年轻时更早就被抓住而且稍加驯服,他可能会成为更伟大的数学家;他会发现更多新的而且无疑更加重要的东西.另一方面,他就不再像是拉马奴金,而更多地像一个欧洲教授,其所失也可能大于所得."

* 译注:Carl Gustav Jacob Jacobi,1804—1851,德国大数学家.

12.

尼古拉斯·布尔巴基

哈尔莫斯(Paul R. Halmos),1957 年 5 月号

他取了一个希腊名字,他的国籍是法国,他的历史很奇特.他是 20 世纪最有影响的数学家之一.关于他的传说有很多,而且一天比一天多.几乎每一个数学家都知道他的几个故事,而且很可能自己也曾编上一两个.他的著作在全世界都有人读,而且被普遍引用.里约热内卢有些青年人的全部数学教育几乎都得自他的著作,而在伯克利和哥廷根也有著名的数学家认为他的影响实在害人.只要一群数学家聚在了一起,他总会得到大动感情的同党,也有大喊大叫骂他的人.然而,关于他最奇怪的事就是,他根本不存在.

这个不存在的取了希腊名字的法国人就叫做布尔巴基.其实尼古拉斯·布尔巴基是法国数学家的一个非正式的小圈子的集体笔名(非正式的小圈子在法文中有一个迷人的说法,就是“匿名社团”).这个化名的数学团体正在写一部包罗万象的数学著作,它从最一般的基本原理写起,打算写到最特殊的应用结果为止.这个计划从 1939 年开始实施,迄今,这部鸿篇巨著已出版了 20 卷(约 3 000 页).

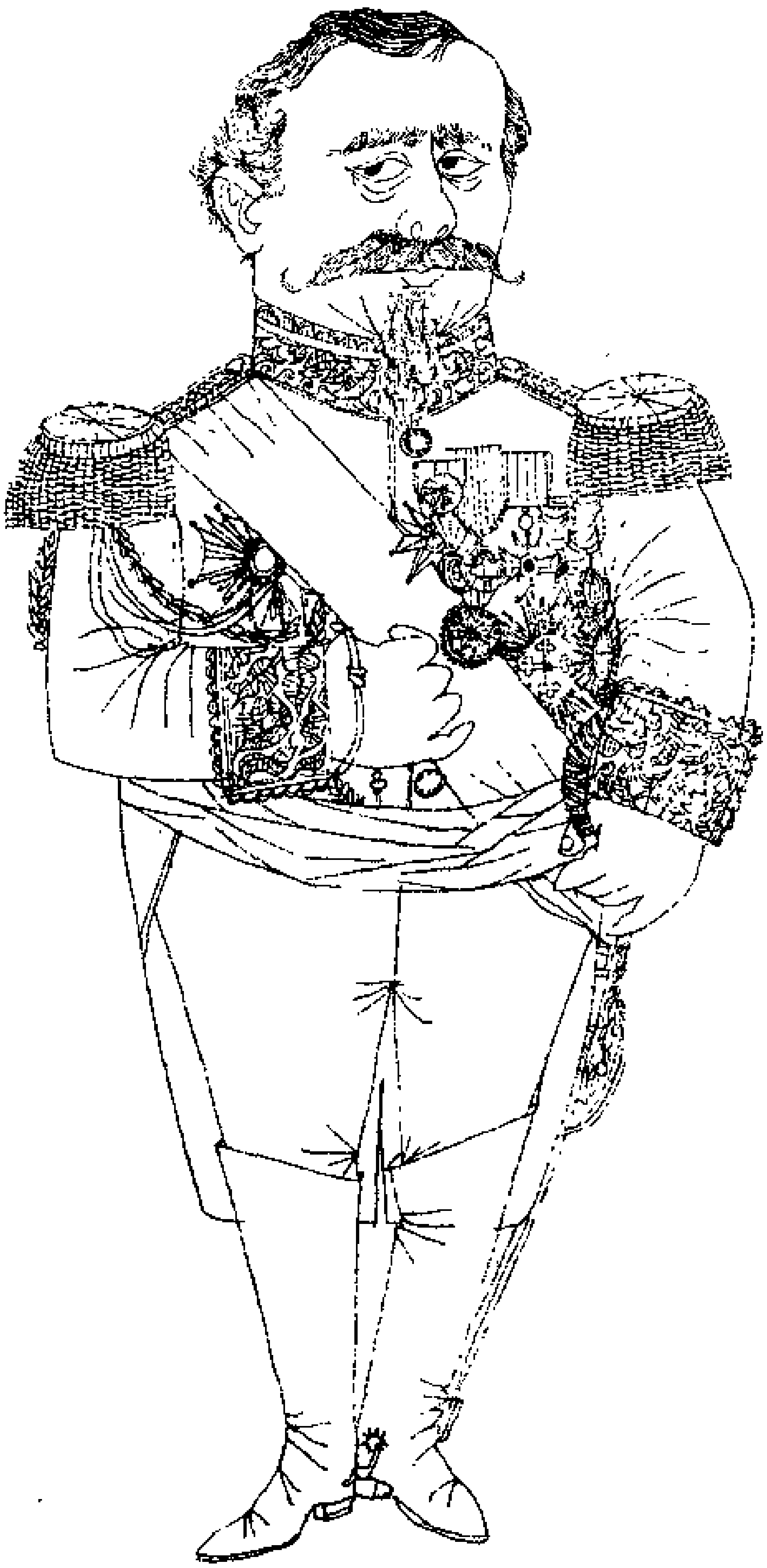
为什么这些作者们自称布尔巴基,还掩盖于迷雾之中.有理由相信,取这个名字的灵感是来自普法战争中一位略有薄名的法军军官.沙尔·德尼·索特·布尔巴基(Charles Denis Sauter Bourbaki)将军是一个颇有传奇色彩的人物.1862 年他 46 岁时曾有机会去当希腊国王,但是他拒绝了这个机遇.人们还记得他,主要是因为战争的命运对他的残酷.1871 年他带着些许残部从法国逃到瑞士,他在那里被拘留,于是想开枪自杀.看来这一枪并没有打中,因为据说他一直活到可尊敬的 83 岁高龄.据说在法国南锡还有他的塑像.他与借他之名的数学家的关系大概即在于此,因为这批数学家有好几个先后与南锡大学有关.

是一群吵吵嚷嚷的法国数学家. 这幅画是随意之所至的漫画，布巴尔基在什么时候都似乎有 10 到 20 个人. 如果画上的真人物和哪一位真人有些相像，这纯属巧合.

关于这个名字还有一个传说：大约 25 到 30 年前，巴黎高师（École Normale Supérieure，法国绝大多数数学家均出身于此）一年级学生每年都要去听一次一位化了装的访问者尼古拉斯·布尔巴基的讲演. 他其实是一个业余演员，戴上一副大主教、大族长的大胡子，他的讲演是数学的语意双关的杰作.

有必要讲几句话，提醒大家，绝大部分布尔巴基故事都是靠不住的. 虽然这个隐秘团体的成员并没有赌过血咒要保守秘密，但绝大多数却对自己开的玩笑也很开心，就故意搞得矛盾百出，真伪难分. 另一方面，圈外人又时常不懂他们说的东西；所以只能传播一些添油加醋的传说了. 这篇文章的目的是讲布尔巴基的科学成就，也讲几个关于他（他们）的故事的例子. 有些故事至少也是无法核实的，但是这并不使之减色.

科学著作用笔名当然不是这群人所首创. 英国统计学家戈塞特（William Sealy Gosset）发表他关于小样本理论开创性的著作时，就用的是笔名"Student"（意为学生），大概是为了不使他的



布尔巴基将军的名字其实不是尼古拉斯·布尔巴基，而是沙尔·德尼·索特·布尔巴基.有一次曾让他去做希腊国王.

老板（基尼斯黑啤酒（Guiness）酿造者）为难.另外一群爱逗乐的人发明了“旁第谢里”（E. S. Pondiczery）这一名字，声称是“皇家波达维亚研究所”（Royal Institute of Poldavia）的成员.他的研究所的名字第一个字母（E. S. P. ,R. I. P. ）是取自从来没有写过的关于“超感觉悟性”的文章.旁第谢里主要的工作是关于数学奇闻的.他最骄傲的成就是，唯有他用过双重笔名.旁第谢里写了一篇关于猎取大野兽的数学理论的文章，在投寄《美国数学月刊》时，他在投稿信中要求准许他用笔名，因为文章明显有玩笑性质.编者同意了，于是此文于 1938 年以 H. Pétard 之名发表.

原始部族，有时也有科学家，总觉得名字中有些魔法.这种魔法就在于，如果作者用别的名字，文章就想不出来.伽莫夫（George Gamow）和他的朋友贝特（Hans Bethe）看到出现了一位名字很不寻常的非常聪明的物理学家时，就抓住了机遇，得到了好处. 1948 年 4 月 1 日他们在《物理评论》（The Physical Review）上发表了一篇讨论元素的起源的一本正经的论文，唯一不寻常处是标题下一行作者署名：阿尔弗、贝特、伽莫夫（Alpher, Bethe, Gamow），恰好与希腊字母之始阿尔法，贝塔，伽玛（Alpha，Betha，Gamma）谐音.

既然讲到了署名奇特的论文，提一下摩里斯·德·杜法埃尔（Maurice de Duffahel）的事件也好.这位先生成为数学上不朽的办法很简单：把大师们的经典论文署上自己的名字发表.他的这些活动几乎是不加掩饰的.他在

ACTUALITÉS SCIÉNTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

858

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PAR

N. BOURBAKI

II

PREMIÈRE PARTIE

LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

LIVRE III

TOPOLOGIE GÉNÉRALE

CHAPITRE I

STRUCTURES TOPOLOGIQUES

CHAPITRE II

STRUCTURES UNIFORMES

PARIS

HERMANN & C^ie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1940

布尔巴基的巨著是软封面书. 图上是其封面，扉页也是同样的，这只是这个巨著第一部分的第三本书的一部分. 第三本书标题为"一般拓扑学".

1936 年把毕卡(Charles Emile Picard)仅仅在 24 年前的一篇论文作为自己的著作重新发表. 杜法埃尔的版本和毕卡的完全一样,文字公式丝毫不爽,只有一处节略:由于可以理解的理由,他省去了原文一个脚注,而毕卡在这个脚注中引述了自己过去的论文. 学术界终于抓住了杜法埃尔. 你可以一时骗过有些编辑,但是你不能永远哄过所有的审稿人. 毕卡——杜法埃尔的论文的一位审稿人恰好相当熟悉毕卡的工作,认出了这是抄袭,杜法埃尔发表论文的生涯从此突然告终.

布尔巴基的工作不需要对酿酒厂主隐瞒,它们也不是无害的取乐而是严肃的数学,它们断然不是抄别人的作品. 这一群人开始时采用笔名,半是好玩,半是避免在扉页上署上一长串作者的名字令人厌烦;他们后来还这样做更多地是用一个集体的名字而不是为了伪装. 成员的名字对于绝大多数数学家是公开的秘密. 布尔巴基和其他小圈子一样,成员随时有变动,但是其著作的风格和精神一直未变. 其实用一个形容词就很方便地描述了这种风格和精神,一个被认可的形容词是"布尔巴基的"(bourbachique),用不着说什么"青年法国学派"之类啰嗦话了.

布尔巴基开始亮相是在 20 世纪 30 年代中期,那时,他们开始在法国科学院《通报》(*Comptes Rendus*)和其他刊物上发表短文、评论和其他论文. 他们对后来着手写的主要著作也在一篇文章中作了解释,这篇文章译成了英文并发表在《美国数学月刊》(*The American Mathematical Monthly*),1950,标题是"数学的建筑". 有一条脚注:"布尔巴基教授,前皇家波达维亚科学院[旁第谢里的身影],现居法国南锡,他是一部包罗整个现代数学的巨著的作者,此书正以《数学原理》(*Eléments de Mathématique*,(Hermann et Cie, Paris,1939—)为名发表,已经有十卷问世."顺便说一下,本文包含了布尔巴基关于数学"结构"的观点的有趣的论述;它是描述布尔巴基精神的杰作. 另一篇文章发表在 1949 年的《符号逻辑杂志》(*The Journal of Symbolic Logic*)上,题目很大,叫做"为研究具体数学问题的数学家所用的数学基础"(Foundation of mathematics for Working Mathematicians). 本文技术性很强,但是作者的个性通过符号显示出来了. 文章结尾说:"我宣称,可以在这些基础上把当今全部数学建立起来;如果说在我的程序中有什么独创的东西,那仅仅是,我不是满足于这样宣布,我进而去证明它,就像戴奥根尼(Diogenes)* 证明运动的存在一样;随着我的著作的生长,我的证明也将越来越完备."

这篇文章注明作者的单位是"南加哥(Nancago)大学",这是由南锡(Nancy)和芝加哥(Chi-

* 译注:戴奥根尼,412? —323,B. C.,古希腊犬儒学派哲学家.

cago)合并而造成的一个字. 合并的主要理由是,布尔巴基的主要创立者之一现在在芝加哥大学任教. 这人就是安德列 · 韦依(André Weil)(顺便说一下,他就是著名的宗教神秘主义者西蒙奈 · 韦依(Simone Weil)的兄弟). 虽然一般公众不一定知道安德列 · 韦依,他的许多同行都打算争辩说他是世界上还活着的数学家中最伟大的一个*. 他关于代数数论和代数几何的工作深刻而且重要;他对 20 世纪数学发展有巨大影响,甚至他的某些随手得来的贡献(举例来说,一致结构和拓扑群上的调和分析)都开辟了新方向,鼓励了进一步的研究. 顺便说一下,南加哥这个词还在一个新的高深的数学丛书中出现,这套书冠以一个引人注目的总题目:"南加哥大学数学研究所出版物".

有一个关于布尔巴基的传说是,他们的主要著作,其总标题是《数学原理》,起源于韦依和德尔萨特(Jean Delsarte)关于微积分应该怎样教的一次谈话. 不管写这部分原来的动机是什么,它当前的目的肯定不是初等的数学. 就好像开始是讨论教人听懂流行音乐的最好方法,后来却成了关于和声和音乐学的完备的著作. (数学家把微积分当成"小儿科",正如音乐家对待维克多 · 赫伯特(Victor Herbert)**的音乐一样.)布尔巴基的著作(用法文写成),是从很精细的观点对整个数学的概括.

全书假想会分成几个部分,而已出版的 20 卷还没有写完第一部分:"分析的基本结构"(*Fundamental Structures of Analysis*). 第一部分的 6 个小部分可能使外行(以及古典数学家)听起来略感震动,他们想到数学就会想到算术、几何这些老式的字眼. 这六个小部分就是:(1)集合理论,(2)代数,(3)一般拓扑学,(4)单实变量函数,(5)拓扑线性空间,(6)积分.

每一卷都夹了 4 页的活页,是正确使用此书的指示. 它们详细讲了阅读本书必须的预备知识(相当于大学数学系二年级),描述此书的组织,弄清阅读各章、各节与各部分必须按"严格规定的次序"去阅读. 这些指示还解释了作者的教学技巧. 有些技巧确实很好. 有一个技巧,其他作者模仿一下就好,就是当主题特别难掌握,而读者容易搞错时,这样的段落边缘上就画一个显眼的 S—曲线(表示"危险弯道").

S—曲线,在布尔巴基著作中表示论证中的"危险弯道".

一个不太好的布尔巴基技巧是他们略带轻蔑地用他们所说的"滥用语言"来代替专业名词. 大家都承认,如果严格遵循严格正确的名词,到头来会弄得迂腐而不可卒读. 对于布尔巴基就更加如此,因为他们的名词和符号

* 译注:韦依已于 1998 年 8 月去世. 墓碑上却刻上了波达维亚皇家研究所研究员的谥号.

** 译注:维克多 · 赫伯特,1859—1924,美国作曲家和乐队指挥,生于爱尔兰.

常与通用的不太一样.有趣的是,他们用来作为专业名词的非正式替代物的那些“滥用语言”,其实就是通常的用法:要记住他们自己的创新,把作者自己也搞烦了,于是舒舒服服就滑到他们以外的数学世界的名词中去了.

布尔巴基的几乎每一本书都附有极佳的习题.被动地学数学是不可能的,布尔巴基的习题是对主动性的挑战.作者们花了很大的心思创作出新的习题,或者改写改编老习题.作为一个原则,他们通常不注明经他们改编过的老习题的原作者,但似乎没有人介意.一个数学家如果自己的论文被布尔巴基“偷”去作了习题,时常还认为是荣幸.

布尔巴基的小玩意还有在书中加进折页,其中总结了重要的定义和假设.每本书还附有一个字典,既可作为索引,又可作为非布尔巴基的名词和基本的布尔巴基用语的导引.所缺少的唯一重要的东西是充分的文献向导.对每个学科,布尔巴基的讲法都是系统而彻底的,时常还有这个学科的出色的历史回顾.但是这些历史的短评对经典之作的引用已过于吝惜笔墨,对现代的贡献更是几乎不提其来源.这并非有意为之(布尔巴基从不宣称自己发现了整个现代数学),但这种做法可能会为将来的数学史家造成混淆.

以上只是布尔巴基的外部装饰.至于布尔巴基的风格与精神,其何以吸引朋友或招怨树敌的品质,则更难描述.这正如音乐的品质一样,与其说难于理解不如说只能感觉.

有一件事从一开始就把大学生们引向了布尔巴基.就是有些学科(例如一般拓扑学与重线性代数)是他们首先作了系统论述的,而在别的书里是找不到的.布尔巴基在把数十年间散见于各种文字的许多杂志的论文整理成有顺序的形式上,起了开创性的作用.布尔巴基处理问题的主要特点是:在做法上必须按正确的顺序方而持激进态度,在坚持使用自创的名词上近于独断,概念的安排和叙述的风格干净而且经济.倾向于说,在一切问题上都不给想像力留下余地,所以产生一种平淡无奇;温吞水的效应.

布尔巴基处理问题的彻底性与慢吞吞的节奏的一个典型例子是他们定义“1”这个数的方法.在给出定义之前花了将近200页作为准备.然后他们就用高度浓缩与省略的记号定义了数1,并在一条脚注中说,如果用他们的记号系统,则此定义的不加省略的形式要用好几万个记号.要是公正地对待布尔巴基,就应该说,现代数理逻辑学家早就知道数1这样一些概念并不像看起来那么初等.

这样大的集体著作是怎样写成的呢?迪厄多内(Jean Dieudonne)(原来在南锡大学,现在在美国西北大学*),他从一开始就是布尔巴基主要的执笔者.因为迪厄多内是一位多产的数学作

* 译注:几年前在巴黎去世.

家,并用自己的名字发表,所以,把他个人的著作与他为布尔巴基写的书分开来就有一定困难.有一个故事表明迪厄多内努力保持布尔巴基的风格是十分了不起的.这故事说,有一次迪厄多内以布尔巴基名义发表一篇文章,后来发现其中有错.他在一篇文章"关于布尔巴基的一个错误"中纠正了一个错误,此文署名则为迪厄多内.

布尔巴基的成员约在10到20人之间变化.除了一个显眼的例外,所有成员都是法国人.这个例外就是撒姆儿·爱伦伯格(Samuel Eilenberg,原来是华沙人,现在在哥伦比亚大学).他的朋友叫他是 S^2P^2(意为 Smart Sam the Polish Prodigy——波兰神童,漂亮的撒姆),爱伦伯格生性迷人活泼,他来到美国六个月时,就知道许多美国人都不知道的关于美国的事.(他到美国后所作的第一件事之一就是作一次长途的搭便车旅行).因为他法文讲得像土生土长的法国人一样,而且懂得代数拓扑学比任何一个法国人都多,所以布尔巴基必须限于法国人这个不成文的规则为他网开一面.

布尔巴基的法国派头倒不只是沙文主义,而是语言上的必须(因为开始是法国人建立了它).当一大群首席歌唱家如韦依,迪厄多内,舍瓦勒(Claude Chevalley),昂利·嘉当(Henri Cartan)带上一群同事聚会的时候,他们讲法语速度之快与声音之响给人深刻的印象*.要想跟上和参加这种谈话,不仅必须法语讲得又快又响,还要熟知巴黎大学生们最新的俗话、行话.即使是房子里每个人都符合这个条件,在这种著名的布尔巴基聚会上也未必能做出些什么事来.但是事情就是做成了.成员们每年开一次会,通常在一个使人愉快的法国度假地,来作出重要的决定.因为他们的著作在商业上十分成功(颇出布尔巴基意外),有足够的版税来支付旅费,购买法国的美酒佳肴使会议生色不少.(顺便说一句,这个商业上的成功主要来自美国市场.布尔巴基的资深成员中有五分之四现在居住在美国.)

一大部分工作是准备布尔巴基的书的各卷.一旦确定了一个特定的主题,就会有一个成员同意写一个初稿.他这样做会得到一种经受考验的经验.当初稿完稿,就要复印散发给各人.这个初稿在下一次会议上会遭到无情的抨击,很可能会被完全抛弃.例如布尔巴基关于积分的书的初稿是迪厄多内写的,后来被称为"迪厄多内的怪物".有这样的传说,迪厄多内的怪物在风格和内容上都与一本同样主题的美国书很相近,这本书的作者我们不妨称之为"空白先生".迪厄多内的怪物从未出版;一同开会的人把它毙了.韦依嗤之以鼻解决了问题:"如果我们要做这样的事,不如把空白先生的书译成法文,就算完事."

打发了第一稿后,就会开始写第二稿,可能由另一个成员执笔.过程就这样继续下去:六稿、

---

* 译注:据已故的吴新谋教授告诉译者,当时人们称迪厄多内在布尔巴基聚会时的讲话为"狮子吼".

七稿也不是没有的事.这种小心辛勤的工作的结果就不是一本可以放心交给初学者的教科书了(布尔巴基也承认这一点),而是一部参考书,几乎是百科全书.没有了它,不管说好也罢,说不好也罢,反正20世纪数学就会与它现在的模样颇为不同了.

布尔巴基青年人似的意气风发对于他们的工作的未来是一个吉兆,但对于他们的对手是一个主要的麻烦.美国数学会收到了由布尔巴基署名的入会申请,美国数学会的职员们就不高兴了.他们认为这是大二学生式的玩笑,于是拒绝了这个申请.学会秘书冷淡地建议布尔巴基申请作为团体会员.因为团体会员的会费比个人会员要高得多,而布尔巴基又不愿承认它并不存在,这件事就再没有人提了.

是的,这确实是大二学生式的玩笑.但是大二学生是年轻人,而数学又是年轻人的事业.布尔巴基强调年轻化是值得称赞的.迪厄多内和韦依最近都到了50岁,虽然他们是布尔巴基的老祖宗,却都宣布退出这个团体.他们都曾经宣布过到50就退出的意愿,他们遵守了自己的诺言.

警告一下读者要注意布尔巴基引起的对本文作者的谣言,同时也希望能大度地对待这些谣言,这样做是适当的.这个小圈子不喜欢自己的秘密被公诸于众,而且他们有能力对付揭发的人,这也是得到了证明的.肯定地说,这些故事早在本文之前就已曝了光.德拉歇(André Delachet)在1949年写的数学分析的小书就称布尔巴基是"多头纲的数学家",甚至把一些脑袋的名字也说出来了.这前面一两年,《英国百科全书》(*Encyclopaedia Britannica*)的《年鉴》中有一小段讲布尔巴基这个团体.这一段话的作者是波阿斯(Ralph P. Boas),当时是《数学评论》的执行编委,现在是迪厄多内在西北大学的同事.不久,《英国百科全书》的编者就收到了布尔巴基署名的投诉信,抗议波阿斯毫无根据地说布尔巴基不存在.后来芝加哥大学数学系一位教授写了一封真实的但用词谨慎的信,暗示布尔巴基确实存在,却又没有明说,这就把编者们弄得更加糊涂,波阿斯也更加为难.后来是美国数学会的秘书(就是拒绝布尔巴基入会的那一位秘书)的信才澄清了局面.

布尔巴基开始报复.这个小圈子动员起了他的全部的多头的和国际的力量,造了一个舆论,说波阿斯也不存在.布尔巴基说,波阿斯其实是一群青年美国数学家的集体笔名,他们联合起来就成了《数学评论》的编委会.

Ⅲ.

几个数学分支

引 言

数学如同高卢人*一样被分为三个部分.虽然在过去这三个领域经常相互争吵,今天不仅所有敌意都已消失,而且关系日益亲密.这种亲密性的后果之一就是出现了某些数学课题或科目,它们既属于这三个部分的这一个,又同样程度上属于另一个.

数学的这三个部分——代数、几何与分析有着不同的逻辑地位.几何与代数是独立的科目,它们都有自身的公理化基础,而分析则是代数的延伸.分析之不同于代数的显著特点是用到了极限概念.极限就是一个数,它被另一些数越来越近地逼近,例如 1/2,3/4,7/8,15/16,……逼近数 1,数 1 就是它们的极限.

在这个体制中算术的地位在哪里?它是代数的一部分,我们也可以说代数是广义的算术.如果一个人想去讨论形如 6－4 的任一表示式,诸如 7－3,12－8 和 0.2－0.1,他可以写下 $a-b$,这里 a 总的用来表示第一项数而 b 表示第二项数,并讨论 $a-b$.向文字的转移实现了从算术到代数的转移.于是算术、代数及分析基本上都处理数,无论是特别的数,如 3 和 $\sqrt{2}$,或用 a,b 及其他文字表示的各类的数.

数学的这种分割是一个粗略的看法.仔细地观察会发现,有着许多种算术,许多种代数,许多种几何而不是一种几何,许多种分析而不是一种分析.

怎么会有许多种算术?难道 2+2 不总等于 4 吗?怎么会有许多种几何?难道三角形内角和不总等于 180 度吗?回答这些问题说来话长,然而对了解数学的性质、内容和角色而言又极为重要.初等数学是对最直接的实践经验之反映.人们用整数来表示一个牛圈中牛的总量,而用

* 译注:即古代罗马帝国时代居住在高卢(罗马帝国的一部分,今法国)的人.

分数表示一个人的收入中给教堂的捐赠或向国家纳的税所占的份额. 一条直线曾是一块田野的边界或一根拉紧的绳子的理想化,而月亮的形状则使人想起球面. 在这些人所感知的现实事物的基础上建立起来的数学是广泛的,并不可思议地适用于自然开发、工程应用和商业的需求. 在数学的这个领域里,2+2 永远等于 4,三角形内角之和永远等于 180 度. 在数学思想的这个阶段,在自然界的天真无邪的状态中,借用卢梭(Rousseau)的话来说,数学概念和运算被认为只是从自然界抽象而得,而数学家用基于明显的物理真理的推理而得知的有关自然界的东西比之通过如测量和实验等物理手段而直接明白的和达到的要多得多. 然而数学并不能表示比自然之现实事物更多的东西.

有几件事在唤起人们的觉醒方面是决定性的. 一个小的震动是印度人引进了负数. 数学家们花了好几百年才认可了这些数并用它们来区别一个方向的距离与另一个方向的距离. 因为他们已将一种真实性赋之于负数,他们同负数和解了. 不过,一直到 19 世纪中叶还保留了一丝不安.

由于纵情地嗜于推广,这一次数学家们受自己的震撼更为严重了. 某些最简单的实际问题导致求解诸如 $x^2=2$ 或 $x^2-5x+6=0$ 等方程. 这些方程的根是正的和负的数. 然而数学家们并不满足于只解这些特殊问题. 因而他们考虑一般的二次方程 $ax^2+bx+c=0$,其中 a,b 和 c 为任何正的或负的数. 我们不必考虑一般的方程即可看出数学家们使自己陷入了困境. 什么是 $x^2+2=0$ 或 $x^2=-2$ 的解? 类似于他们解 $x^2=2$ 时写下 $x=+\sqrt{2}$ 和 $x=-\sqrt{2}$,数学家此刻写下 $x=+\sqrt{-2}$ 和 $x=-\sqrt{-2}$. 他们创造了一个魔鬼. 什么是 $\sqrt{-2}$? 按照平方根的涵义,它应当是一个数,若将它自乘则得 -2. 但是,数学家们知道正数和负数都有一样的性质,与自身相乘之积必为一正数. 因此在已知的数中没有一个等于 $\sqrt{-2}$. 更糟的是去解诸如 $x^2-6x+11=0$ 这样的方程,运用解方程 $x^2-5x+6=0$ 的同样步骤,他们得到诸如 $3+\sqrt{-2}$ 和 $3-\sqrt{-2}$ 的"数". 这些"数"更无意义.

解决这些奇怪的"数"的出现所引起的困难,数学家的办法是不去理会它. 他们称这些数为虚数(今天它们被称为复数),并加以非议和摈弃. 他们虽然有点良心,但良心比理性思维更为豁达.

非欧几何是使数学家更为棘手的事件. 读者可在 M·克莱因(Morris Kline)的文章"几何"中读到这项进展的故事. 不过我们将在这里谈一点历史,它与克莱因的文章无甚关系,而是涉及数学这个概念作为一个整体的一些历史. 欧几里得几何中有一条公理说,给了一条直线和线外一点,在由该给定直线和点所决定的平面上有而且仅有一条直线经过定点而与给定直线不相交. 直到 1800 年还没有人怀疑这条公理的物理的真理性,然而相当多的人反对将这个事实作为

一条公理引入，因为，正如欧几里得所说，它看上去不像一条公理应当具有的那样不证自明的特性. 为避免引入这条公理，许多人特别是萨凯里(Girolamo Saccheri)，追随着一个自然的计划. 不同于欧几里得公理的说法有两个. 第一是过给定点可作多于一条直线与给定直线不相交；第二是不能作出直线与给定直线不相交. 他们采纳了以下的计划，先用这两条公理之一代替欧几里得公理，并用它联同欧几里得几何的其余公理去推导定理. 这些人满心期望会得到互相矛盾的定理，而这将会证明代换进去的公理是不正确的. 然后对否定欧几里得的另一条公理也依计施行，而且也期望相同的结果. 最后的一步推理是，如果仅有的两个可能的不同说法都导致矛盾，欧几里得的命题必然正确. 事实上，因为它是其余公理的逻辑推论，它将不是一条公理而是一条定理.

不幸的是采用这两个不同的公理并没有导出矛盾(我们在这里略去了有关第二个不同的公理的细节)，而数学家们遇到了全新的几何学. 此外，若把这种新的几何学应用于自然界，在当时的测量所能确定的精度之下，其结果同欧几里得几何是一样精确的——这是高斯的伟大贡献. 这一点我们在第Ⅱ部分的引言中已经讲过了.

现在数学家们被迫面对着这样一个问题，"这些几何学，欧氏的和非欧氏的，其中哪一个是自然界的真理?"没有标准可以指明哪一个比另一个更合适. 可是好几个相互根本不同的几何学不能都真实. 数学家们慢慢地勉强地领悟了其中的真谛. 那就是，哪一种几何学都没有理由使人相信是真实的.

不过，如果作为数学的基本分支之一的欧氏几何都不必须是真实的，数学家们应当重新考虑他们对所有数学本质的理解是不是有问题. 他们曾经相信他们是从自然界中显然的真理出发，并运用推理演绎出有关自然界进一步的真理. 然而非欧几何学的教训在于：人们过去肤浅地挑选了有关自然界的一些似乎是正确的事实作为公理并演绎出一批结论，而这些结论又碰巧是可以应用的. 确实可能从完全不同于原先的欧氏断言出发而仍然获得有用的结果.

极为重要的是：数学是人造的. 它是人工的. 无论其公理或由此推出的定理都是由人写进宇宙的. 数学家们很不情愿地承认，有关他们所做的事情的本质，他们被蒙蔽了达两千年之久.

然而数学家们设法反败为胜. 如果通常的代数和通常的几何是设计出来的而仍然有用，那么另外的设计也可能同样有效. 因此不必拖延到直待虚数与直接的经验有关系才接受它. 它们产生于一个非常有意义的数学课题，即求解二次方程. 这个事实就是一种保证：哪怕仅只是为了更多地了解这样的一个重要课题而研究它们也是值得的. 此外，虚数在很大程度上并不比通常的整数和分数更是人为的，因为现在已经清楚，整数和分数虽然历史上是来自经验的启示，实际上同样也是人类心智的创造.

数学经历了一个自由的新生，它不再被束缚在直接从现实世界抽象而得的概念，而有了去探索人类心智的创造的自由. 到了 19 世纪末，一位近代伟大的数学家康托(Georg Cantor)已经能够宣称："数学的本质在于它的自由."不过他的同时代人 F・克莱因(Felix Klein)警告说，自由必须伴以责任心，即对数学的严肃目的的负责.

至于数学家们是否尽到了他们的责任，我们将不在这里讨论. 重要的是在近一百年间数学家们已经创造了许多新型的数，它们的性质与人们熟知的数系相比是奇怪的. 在戴维斯(Davis)的文章中他讨论了好几种这样的新型的数和它们的性质. 当然，人们熟知的整数的性质仍然继续吸引着数学家们. 赫尔维茨(Herwitz)的文章给出了某些理由.

正如通常的代数是处理通常的数的推广的方法，处理这些不同的新的数系的推广而产生出各种新的代数. 于是多种代数的存在导致代数类的结构或性质的研究. 某些最新发展起来的代数和代数类的近代概念，如群和域，在梭耶尔(Sawyer)的文章中得到阐述.

近百年来几何也得到巨大的扩展. 除了这篇引言已经谈过的非欧几何学以外，还产生了许多新的更一般的非欧几何学，称为黎曼几何和非黎曼几何. 数学家们也勇往直前地进入 n 维几何学并研究复杂的曲线，曲面和高维的图形. 在这个世纪中还引进了几何学的另一分支称为拓扑学. 克莱因的文章"几何"综述了几何历史之主要发展. 许多其他的文章则阐述特别的几何学的性质. 克莱因的第二篇文章讨论了射影几何学的性质及与欧氏几何学的关系. 勒柯尔白也(Le Corbeiller)的文章论述了黎曼几何. 塔克(Tucker)和贝利(Bailey)介绍了拓扑学的概念. 18 世纪最伟大的数学家欧拉(Euler)的一篇文章和辛布洛特(Shinbrot)的文章详细叙述了拓扑学的两个特殊的题目.

过去只起辅助角色的统计学和概率论这两个学科在 20 世纪里不仅得到高度发展，而且比数学的其他任何分支都应用到更广泛和更不相同的领域. 艾也尔(Ayer)，卡茨(Kac)和韦弗尔(Weaver)阐述了这门数学并谈到其许多应用.

不是所有的数学综述都包含在这一部分里. 例如在第一部分，哈尔莫斯(Halmos)的文章就包含了解析几何的基本观点的精美的叙述. 柯朗(Courant)概述了近代抽象数学的许多论题. 惠塔克(Whittaker)在第二部分的文章中介绍了哈密尔顿(Hamilton)有关四元数的工作及与复数的关系. 在第五部分乌拉姆(Ulam)的论电脑的文章中则包含着有关数论和组合分析的某些工作.

在第三部分中没有介绍分析这个数学分支，但本书并不是要忽视它. 正如我们已经指出，分析是代数的延伸. 有多种因素使得对分析作一个鸟瞰或某种洞察变得很困难. 数学的这一部分的基本主题，微积分即是建立在诸如极限等新概念之上的，它们比代数和几何的概念更为精致，

也是建立在一大批新的技术之上的. 微积分之后还有许多的主题,例如常微分方程,偏微分方程,微分几何,变分法,以及单复变函数. 所有这些都用到微积分. 然而不容易用一个统一的观点来处理它们. 此外,在数学的三个主要领域中,分析的概念和技术对于研究自然界又最为重要,所以本书中对整个数学本身作的概述只好暂付厥如.

不管怎样,在这本书的许多文章中可以搜集到大量有关分析的内容. 例如,在这一部分中勒柯尔白也的文章提供了一个精彩的黎曼几何引论,它是微分几何的一部分并且确实是应用于相对论的那一部分. 在第五部分中爱因斯坦和伽莫夫(Gamow)的文章也讨论了这个应用. 有关微分方程如何应用可从纽曼(Newman)在第二部分中关于拉普拉斯和麦克斯韦的传记及第五部分狄拉克(Dirac)的文章中略知一二.

不过数学是一个积累的发展,想写一篇综述就能解释清楚那些必需广泛背景的深刻的课题真是一个奇迹. 如果说学习数学有什么困难的话,那么困难并不在于那些概念的内涵有多难,而只是必须循序地掌握大量的概念. 因此掌握了初等数学的读者可以满怀信心地去阅读许多文章的文献目录中所推荐的其他有关分析的读物.

13.

数

戴维斯(Philip J. Davis),1964 年 9 月号

按通俗的定义,数学家就是精通数字的人.但是大多数数学家并不同意.他们指出,在弄清银行帐单方面他们同任何其他人会遇到同样的困难,并且他们更愿用下面的轶闻来支持自己的看法,这就是牛顿是造币厂的厂长,但却雇了个帐房先生来管他的帐.他们更认为计算尺和电脑之开发就是如同拐杖来帮助数学家的.

所有这些都是显然无关紧要的.如果不是数学家,谁来充当奇数和偶数,方数和圆数的管理员?难道我们应当向别的其他的权威人士去打听和求助有关斐波那契(Fibonacci)数,刘维尔(Liouville)数,超复数以及超限数的知识吗?我们别把事情搞错了:数学今天是并且一直是出类拔萃的数字游戏.美国大数学家伯克荷夫(G. D. Birkhoff)有一次说,有关整数提出的简单的难题曾经是几个世纪以来振兴数学的一个源泉.

数是文明开化的不可或缺的工具,用以将人类活动纳入一定的秩序.数的最初始的应用中,是充当识别标志:如电话号码,汽车驾照,邮政编码一样等.在这个水平上我们只区别一个数与另一个数;这些数并不服从算术运算.(我们怎么也不打算把伯恩斯坦(Leonard Bernstein)的电话号码同伊莉莎白·泰勒(Elizabeth Taylor)的电话号码加起来.*)在稍微高一点的水平上,我们应用正整数的自然顺序:如在买肉的柜台上按号数排队,或者在赛跑终点排名次顺序.这里仍然无需对数作运算;我们感兴趣的是一个数是否比另一个数大或小.直到我们问:"多少?"这一阶段时才真正用到全面的意义下的算术.这时我们才必须面对加,减,乘,除,平方以及关于数的

* 译注:伯恩斯坦是 20 世纪伟大的古典音乐指挥家之一,而伊莉莎白·泰勒是著名的女电影明星.

新世界的数，用点和杠记号，记录了墨西哥维拉克鲁茨州一块残破的奥尔美克碑的日期．每个点等于一单位；每个杠等于五．这些数表示七个 400"年"（在图的上端没有印出来），加 16 个 20"年"（即最上的残留数字，它的点受蚀了），加六"年"．每年有 360 天，加 16"月"每个有 20 天，加 18 天．从该系统的神秘的纪元起总共经过的时间约 3,127"年"．采用一种与公元纪元换算方法，这等价于公元前 4 291 年的 11 月，并且是两半球第二个古老的日期的记录．

更加精心设计的讨论.

文明开化的复杂性反映在其数的复杂性中.二千五百年前巴比伦人用简单的整数来讨论绵羊的所有权,并用简单的算术来记录行星的运动.今天,数理经济学家应用矩阵代数来描述成百上千的企业之间的互相关联(参见"社会科学中之数学",第467页),并且物理学家应用"希尔伯特空间"——一种数的概念,高于正整数七个抽象水平——来预测量子现象(参见"物理科学中之数学",第414页).

在数学中用到的数系可以分成五个主要阶段.从最简单的到最复杂的.它们是:(1)仅由正整数组成的数系;(2)其次稍高一点的阶段,包括正的和负的整数及零;(3)有理数,包括分数与整数;(4)实数,包括无理数在内,例如 π;(5)复数,引进了"虚"数 $\sqrt{-1}$.

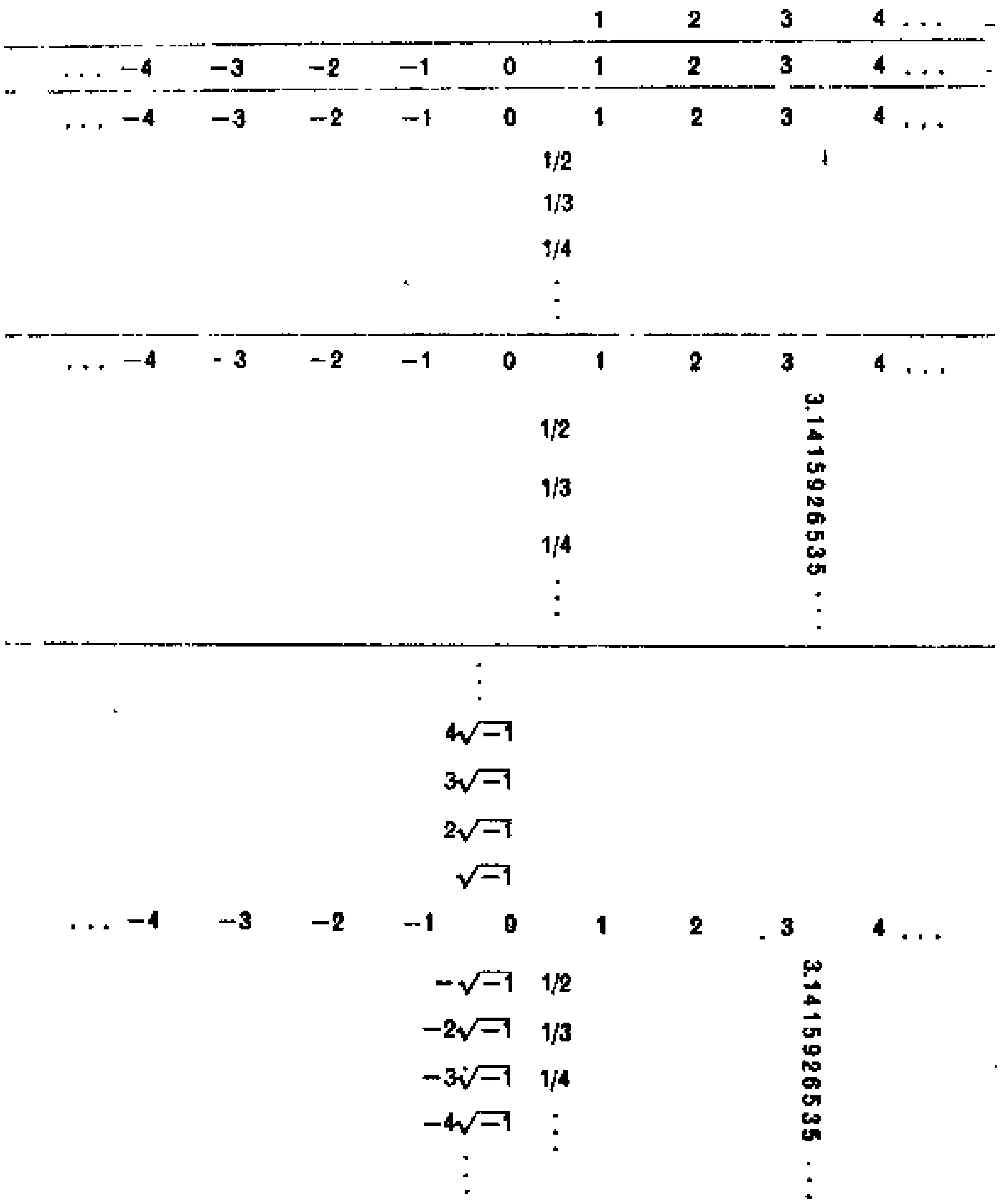
正整数是小孩子在数数时学到的数.它们通常被写作1,2,3,4,…,但它们可以用许多不同方式写出,而且事实上确也如此.罗马人把它们写成Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,…;希腊人把它们写成 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$;在只包含数0和1的二进数系统中,对应的数被写成1,10,11,100,….所有这些变化其实是一回事:他们运用了不同的记号来记一些实体,而对这些实体的意义和顺序人们的理解是一致的.

早期人类只需要最前面的几个整数,然而随着文明的进步,他必须发明越来越大的数.这个进步不是一蹴而就的.正如肖伯纳(Bernard Shaw)在《人与超人》中说:"对于不能数出比自己指头更多的数字的丛林人而言,十一是一个不可数的极大的量".迟到公元前3世纪好像还没有系统的办法来表示大的数.阿基米德于是在他的著作《数沙者》中建议了一个笨重的办法称呼它们.

正当人们为给大数起名字而挣扎时,希腊数学家们却从有限一下就跳到无限.上述系列中在4以后用三个小点:4,…就表示这个跳跃.它们指出在4后面有一个整数,并且在4的后继者后面还有另一个,如此这般跑过无限多个整数.对于古代人,这个概念是想像力的一个最高级的举动,因为它与所有的物理实验和宇宙必须是有限的这一哲学信仰都是背道而驰的.这个大胆的无限概念开启了数学的广阔的可能性,同时它也创造出悖论.它的涵义时至今日尚不能完全看透.

说来也奇怪,从正的到负的整数这一步显得更难完成.负数在今天看来很平常,零下10度是一个尽人皆知的量,而且最小的儿童也会熟练地倒计数:"……五,四,三,二,一……".但是希腊人只在用代数表示正方形和长方形面积时涉及负数,例如 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$(参见第148页插图).负数直到卡尔丹诺(Girolano Cardano)的《大术》(*Ars Magna*)于1545年出版才完全进入数学.

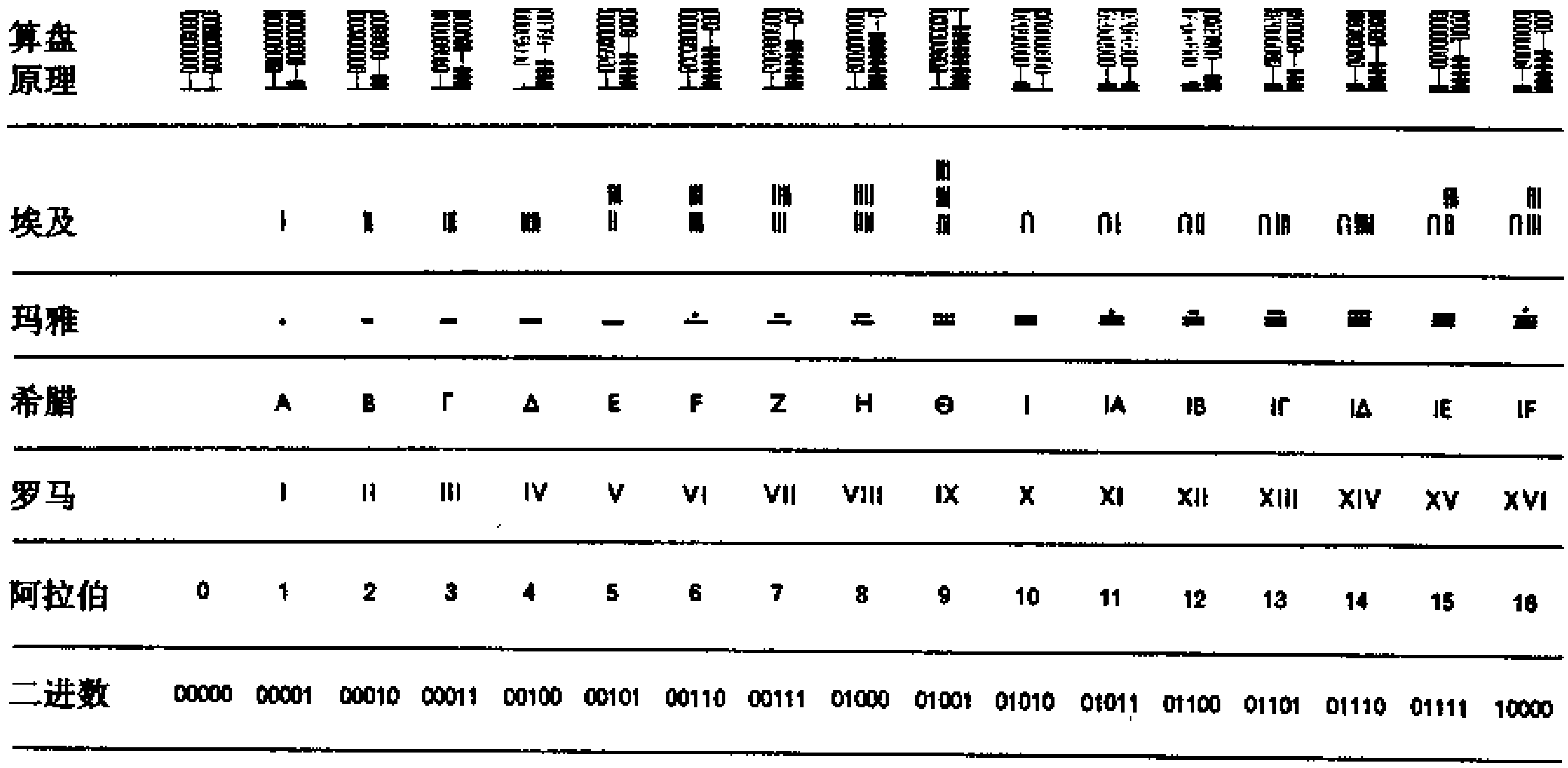
分数,或有理数(它们在数论中的名称),比负数更为古老.它们出现在最早的数学手稿中并



数的概念的发展是逐步的，后继的系统包括它的前面的．最原始的概念只由正整数组成，紧接着是一个推广的概念将零和负整数包括在内．接着添加进去的两个概念是有理数和无理数，后者可由它们的十进无限不循环小数式来识别．这便完成了实数系统．最后一列表示复数，它们一开始是想像力的文艺复兴式的飞跃，后来则被证实对数学物理和工程技术极为重要．复数由实数与量 $\sqrt{-1}$（或写作 i）组合而成．

且早在公元前 1550 年在埃及的莱因德纸草书中就讨论过它们了．现在分数的写法（例如 1/4，1/5，8/13）还有现在对它们施行算术的方法则是从 15 和 16 世纪开始就通行了．今天多数老百姓可能不能正确地将 1/4 和 1/5 相加．（的确，难道他们必须经常做这种事吗？）所以掌握分数决不是一个现在不再讨论的问题．近来由于在某些学校的新数学课程中分数的处理方法不同，赞

成取消的学校和反对取消的学校反唇相讥，以致成了新闻界长期争论的事情. 这场争论产生于对很多问题都有分歧的意见，诸如学校数学的实践的和美学的目的应当是什么；困惑的外行人，早餐时一边吃着鸡蛋喝着咖啡一边读着报纸，可能已经留下这样的印象：他们曾经学到的有关分数的每项知识都是错误的甚至是不道德的.



图中把古代和近代关于从 1 到 16 的数的记号排在它们用两柱算盘上的表示法下方. 这六个例子中除两个以外都以 10 为底；这些以 10 为底的数在超过 10 时数码就会是重复数字的再次出现. 不论这些数码的记号是小木棍或者每个数码各有单独的符号. 玛雅记号以 20 为底并在数字 5 以后重复. 二进系统以 2 为底并且所有的数都只用一对记号 0 和 1 来写出. 因此二或者 2^1 写作 10；四或者 2^2 写作 100，而八或者 2^3 写作 1000. 每增加 2 的一个方幂则增加二进记号的一个数位.

无理数也有一个很长的历史. 在公元前 6 世纪毕达哥拉斯数学学派曾遇到一个既不是整数也不是分数的数. 这个数由毕达哥拉斯定理而得，就是 $\sqrt{2}$：边长为一个单位长度的正方形的对角线（亦即边长为一个单位的直角三角形的斜边）的长度. 希腊人发现 $\sqrt{2}$ 不能表成任何一个 a/b 这样的数，其中 a 和 b 都是整数，即任何一个有理数，而极为困惑不安. 因为他们原来认为所有的数都是有理数，这个发现等于说正方形的对角线没有数学长度！希腊人解决这个悖论的办法就是认定数就是长度. 这导致了一个阻碍算术和代数真正发展的方案，从而希腊数学家们撞上了石头墙.

经过几个世纪数学的发展和成熟，才认识到 2 的平方根可以用在小数点后最后一位后面放

三个圆点来表示. 今天，我只要在一个小计算器上按一下平方根键便得到答案：$\sqrt{2}=1.414\ 21\cdots$. 电子计算机已能把十进制小数算到几千位*. 任何一个可以写成如下形式的数——在十进小数点左边是一位或几位整数，而在小数点右边则是整数的无限序列——这就是一个"实"数. 我们可以用这个办法表示正整数(例如，$17=17.000\ 0\cdots$)，负整数($-3=-3.000\ 0\cdots$)或有理数($17\frac{1}{5}=17.2000\ 0\cdots$). 有些有理数不能表作右端为一串零；例如，七分之一的十进小数为 $1/7=0.142\ 857\ 142\ 857\ 142\ 857\cdots$. 使这个数成为"有理的"是这样一个事实，它在十进小数点右边是由同样的一段整数 142857 无限反复循环. 被称为"无理的"数则是那样一些数，如 2 的平方根，在十进小数中它是一个无限的不反复循环的序列. 最为人所共知的无理数的例子是：$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\ 3\cdots$ 和 $\pi=3.141\ 592\ 653\ 5\cdots$. 无理数当然都包括在实数中.

在"复数"领域中我们遇到了那种被称为"虚的"数——"虚"这个有些古怪的词还是算术中民风古朴的时代的一个术语. 复数的特点是有这样一个"量"$\sqrt{-1}$，它乘上自己得-1. 因为这公然违抗了两个正数或两个负数之乘积均为正这个基本规则，$\sqrt{-1}$(或通常写作 i)的确是个怪物：一个既不能称为正数也不能称为负数的数. 莱布尼茨于 1702 年说"虚数是上帝之灵的奇妙的飞舞；它们几乎是两栖于存在与非存在之间".

从文艺复兴以来，虽然数学家未能说明这些使人着迷的虚数是什么，但他们应用复数(一般形式为 $a+b\sqrt{-1}$)来解方程并发现了许多漂亮的恒等式. 棣莫弗(Abraham de Moivre)发现公式$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta$. 欧拉发现另一个相关公式：

$$e^{\pi\sqrt{-1}}=-1$$

(这里 e 是"自然对数"的底，2.718 28…).

复数直到 19 世纪数学家们为它们找到了具体意义，以前始终停留在纯粹形式计算的水平. 挪威的韦塞尔(Caspar Wessel)发现一个办法来几何地表示它们(见第 150 页插图)，从而这便成了一个最美的结构，即众所周知的复变函数理论的基础. 后来爱尔兰数学家哈密尔顿(William Rowan Hamilton)发展了一个复数的代数解释，每个复数都用一对通常的数来表示. 这个观念对于代数的公理方法的发展提供了一个基础.

同时，物理学家发现复数在描述不同的物理现象时是有用的. 这种数开始进入静电学，流体力学，气体动力学，交流电学，各种其他形式的振动系统以及甚至量子力学等方程之中. 当今理论物理和工程学的许多著作都是用复数系统的语言来撰写的.

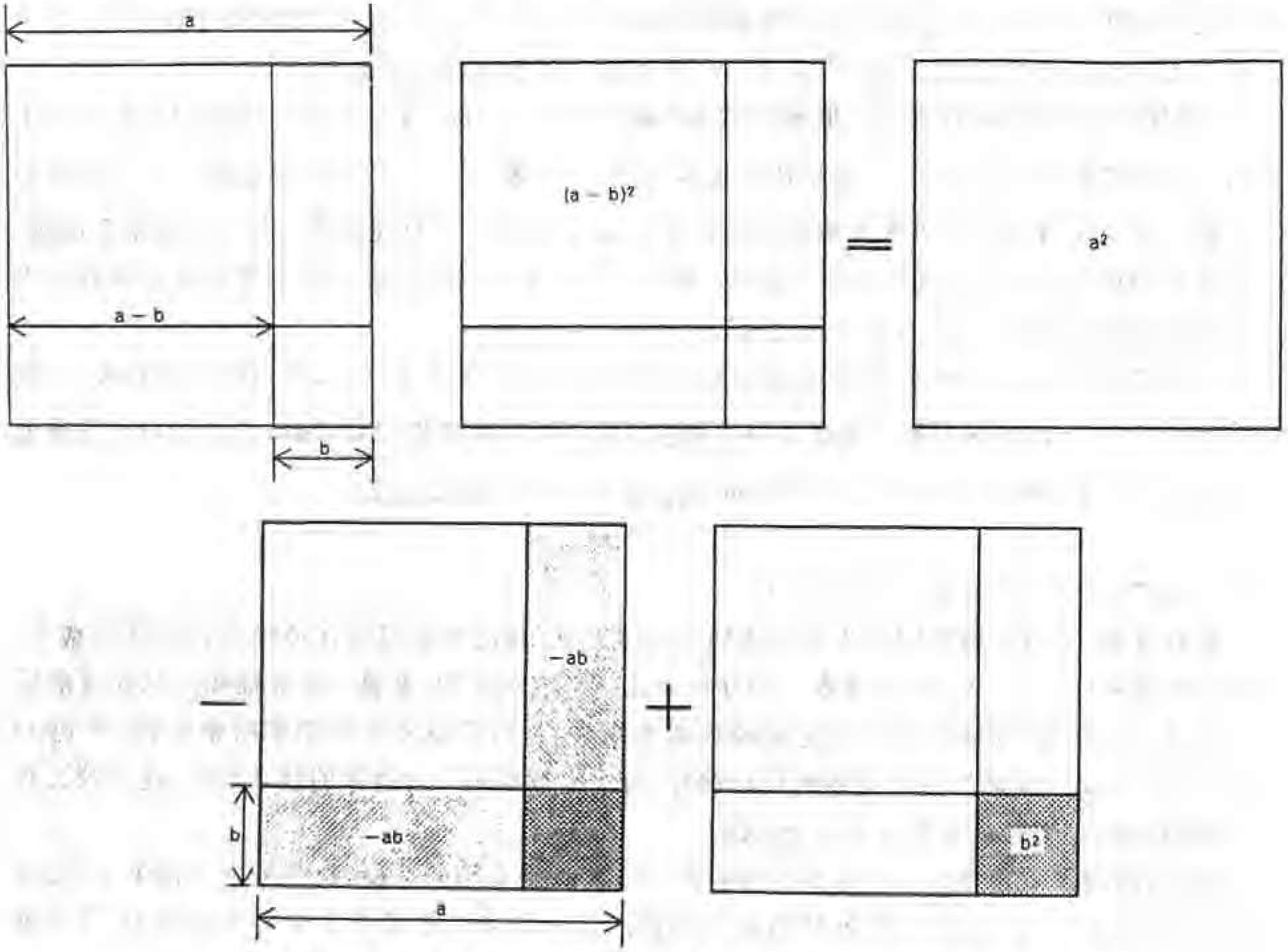
---

* 译注：已有人用计算机把 π 算到十几万亿位.

在 19 世纪数学家们发明了许多新的数的系统. 这些现代的系统中有三个特别值得注意：四元数，矩阵和超限数.

四元数是哈密尔顿的伟大创造. 他花了好几年深思这样一个事实，复数的乘法可简单地解释为平面的一个旋转. 这个概念能否推广？能否发明一类新的数并定义一类新的乘法使得三维空间中的一个旋转可以简单地表为乘法？哈密尔顿称这样一个数为一个"仨"(三元数)；正如韦塞尔表复数为二维平面上的一个点，"仨"可以表作三维空间中的一个点.

这个问题是一个啃不动的核桃. 它长时间地留在哈密尔顿的心头，以至他的家人也因此为他

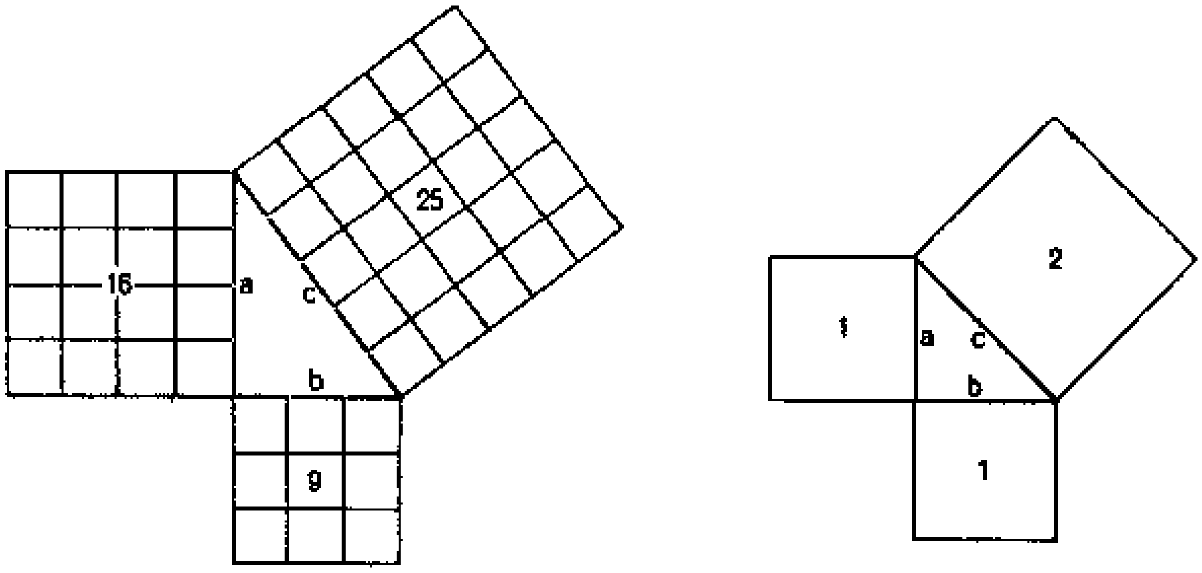


负数被希腊人用直线和有界面积而具体化. 他们完全知道以 $a-b$ 为边的正方形按面积等于以 a 为边的正方形减去两个长为 a 宽为 b 的长方形再加这两个长方形相重叠部分 b^2.

发愁. 如他自己所说，当他下楼去吃早餐时，他的一个儿子会问："爸爸，您能把仨相乘了吗?"而爸爸则回答："不，我只能把它相加和相减."

公元 1843 年的一天，当他同妻子一起沿着都柏林*的运河散步时，哈密尔顿忽然想起一个办法来乘仨. 他是如此得意以至他取出一把小刀当场立即在布鲁姆桥上刻下这个问题的关键，肯定使过路的人感到迷惑，他们读到："$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$".

字母 i，j 和 k 表示超复数，哈密尔顿称之为四元数(一个四元数的一般形为 $a+bi+cj+dk$，其中 a,b,c,d 为实数). 正如 $\sqrt{-1}$ 的平方是 -1，同样 $i^2=-1$，$j^2=-1$ 和 $k^2=-1$. 四元数乘法之关键是交换律不成立(见第 150 页之表). 在通常数的情形 $ab=ba$. 但当两个四元数相乘而交换因子次序时，其乘积可能变化，例如，$ij=k$ 但 $ji=-k$.



$a^2+b^2=c^2$　$16+9=25$　$c=\sqrt{25}=5$

$a^2+b^2=c^2$　$1+1=2$　$c=\sqrt{2}$

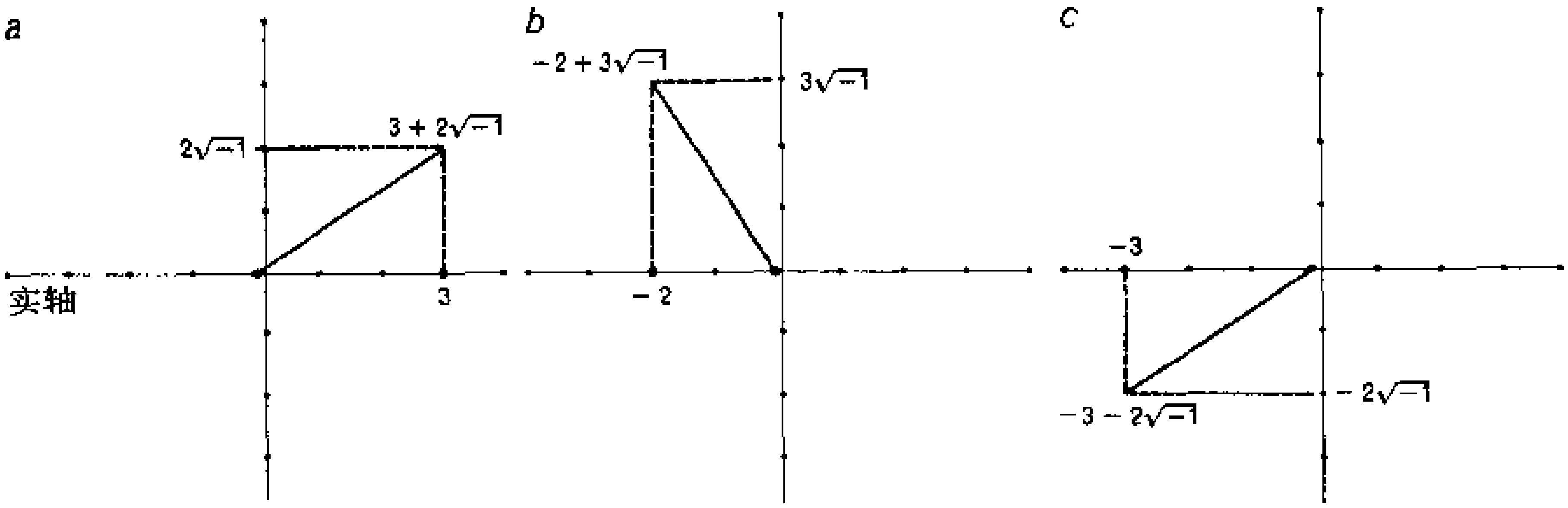
无理数看来对希腊人是一种悖论，他们不能想像既不是整数又不是分数的数，然而他们能几何地表出这种数. 若一个直角三角形中两直角边分别为 3 和 4，则斜边长必为 5. 它也是有理数. 但是没有等于 $\sqrt{2}$ 的有理数，虽然 $\sqrt{2}$ 是直角边均为 1 的直角三角形的斜边. 事实上，这就是说：一段可以触摸的而且很容易构造的线段却是"不可度量的".

上述第二个现代概念矩阵大概同时是由哈密尔顿及英国数学家西尔维斯特(J. J. Sylvester)和凯莱(Arthur Cayley)发展起来的. 一个矩阵可以看成数排成的一个矩形列阵. 例如

$$\begin{pmatrix}1 & 6 & 7\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

---

* 译注：都柏林(Dublin)是爱尔兰首都. 哈密尔顿是爱尔兰人，详见本书哈密尔顿的传记.



复数可以用一种几何方式来表示和进行运算. 在实轴即 x 轴上, 每个单位是 1 或 −1. 在虚轴即 y 轴上, 每个单位是 $i=\sqrt{-1}$ 或 $-i$. 因此平面上的所有点可以给定形如 $x+yi$ 的复数. 如果一条直线通过原点及平面上任一点(如 a 图所示)旋转 90 度角(如 b 图所示), 其结果是原来的复数乘 $\sqrt{-1}$ 之积. c 图中表示再作一旋转, 即再乘以 i 的结果.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	−j
j	j	−k	−1	i
k	k	j	−i	−1

由哈密尔顿发明的四元数乘法表阐述了这些虚幻的量的不可交换性. 例如, 量 j 这一行, 乘 k 得 i, 但 k 行乘 j 得 −i. 这三个量自乘都等于 −1.

是一个矩阵. 整个列阵应被视为一个实体. 在这样的情况下, 这些实体之间可定义加法, 减法和乘法. 结果是得到一系列事物, 它们的行为酷似通常的数, 并在纯粹和应用数学的许多部门有巨大的功效.

第三个现代的数的概念, 超限数, 显示了一个全然不同的观念. 伟大的德国数学家希尔伯特(David Hilbert)提出一个非常有趣的设想, 通常称之为"希尔伯特的旅馆"来解释它. 那些去参观纽约世界博览会而找不到旅馆的那些旅客可能会很欣赏它. 一位旅客来到希尔伯特的旅馆想租一个房间. "嗯", 经理说"客满了, 不过这不是不可解决的问题; 我们能够为你腾出地方来". 他把新客人安排在 1 号房, 将 1 号房的人搬到 2 号房, 2 号房的人搬到 3 号房, N 号房的人搬到 $N+1$ 号房等等. 这个旅馆正是有无限多间房.

然而为什么经理说旅馆"客满了"? 伽利略注意到一个类似的悖论. 每一个整数可以平方, 由此我们可以断言平方数与整数一样多. 但为什么会这样, 按照熟知的事实存在不是平方数的整数, 如 2, 3, 5, 6, …?

数学的一个永无止境的迷人之处就是: 它的最棘手的悖论恰好是通向蓬勃发展的漂亮理论的

道路. 19 世纪德国数学家康托(Georg Cantor)将这个悖论转变为一个新的数系和无限数的算术.

他一开始定义一个无限集合为一个可以与自己的一个部分建立一一对应关系的集合,例如整数可以一一对应于它们的平方数. 他注意到每个可以与所有整数的集合建立一一对应关系的集合必然含有无限多个元素,他记这个"数"为$\aleph$(读作阿列弗(aleph),希伯来文第一个字母). 康托给这"第一个超限基数"一个零下标. 接着,他指出有无限多个另外的集合(例如实数集合)不能与正整数建立一一对应,因为它们要比那个集合大得多. 它们的大小要用另外的超限基数($\aleph_1$,$\aleph_2$ 等等)来表示. 由以上素材出发,康托发展了一套算术,涵盖了通常的和超限的两种数. 在这个算术里,某些通常的法则被抛弃了,我们得到一些陌生的等式,如$\aleph_0+1=\aleph_0$. 这正好用符号的方式表示出那个旅馆悖论.

超限数至今尚未能在数学之外找到应用. 但在数学内部它们有着相当大的影响,并唤起深刻的逻辑的和哲学的思考. 康托的著名的"连续统假设"遗留下一批未解决的问题至今还困扰着数学家们. 最近几年其中一些问题已被加州大学伯克利分校的塔尔斯基(Alfred Tarski)和斯坦福大学的柯恩(Paul J. Cohen)所解决 *.

我们已经复习了数的游戏的主要事实(或剧中人);现在我们必须审查一下游戏规则. 对于非数学家而言这似乎是一个显而易见的"练习". 欧几里得的几何是建立在"自明"的公理之上,但是在 19 世纪严格审查这些公理时,发现了漏洞. 为了把几何置于坚实的基础上,必须将不相容性的弱点加以修补. 但是,你可能问,难道关于算术和代数的简单规则也需要审查和检验吗? 被欧几里得公理系的缺点所震撼,并被诸如四元数这些新的数的概念的惊人的面貌所驱使,19 世纪的许多数学家都从事系统地研究数论的公理.

算术的法则相互独立吗? 所谓独立就是说其中每一个都不可能由其他法则合乎逻辑地导出. 它们真的是基本的吗,或者它们可以从更原始的,更简单的并且更优美的一组法则推出? 这类问题的解答是用公理化的探究方案来进行的,而且至今仍在继续进行之中. 它们中的某些问题已经得到严格的并且从美学观点看也非常吸引人的答案,而且在这个过程中得到更加新的概念,如"环","域","群"及"格",每个概念都有自己的一组有关运算的法则以及自己的特有理论.

19 世纪 70 年代取得的一项重大成就是建立了实数的一组公理. 它可以概括成一句话,实数系统是一个"完备有序域". 这些词的每一个都表示一组法则而定义了数的行为.

---

* 译注:连续统假设问题已由柯恩在 1963 年解决. 他指出这个问题是所谓"不可判定的". 详见本书第四部分第 30 章:"非康托集论".

首先,"域"这词表示一个数学系统,在其中加法和乘法满足熟知的法则,即(1)加法交换律:$x+y=y+x$;(2)加法结合律:$x+(y+z)=(x+y)+z$;(3)乘法交换律:$xy=yx$;(4)乘法结合律:$x(yz)=(xy)z$;(5)分配律:$x(y+z)=xy+xz$.

此外一个域必须含有一个零元素0,它由下述性质刻画:对于任何元素x,$x+0=x$.它还包含一个单位元素1,具有性质:$1\cdot x=x$.对于一个域中的任何元素x存在另一元素$-x$使得$-x+x=0$.这是减法得以建立的基础.域的另一条公理是乘法的消去律,即若$xy=xz$则$y=z$(当x不等于零时).最后,对任何不为零的元素x,域中包含着一个元素$1/x$使得$x(1/x)=1$.这是除法的基础.简言之,一个域是一个系统(例如有理数)其元素可以按熟知的算术法则加,减,乘和除.

现在考虑第二个词,一个域是"有序的"如果它的元素可以比较大小.一个用来表示这个性质的速记符号是$>$,意思是"大于".这个符号要求满足它自己的一组法则,即(1)三分律:对任何两个元素x和y,$x>y$,$x=y$或$y>x$这三个关系中恰有一个成立;(2)传递性:若$x>y$并且$y>z$,则$x>z$;(3)加法律:若$x>y$,则$x+z>y+z$;(4)乘法律:若$x>y$并且$z>0$,则$xz>yz$.

最后,把实数系统描写为"完备有序域"时,"完备"一词的意思是什么?这必须讨论一个由类似$\sqrt{2}$的数提出的问题.可以这样说,$\sqrt{2}$是由一个有理数序列给出,如1,1.4,1.41,1.414,…提供了$\sqrt{2}$的越来越好的逼近.这就是说,$1^2=1$,$(1.4)^2=1.96$,$(1.41)^2=1.9981$,$(1.414)^2=1.999396$,….这些平方给出了一个越来越接近2的数列.然而注意,原来的数列(1,1.4,1.41,…)也是越来越接近另外一个数.我们认为$\sqrt{2}$就是这样一个逼近序列的"极限值".为此我们需要一个精确的概念来表示这样一句话:"一个序列中的数越来越接近另外一个数",并且我们需要一个保证,我们的数系是内含足够丰富的,足以为所有这样的序列都提供一个极限数.

跟随着康托的脚步走,考虑我们的有序域中的一个数列.我们将说这个序列的数越来越接近另外一个数,如果序列中充分远的任意两个数之差可以小到如我们所希望的那样.这意思是说,例如,充分远的所有项互相相差至多1/10.如果你愿意走得更远些,它们可以做到相差至多1/100,还可以进一步做下去.这样的一个数列称为一个"正则序列".一个有序域称为一个"完备的"有序域,如果对应于其中元素的任意正则序列,存在域中一个元素而此序列逼近它为极限值.这就是"完备性法则":有理数之间的"间隙"已经被填充了.这是实数系统的最后一条公理要求.

所有这些法则看上去是如此初等,它们几乎不需要叙述,更用不着费力去分析.然而,系统地研究它们的方案却受到广泛的褒奖.多年的琢磨使得公理系统已经化约为高度简化的形式.已经发现为了描写和运算实数系统我们方才列举的那些法则是必不可少的,并且也是充分的,用不着再画蛇添足去加上什么;也不能丢掉它们中任何一条,否则这个系统便坏了.并且,如我曾经说过

的，这个公理探究方案已经解答了若干有关数的基本问题，并且产生出大量的富有成果的新概念.

公理探究的精神遍及全部现代数学；它甚至渗透到中学数学的教学中. 最近一位中学教师对我说："在过去的日子里，过程的法则虽然印在精美的书本之中，但是在课堂里基本上是被忽略不讲的. 而今精美的书本已被分解为许多主要过程. 但是又有了新的危险，即学生可能懂得按交换律 2＋3＝3＋2. 但不知道其和为 5."当然，任何事都可能干过头. 特别地关注于公理化，会类似于一个舞蹈小组迷恋于每星期会面只讨论芭蕾设计，而不跳舞. 在数学中，人们追求的应与在任何其他方面一样，是坚实的平衡.

我们已经考虑了数的运算；最终我们必须面对那个更为基本的问题：归根结蒂数是什么？今日之数学家倾向于用太多的公理术语来回答这个问题，而不用认识论的和哲学的术语.

为了阐释数，或更为了创造数，试用综合法替代分析法看来是聪明的. 这个方法就是从原始的有意义的元素出发，然后看是否能一步一步构作出一些元素，得到对应于实数系统的那个事物.

我们可以采取正整数作为原始的元素. 它们是宇宙的一个具体的方面，其表现形式可以是人类手上指头的数目或任何别的要计数的东西. 正如 19 世纪德国数学家克罗内克(Leopold Kronecker)说的，正整数是上帝的劳作，而所有其他的数则是凡人的劳作. 在 19 世纪末，意大利的皮亚诺(Giuseppe Peano)提供了用五条公理给正整数一个本原的描述：(1)1 是一个正整数；(2)每个正整数有一个唯一的正整数为其后继者；(3)没有任何正整数以 1 为后继者；(4)不同的正整数有不同的后继者；(5)设一个命题对 1 成立，再假设：若它对无论哪个正整数成立，它也对该整数之后继者成立，则此命题对所有正整数都成立.（最后这条公理是著名的"数学归纳法原理".）

现在整个事情明朗了. 公理：存在一个皮亚诺系统. 这一个构作过程创造了正整数，因为这个皮亚诺系统，或者说满足这五条要求的对象系统，本质上等价于正整数集合. 所以从皮亚诺的五条法则出发，可以导出正整数的所有熟知性质.

一旦我们有了正整数供我们使用和塑造，我们就可以继续愉快地前进，如克罗内克所建议那样，去构作数的观念的推广. 例如，由正整数的运算，我们可以创造负数和零. 这样做的一个方便的办法是将正整数的对子加以运算. 考虑一个一般的对子(a,b)，由它我们借助运算 $a-b$ 将产生一个整数. 当 a 大于 b 时，这个减法产生一个正整数；当 b 大于 a 时，得到的整数 $a-b$ 是负的；当 a 等于 b 时，则 $a-b$ 为零. 因此正整数的对子可以表示所有整数——正的，负的和零. 但是一个整数可以被许多不同的对子表示，这的确产生了某种含糊不清；例如，对子(6,2)表示 4，然而(7,3)，(8,4)以及许多其他可能的组合也表示 4. 我们为了消除这种含糊不清，干脆约定认为所有这些对子是互相恒等的.

仅仅应用正整数，我们就能够写下一条法则，它将决定一个对子何时等同于另一个对子. 这个法则是$(a,b)=(c,d)$当且仅当$a+d=b+c$.（注意，后一个等式是$a-b=c-d$的改写，但是它没有用到负整数，而减法项要用.）容易证明为确定正整数对子的恒等的这个法则满足支配等式的三条算术规则，即(1)自反性：$(a,b)=(a,b)$；(2)对称性：若$(a,b)=(c,d)$，则$(c,d)=(a,b)$；(3)传递性：若$(a,b)=(c,d)$并且$(c,d)=(e,f)$，则$(a,b)=(e,f)$.

我们可以进而引进一些约定来定义正整数对子的加法和乘法，而这一次又只用到正整数. 对于加法我们有$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$. 因为(a,b)表示$a-b$而(c,d)表示$c-d$，这里加起来就是$(a-b)+(c-d)$. 从代数上说，它等于$(a+c)-(b+d)$，而这是由等式的右端的对子$(a+c,b+d)$表示的. 类似地，正整数对子的乘法定义为$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$. 这里$(a,b)\cdot(c,d)$或$(a-b)(c-d)$，可以代数地表示为$(ac+bd)-(ad+bc)$，而这是由等式右端的对子$(ac+bd,ad+bc)$表示的.

用这种正整数对子来操作，我们可以仔细验证有关整数（正的，负的和零）的所有熟知的运算，而获得同样的结果.

已经构造了所有的整数（作为正整数对子）后，我们可以继续创造所有其他的实数甚至复数. 有理数亦即分数可以构作为通常整数系统中的对子(a,b)，其中a,b分别是我们熟知的分子与分母，所以都是通常的整数，正的或负的，但是应该限制b不能为0. 有此限制后，a和b既然已经是整数，当然如上所述又都是正整数的对子. 例如$a=(a_1,a_2)$，$b=(b_1,b_2)$. 但$b_1\neq b_2$. 这样一来，有理数就可以表作正整数对子的对子*. 对于由有理数的无限序列造出的实数，我们只能采用有理数的无限序列而不能用对子. 当我们来到复数时，我们再一次用对子；其实，历史上第一次（由哈密尔顿）运用数的对子这个办法正是为了表示复数. 我们可以把一个复数$a+b\sqrt{-1}$想成一个实数对子(a,b)，对子中的第一个数表示该复数中的实部而第二个数表示虚部. 现在认为两个对子相等当且仅当它们含有相同的实部和虚部；这就是说，$(a,b)=(c,d)$当且仅当$a=c$并且$b=d$. 加法法则与实数的情形类似：$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$. 这平行于两个实数加法的"通常的"做法：$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$. 复数的乘法公式$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$也对应于这种数的通常乘法：$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}$. 按这些法则操作的实数对子就可以复制出复数的全部我们所熟悉的行为. 而神秘的$\sqrt{-1}$，那个"在存在与非存在之间的两栖物"则作为数的对子(0,1)浮现在公理学的海洋中.

---

*　译注：这里译者在文字上作了一些增补.

因此，经过这四个步骤的构作和抽象，我们从原始的正整数前进到复数. 正整数的对子，用某种方式组合起来，导致所有的整数的集合. 整数的对子(也就是说，正整数对子的对子)，用一种不同的方式组合起来，导致有理数. 有理数的无限序列导致实数. 最后，实数的对子导致复数.

前面我们介绍了关于数的第二个现代概念——矩阵(第 149 页). 其实矩阵的元素都是数——实数或复数. 矩阵的运算规则(游戏规则)也就归结为数的运算规则了. 下面的框图就可以帮助读者理解它们.

a

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_4+b_4 & a_5+b_5 & a_6+b_6 \\ a_7+b_7 & a_8+b_8 & a_9+b_9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-8 & 0+0 & 0+1 \\ -3+4 & 1+5 & -6-1 \\ 4+0 & 0+3 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

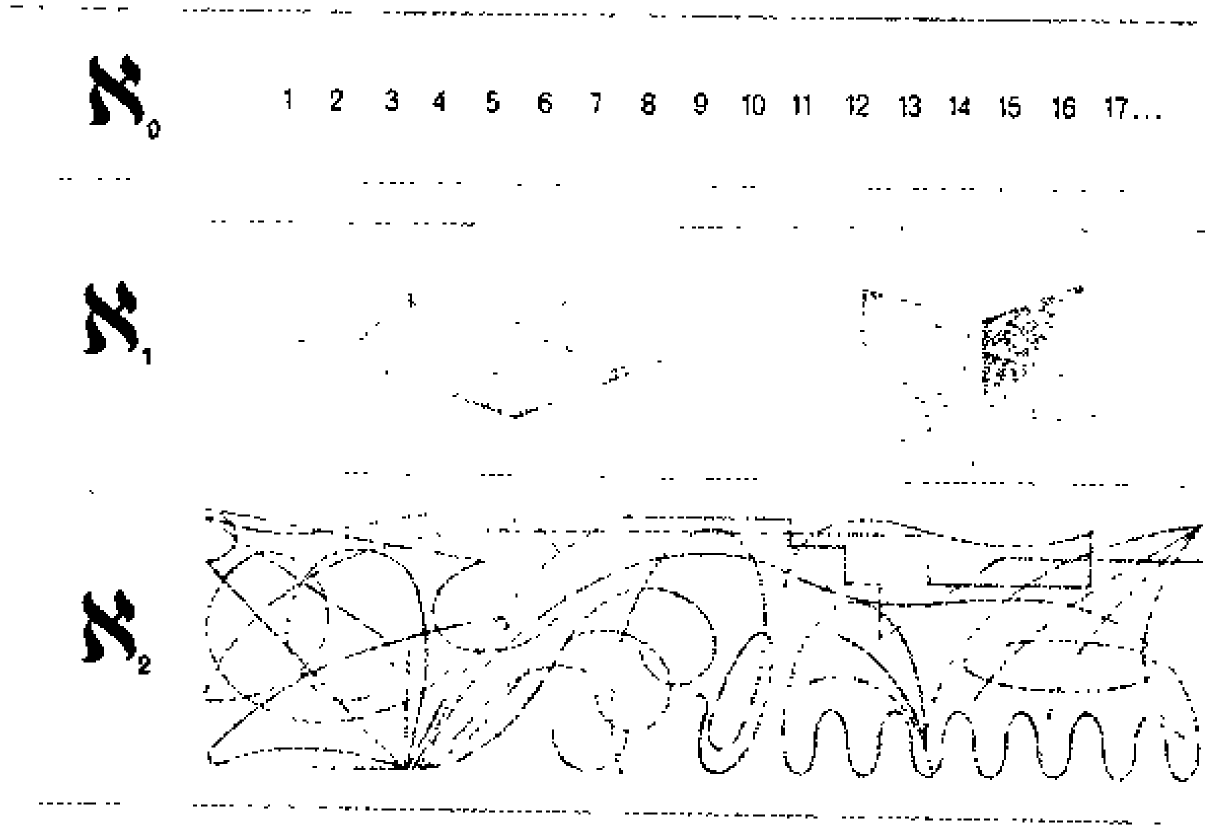
b

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 & b_4 & b_7 \\ b_2 & b_5 & b_8 \\ b_3 & b_6 & b_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & a_1b_4+a_2b_5+a_3b_6 & a_1b_7+a_2b_8+a_3b_9 \\ a_4b_1+a_5b_2+a_6b_3 & a_4b_4+a_5b_5+a_6b_6 & a_4b_7+a_5b_8+a_6b_9 \\ a_7b_1+a_8b_2+a_9b_3 & a_7b_4+a_8b_5+a_9b_6 & a_7b_7+a_8b_8+a_9b_9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+0+5 & 12+0+1 & 18+0-7 \\ 4+0-10 & 2-3-2 & 3-18+14 \\ 32+0-30 & 16+5-6 & 24+30+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 13 & 11 \\ -6 & -3 & -1 \\ 2 & 15 & 96 \end{pmatrix}$$

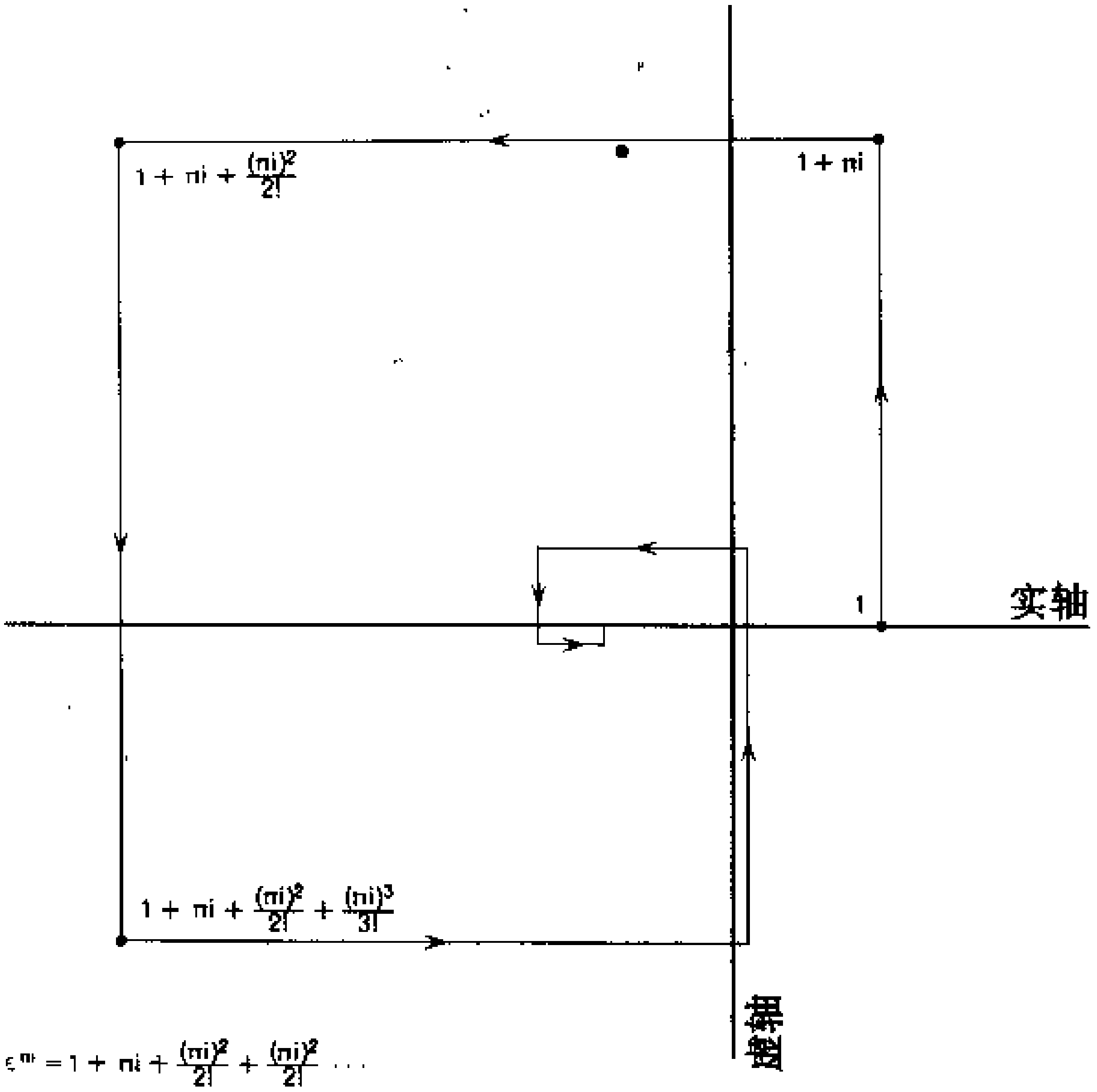
矩阵是数的矩形列阵，它们自身没有数值，然而可以当成一个整体来处理，从而在适当的情况下可以加，减，乘或者除. 这种列阵提供了一个特别方便的方法来计算一系列相关变量的同时变化. 加法可以在一对行数和列数都相同的矩阵间进行；我们一行一行地来做，先把头一个矩阵的这一行的每一列的元素加上第二个矩阵的对应元素，于是组成一个新矩阵. (这个过程在上方图中用文字呈示，紧接着下面再用数字重复表示一次.)乘法是较为复杂的过程，这时两个矩阵不必有相同的行数和列数，虽然图示中是相同的；一个 3×2 的矩阵能够乘一个 2×3 的矩阵. 左边矩阵最上一行的每一项分别乘右边矩阵第一列的对应项；三项乘积之和作为乘积矩阵的第一列第一行的元素. 用同样办法处理左边矩阵最上一行与右边矩阵第二列，就得到乘积矩阵的第二列第一行的元素，然后再与右边矩阵的第三列相乘. 整个运算要将左边矩阵的每一行重复进行完.

回顾将我们与毕达哥拉斯隔开的 2 500 年的漫长岁月，我们可以认出有关数的想法的两条溪流．一条是综合的溪流，起源于用小木棍记数，并进而建造复杂度越来越增大的数的概念，很像用原子来建造一个复杂的分子一样．另一方面，还有一条是分析的溪流，凭借它，数学家用把复杂性分解为最原始的元素的办法，从而到达了数的精髓．两条溪流都很重要．职业数学家们今天倾向于注重数在科学中的定性方面，同时强调数学的逻辑结构和符号的潜力．无论如何，数的新观念继续不断地在新杂志中出现，并且现代化的数的理论正在迅速地在我们的教育系统中扩散，甚至到达小学．已经编出了向中学生教高级的数的概念（从集合论到矩阵）的教学大纲，建立了委员会．看来这样说不会错的：它将会激发起我们的下一代对数的令人赞叹的应用以及其神秘性的空前的兴趣．



存在无限多个超限基数．最熟习的 $\aleph_0$ 表示正整数或者任何一个可以与正整数建立一一对应的集合中的"数目"或基数．这些集合是可数的．实数的基数比正整数的基数大．它与一条直线，一个平面或者一个高维空间中的点的基数相同．这些不可数的集合记作 $\aleph_1$．所有可能的点集的"数目"是一个更大的超限基数，记作 $\aleph_2$．*

* 译注：最后两句话应改成：这些不可数的集合的基数记作 c．比 $\aleph_0$ 大的最小的基数记作 $\aleph_1$，因此 $\aleph_1 \leqslant c$．实数集的所有可能的子集的"数目"是一个更大的超限基数 2^c．比 $\aleph_1$ 大的最小的基数记作 $\aleph_2$，因此 $\aleph_2 \leqslant 2^c$．



复数的美妙被用几何方式来转述自然对数之底 e，π 与 $\sqrt{-1}$之间的关系所证实. 等式可以表示为一系列向量之和. 把这些向量加起来并在复平面上逐点标出，这些点形成一个螺旋缠向等于 $\cos m + i\sin m$ 的那个点*.

* 译注：原书误为等于-1. 实际上，当 $m=\pi$ 时，这个螺旋会缠向-1.

14.

数 论

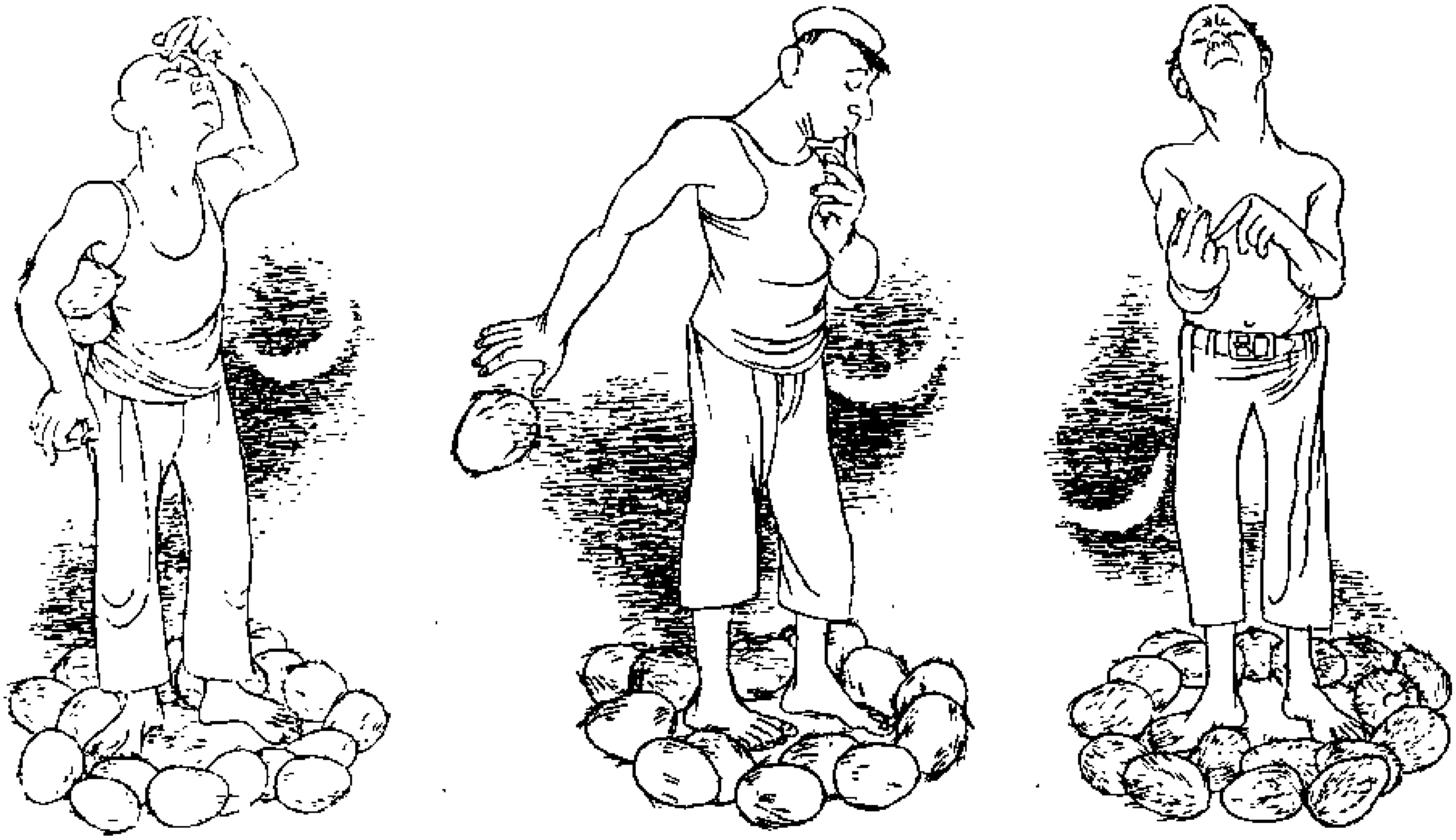
赫尔维茨(Paul S. Herwitz),1951 年 7 月号

遭遇海难而幸存的三位水手发现他们所在的岛上只有椰子可以充饥.他们采集了一大堆椰子,然后决定在将这一堆平分成三个等份之前先睡一觉.在夜里一个水手醒来,他不信任他的同伴,决定不等天亮就取走自己的那一份.他发现当他丢掉一个椰子后他就能把余下的分成三个等份.他将自己的那一份埋起来,把剩下的放成一堆,又回去睡觉.过了一会另一个水手醒来也做了同样的事:他扔了一个椰子,取了余下的三分之一埋起来,然后回去睡觉.再过一会,第三个水手和他的同伴一样多疑,他也做了同样的事.现在问,当初水手们至少要采集多少个椰子才能使最后留下的椰子数是一个整数?(这些水手早上起来发现椰子堆缩小将会如何反应?我们把这个问题留给心理学家.)

设 x 表示水手们采集的椰子数.第一位水手埋了其中他的那一份后,留下 $2/3(x-1)$;第二位留下 $2/3[2/3(x-1)-1]$;最后的等式是 $2/3\{2/3[2/3(x-1)-1]-1\}=y$,这是留到早上的椰子数.这个式子简化得 $8x-27y=38$.作为一个一般的方程,x 有无限多个不同的值的解答,但从我们的特殊问题的条件知道 x 和 y 必须为正整数,并且 x 是使得 y 为一个正整数的最小的正整数.这最后一个条件为我们确定了一个并且只有一个解答,即水手们当初采集的椰子的最小数为 25,而第二天早上剩下的那一堆椰子共有 6 个.

假设是四位水手在这个岛上并且也互相不信任,则我们的问题归结为方程 $81x-256y=525$.如果我们推广这个问题到 n 个水手(其中 n 比 1 大),最后的方程为 $(n-1)^n x-n^n y=(n-1)^n+n(n-1)^{n-1}+n^2(n-1)^{n-2}+\cdots+n^{n-1}(n-1)$.(圆点列表示可能有比我们写出的多几项或少几项.)这个方程本身是一个一般方程 $ax+by=c$ 的一个特例,其中所有数都是整数并且 c 是

常数. 许多问题都导致这种一般方程的特殊情形. 这种方程首先是由希腊数学家丢番图(Diophantus)于公元前250年前后研究的,从而被称为丢番图方程.



多疑的水手们一个一个醒来去将一堆椰子分成三等份. 当初那堆椰子的最小数是多少? 图上并没有显示所有的椰子.

丢番图方程是数论的一块基石. 这个研究分支的目的是发现整数的性质. 它的原理经常用来解决像水手和椰子这类数学难题,但这个事实不应使人误认为数论不是别的,只是科学中的珍品. 整数的许多性质看似简单,其证明常常需要大量优秀的数学家花费多年的心血来完成,而且数论长期以来已成为数学中的一个重要分支. 著名的17世纪法国数学家费马(Pierre de Fermat)被认为是现代数论之父. 费马发现了许多有趣的性质,它们决不是显然的,也不是表面的. 所谓的费马大定理可能和古代的三等分任意角问题一样著名. 费马习惯于在他的书的页边写下注记、定理,而不写证明. 在他的那册丢番图的《算术》书的一页旁他写下了以下"定理":方程 $x^n+y^n=z^n$ 对于大于2的 n 没有非平凡解. 所谓平凡解是指 x,y,z 都是零. * 费马宣称他已

* 译注:应为 $xyz=0$. 整个定理的叙述应为:当 $n>2$ 时,$x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解.

得到这个“定理”的一个证明，然而时至今日对于所有 n 的值还没有找到一般的证明，虽然对于特殊的 n 的值已有了许多证明. * 最为人所熟知的费马方程的特殊情形是毕达哥拉斯定理，其中 $n=2$. 毕达哥拉斯原理可以叙述如下：如果 x 和 y 表示直角三角形的两个边之长而 z 表示斜边之长，则 $x^2+y^2=z^2$. 这是一个丢番图方程，因为未知数的个数比方程的个数多，并且要求整数解.

素数和合数的概念在数论的研究中是首要的. 一个素数是一个只能被它自身(或其反号数)以及 $+1$ 和 -1 所除尽的数. 所有其他的整数** 都是合数，这意味着它们可以被某个不同于它们自身也不同于 1 的数所除而得一整数为商. 一个合数总可以写成两个或更多素数之积. 头几个素数是 2,3,5,7,11,13,17,19,23. 合数 12 可以写成三个素数之积：$2\times2\times3$. 为了寻求一个只会给出素数的简单的代数公式，多次尝试都失败了. 最著名的一个是由费马建议的：他相信对所有正整数值 n 而言 $2^{2^n}+1$ 是一个素数. 对 $n=1,2,3$ 和 4 他分别得到素数 5,17,257 和 65,537. 但是 18 世纪瑞士数学家欧拉指出当 $n=5$ 时，结果不是素数：$2^{2^5}+1=4\ 294\ 967\ 297$，它是一个合数而可以分解因数为 $641\times6\ 700\ 417$. 事实上，对任一大于 4 的 n 的值尚未证明 $2^{2^n}+1$ 是一个素数***. 研究这个公式是艰苦和困难的，因为即使是相对小的 n 的值也会产生很大的数：例如，若 $n=7$，费马数将大于 34×10^{37}，即 34 后面跟上 37 个零. 也有另外的公式到某一个 n 为止都得出素数，例如 n^2-n+41，它对小于 41 的整数 n 是素数，$n^2-79n+1\ 601$ 对于小于 80 的整数 n 值是素数. 然而还没有一个人找到一个公式，它对于 n 的所有值都产生出素数.

素数在整数中的分布是非常不规则的. 19 世纪德国数学家狄利克雷(Peter Gustav Lejeune Dirichlet)证明了在每一个算术级数中都存在着无限多个素数. **** 一个算术级数是这样一个数列，其每项是由前一项加一个确定的数而得；例如 1,3,5,7 就是一个每项加 2 的算术级数. 狄利克雷的证明属于数学的一个分支被称之为解析数论，而不是代数数论. 解析数论应用微积分和函数论来研究整数性质. 狄利克雷定理的真实性可以由某些特例的相对简单的考虑而立即可以说明，但是对于一般的算术级数 $a,a+d,a+2d$ 等等直到最近还必须应用高度技巧性的方法来证明此定理. 1949 年，普林斯顿高等研究所的当时还是青年的数学家赛尔伯格(Atle Selberg)发

---

* 译注：已于 1994 年由怀尔斯(Adrew J. Wiles)以及泰勒(Richard Taylor)完成了一个证明.

** 译注：$+1$ 和 -1 都不算素数，这是由于数论中一个基本定理所需要的. 因此这句话应该改为 $+1$ 和 -1 除外的一切非素数.

*** 译注：至少对于 48 个 n 的值 $2^{2^n}+1$ 是合数.

**** 译注：需加条件：首项与公差互素.

表了一个证明，它将狄利克雷问题置于一个新的观点之下. 赛尔伯格的工作重新唤起了人们对这个问题的兴趣，他的这个证明以及伴随着的若干个相关的证明给他带来了国际声望.

费马在一本书的页边上写下一个关于数的困难定理. 好几代数学家寻求其证明，但是不成功.

有关素数分布的一个尚未解决的问题是孪生素数问题. 所有大于 2 的素数均为奇数，因为任何偶数可被 2 除. 在奇数序列(1,3,5,7,9,11 等等)中已经找到某些对相继的数都是素数，因此称它们为孪生素数，如 3 和 5,5 和 7,11 和 13,17 和 19,29 和 31. 虽然人们认为这种孪生素数为数无限，但尚无人成功地证明了这是对的.

另一类有关素数的问题是由一位德国中学数学教师哥德巴赫(Christian Goldbach)于 1742 年写给欧拉的信中提出的. 哥德巴赫说，他相信每个偶数可写成两个素数之和，并问欧拉能否证明或找到一个例子推翻它. 虽然哥德巴赫在数学史上之为人所知只在于他提出了这个猜测，他的名字由于这个尚未解决的问题而将继续为人们所记住.

如果不叙述伟大的德国数学家高斯(Carl Friedrich Gauss)(1777—1855)则有关数论的讨论便不会算是完全的. 在他的《算术研究》中高斯对数论做出了不朽的贡献. 我们现在将只考虑他

在这本书中研究过的许多问题中的一个. 这就是数的同余的概念,高斯定义如下:如果两个整数之差 $a-b$ 可以被第三个整数 c 所整除,则我们说 a 模 c 同余于 b,或简称 a 同余 b 模 c. 例如,19 同余 7 模 3,因为 $19-7=12$ 而 12 可被 3 整除. 需要用"同余"和"模"这两个专门的词,暗示我们这个概念的重要性. 前一个词来自拉丁文 congruere,意思是相重或者一致,而后一词来自拉丁文 modulus,意思是一个小的度量. 数 c 在某种意义上起着度量 a 与 b 的"相同性"的作用.

当一个数可被另一数整除时,头一个当然是第二个的倍数;因此,由于 6 可被 3 整除,它是 3 的倍数,等于 3 乘以 2. 于是同余概念可以表示为等式 $a-b=kc$,其中 k 表示乘数. 这又可以写成 $a=b+kc$. 到现在为止我们还没有碰到本质上新的东西. 高斯工作的重要性来自他引进的一个记号上的小修改所具有的含意. 高斯把上面第二个等式写成 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ c)$,它读作:$a$ 同余于 b 模 c. 由此我们可以推断 a 与 b 之间的关系的重要性在于它们相差 c 的一个倍数,而那个乘数(原来等式中的 k)是相对说来不重要的.

从一个稍微不同的角度看,如果在等式 $a=b+kc$ 中整数 b 小于 c,但是大于或等于零,则 b 表示 a 被 c 除之余数. 例如,19 是同余于 1 模 3,可以写作 $19/3=6+1/3$,或 $19=1+6\times3$. 这里 $a=19,b=1,c=3,k=6$,并且 19 除以 3 余 1. 其次,18 是同余于零模 3 可以写作 $18/3=6$,或$18=0+6\times3$. 在这个情形,$a=18,b=0,c=3,k=6$ 而 18 除以 3 余 0. 用同样办法,20 是同余于 2,21 是同余于零,22 是同余于 1,均取模 3. 换句话说,关于模 3,所有的数都同余于数 0,1 或 2 中之一. 如果模数是表作一般的 c,则关于 c,每个数是同余于从 0,1,…直到 $c-1$ 中的某个数. 一共有 c 种情况. 事实上,用这种方法来考虑整数就把每一个整数放入 c 类中之一类中,每个类由数 0,1,等等直到 $c-1$ 中之某一个来代表. 例如,模 3 而言数 18,21,24,等等,将被放入由数 0 代表的类中,因为当这些数中的每一个被 3 除时余数均为零;数 17,20,23,26,等等将被放入由数 2 代表的类中,因为被 3 除时它们的余数是 2,如此等等. 这个处置的收获是我们不需要考虑无限多个整数,而只考虑有限多个类. 在一定意义下一个特殊类中所有的数本质上是一样的,因为它们在被模数除时有一样的余数.

虽然用这种办法来研究数似乎有些复杂,但实际上我们每天都在使用它,只不过没有看出这个过程而已. 例如,假设我们谈论到从零年开始对每个小时给一个新的数. 在写这篇文章时,已经过了 17 093 328 点. 这会是一个很恼人的报时法. 但是模 24 以后即可知道:现在是午夜刚过. 我们所做的是将一天的小时看作模 24 的 24 个类中的成员,这 24 个类分别称为一点,两点等等直到 24 点.(在实践中我们将一天分成两个半天并用钟面上只有 12 小时的钟,而用上午和下午来区别两个半天)因此一天有 24 个"小时类",或者两组 12 个"小时类". 类似地,一周中有七个"日类"而一年中有 12 个"月类". 有关日和月的类的考虑以及某些天文学的数据容许高斯能

用同余性及其应用的法则来表示它们，依靠阴历和阳历，使我们能容易地确定复活节和其他节日*. 类似的，同余性也帮助我们去寻找任何一年中的任何一天是某周的某日，因此我们可以说出哪一年的 1 月 13 日将成为星期五，哪一年从 7 月 4 日起将接着一个长周末**，以及其他等等.

有一个众所周知的算术法则：一个数能被 9 整除，仅当其各个位数之和能被 9 整除. 这个法则以及其他类似法则可以很容易地用同余性概念证明. 让我们取数 234，它的各个位数之和为 $2+3+4=9$. 这个数 234 可以写成 $2\times10^2+3\times10+4$. 我们将它表为 N，而将 $2+3+4$ 表为 n. 则 $N-n$ 为 $(2\times10^2+3\times10+4)-(2+3+4)$. 这可以写成 $(2\times10^2-2)+(3\times10-3)+(4-4)$，并且可简化成 $2\times99+3\times9$. 因为 9 和 99 均可被 9 整除，因此差 $N-n$ 可被 9 整除；换句话说，N 是模 9 同余于 n. 当一个数的各个位数之和是 9 时，如我们的上述例子，这个数被 9 除后所得余数为零. 当那个和是一个大于零而小于 9 的数时，这个和便是该数被 9 除后所得之余数. 当各个位数之和大于 9 时，我们可以再用以上过程来决定这个新的数是否可以被 9 整除. 例如数 73 506 816 是模 9 同余于 36(各个位数之和)，它又模 9 同余于 9. 由此可见，该数可被 9 整除. 另一方面，模 9 以后数 73 506 818 同余于 38；而 38 同余于 11；11 又同余于 2. 因此 73 506 818 被 9 除余 2.

11	18	25	2	9
10	12	19	21	3
4	6	13	20	22
23	5	7	14	16
17	24	1	8	15

每行每列和两个对角线加起来为 65 的幻方.

任何一个可以被 9 整除的数也可以被 3 整除，因为 3 可以整除 9. 于是我们可以陈述一个新的法则：一个数能被 3 整除，仅当它的各个位数之和能被 3 整除. 类似的考虑使我们得到另外的法则：一个数能被 2 整除，如果最后一位数能被 2 整除；一个数能分别被 4 或 25 整除，如果它的最后两位数形成的数能分别被 4 或 25 整除；一个数能被 5 整除，如果最后一位数是零或者 5.

被称为"舍九法"的一个校验乘法的方法就是以被 9 除为基础的. 这个校验法如下：为了检验在乘法 $a\times b=c$ 中之积 c 是否正确，我们先求 a 被 9 除之余数和 b 被 9 除之余数，并将两个余数相乘. 这个积必定等于 c 被 9 除之余数. 如果不是这样，原乘式中所得的 c 之值便是错的. 这个校验法容易实行是因为为了得到余数我们只需将每个数的各个位数相加. 作为一个例子我们校验乘式 $6\ 743\times826=5\ 569\ 718$. 第一个数的各个位数之和为 $6+7+4+3=20$. 20 除以 9 得余数 2，它可用将其各个位数相加而得：$2+0=2$. 类似地，第二个数的各个位数之和为 $8+2+6=16$，

* 译注：中国历法是阴历阳历合用的，并由此推算节气与闰月以及日、月蚀等等，而不是如人们习惯设想的只用阴历. 因此同余计算和不定方程的研究在中国数学中占特殊地位. 原书没有说"阴历和阳历"，这是译者加的.

** 7 月 4 日是美国国庆日. 这里讲的长周末类似我们的"国庆黄金周".

它再除以 9 得余数为 7. 将余数相乘，2×7＝14. 这个数的各个位数之和为 1＋4＝5. 在积 5 569 718中各个位数之和为 41，而 41 的各个位数之和为 5，因此答案可能是正确的. 作为一个实用的方法，舍九法这个技巧在公元 800 年以前可能已为印度人知晓；它于中世纪传入欧洲. 然而隐藏在这个方法背后的数学理论在近代数论建立之前是不容易得到解释的；请想像一下不用同余性的概念来阐明这些做法的理论基础是如何困难.

数论的一个非常有趣的近代应用产生于电子计算机的领域. 这种机器应用数的二进制代替十进制系统. 我们说过 234 能写成 $2\times10^2+3\times10+4$；这是 10 的幂的倍数的和(4 可以写成 4×10^0). 数 234 也能写成 2 的幂的倍数的和，得 $1\times2^7(128)+1\times2^6(64)+1\times2^5(32)+0\times2^4(0)+1\times2^3(8)+0\times2^2(0)+1\times2(2)+0\times2^0(0)$. 此处我们用“底”2 代替十进位系统中的 10. 取代写下一长串 2 的幂，我们可以“删去底”而只写出 2 的幂的乘数，从左到右为 11101010.（读者应当注意到当他以前写一个大于 10 的数时他正是在十进位系统中做了完全一样的事；他删去了底 10.）于是十进制中的 234 就是二进制中的 11101010；类似地，十进 15 是二进 1111 而十进 2 是二进 10. 在一台电子计算机中二进制有极大优点：用到的数码只有 0 和 1. 在机器“语言”中每个 1 可以表作一个电脉冲而每个 0 则表作无脉冲. 用这个办法一台电子计算机可以非常迅速地实现数的运算.

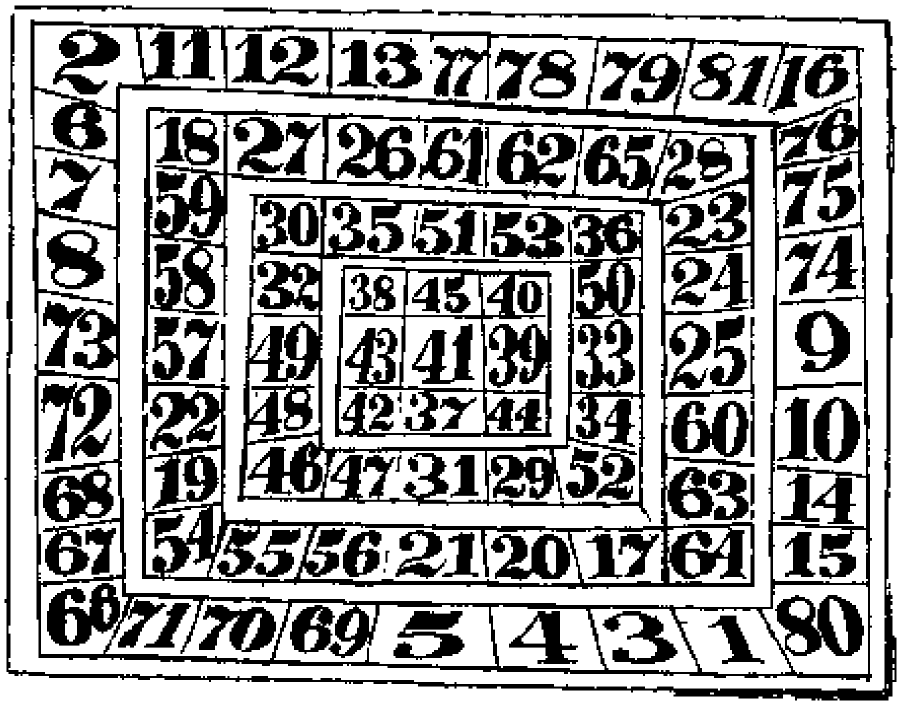
转回到游戏和谜题的天地，我们可以叙述两个典型的曾被数论学家研究过的问题. 第一个是熟悉的酒罐问题，其一种陈述法如下：一个人有一个 5 加仑罐子和一个 3 加仑罐子. 他想从酒店掌柜那里买 4 加仑酒而掌柜只有一只装满酒的 8 加仑罐子. 怎么办那个人才能恰好量出 4 加仑而不洒掉一滴？花一番思考后你会想出，他用 3 加仑罐子量出 3 加仑再倒入 5 加仑罐子中，他再倒满 3 加仑罐子而后用这 3 加仑将 5 加仑罐子倒满而留下 1 加仑在 3 加仑罐中，于是他把装满了酒的 5 加仑罐子倒回 8 加仑的罐中，而将 3 加仑罐中 1 加仑酒倒入 5 加仑罐中. 再用 3 加仑罐子从 8 加仑罐中量出 3 加仑. 这样问题就解决了. 一般说来，若有可容纳 A，B 和 C 加仑的三个罐子并要求量出 D 加仑这个一般的情形已经用数论解决了. 这就是，已知对哪些 A，B，C 和 D，这个问题有解，并且量的办法也弄清楚了.

第二个问题是所谓幻方. 一个幻方是 n^2 个整数 $1,2,\cdots,n^2$ 排成 n 行 n 列使得每一行每一列或每一主对角线(左上至右下及右上至左下)的数之和都相等，称为幻和 $n/2(n^2+1)$. 幻方曾经长时间使人们着迷，并且许多数学家曾经研究过它们. 一个构作幻方的方法是基于同余概念. 一个适用于任意奇数 n 的方块的幻方构作的简易方法在第 163 页的图中示出. 例如一个 $n=5$ 的幻方呈示出之幻和为 65. 方块的每一格(称为一个腔)包含从 1 到 n^2 之一数，在此情形 $n^2=25$. 放

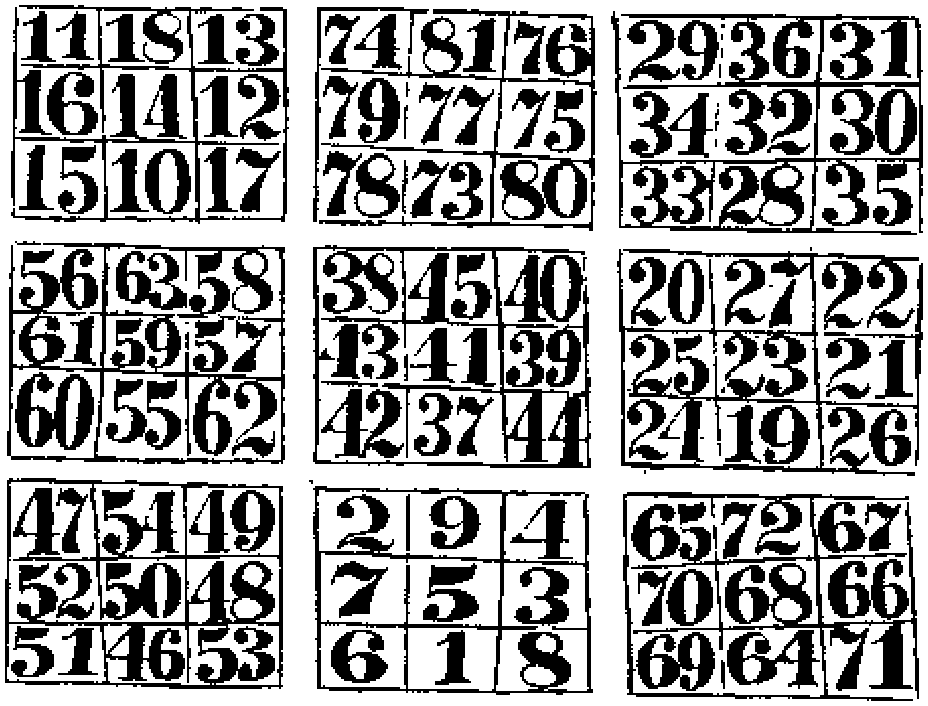
入腔内的数是按下述规则依次顺序进行：

先将 1 放入最底下一行的正中的腔内；当填过底行的一个腔后，下一个数就放入顶行的右邻列之腔中；然后便依次自左上往右下顺对角线方向填入各腔内；一旦填到方块之最右列的一腔后，下一个数就填入低一行之最左腔中；如果自左上往右下顺对角方向的下一个腔已被填，则将下一数填入刚填的腔的上面一个腔内；填到最底行后，就又转入顶行的右邻腔，如同由 1 到 2 那样；当最右下角的腔填入后，下一数填入该腔的上面一个腔内.

幻方和酒罐，计算机，素数和同余性，丢番图方程和海难水手，所有这些都提供了理由，有助于解释为什么数论使这么多人发生兴趣. 专业人员和业余爱好者都同样被这些问题的精致迷人所吸引，而且他们的工作也被几乎所有数学分支所感受到. 数论的问题是属于数学中最具有挑战性的，可能因为其中一部分是很困难的. 所幸的是，在数学中也如同在其他科学探索一样，正是解决一个问题所经历的困难驱使着人们继续探索其答案. 因为人类相信数学科学是一个合逻辑的学科，因此是可以彻底了解的.



套边方块整个是一个幻方，并且每去掉一层边所得到的方块还是一个幻方.



复合幻方也整个是一个幻方并且它的每个小方块同时是幻方.

15.

代 数

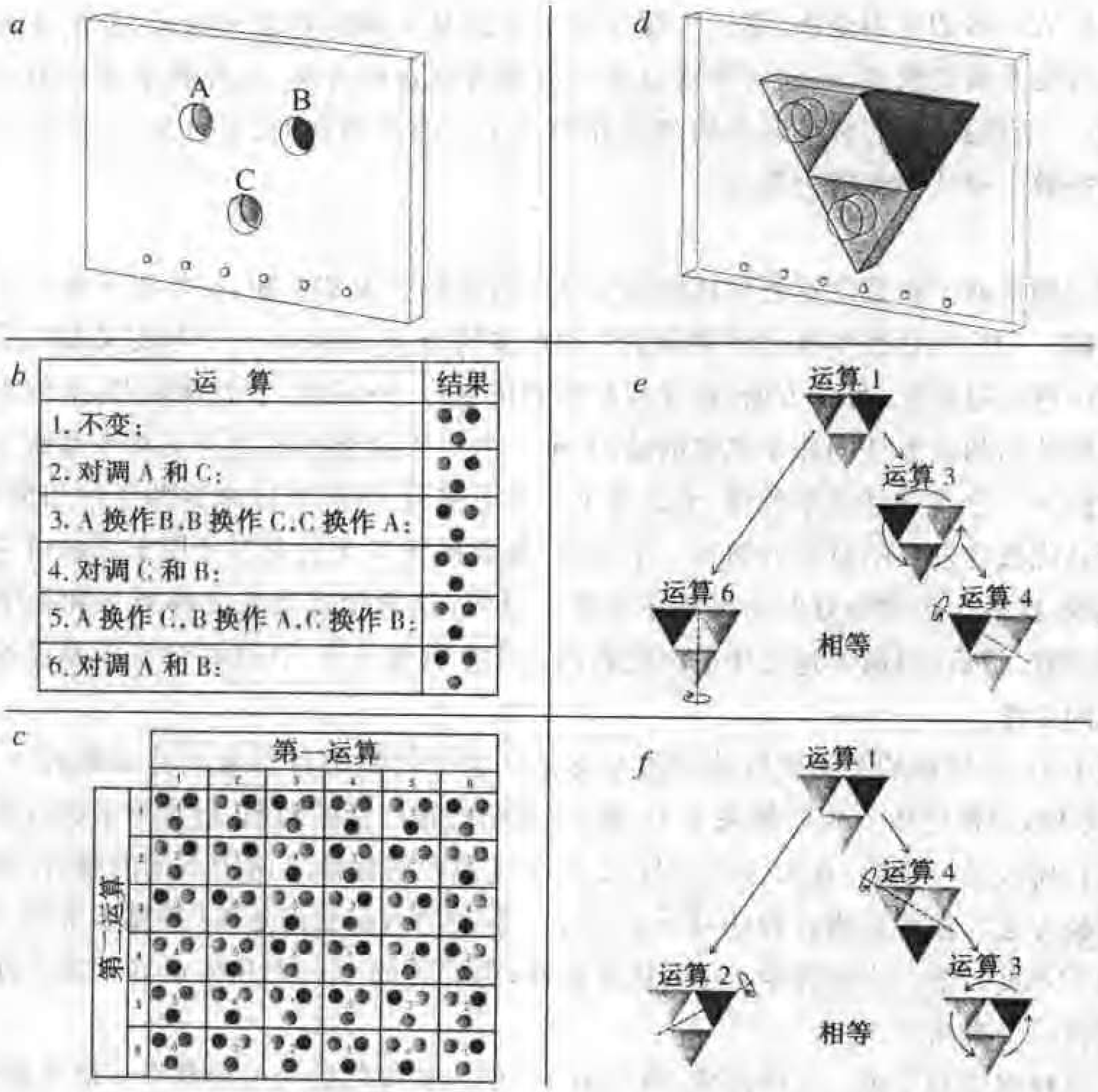
梭耶尔(W. W. Sawyer),1964 年 9 月号

代数作为数学的一个分支的历史可以分成两个主要时代.第一个时代从古埃及和巴比伦文明直至大约公元 1800 年;第二个时代从 1800 年至现今.在早期人们考虑数学只用到它论及的事物:几何是讨论形状,算术是讨论数,而代数是讨论一般的数(用任意的符号,通常用字母来表示)的关系和性质.三角不太吻合这个体制,因为它应用算术和代数于几何;解析几何也不太吻合,它将几何学变成了代数学的一支.不管怎么说,在整个这个时代代数的地位或多或少是清楚的:x 永远表示一个数.

老的代数为许多实践的和科学的事业提供了一个用途广泛的工具.考古学的证据指出求圆柱体和球体的体积的公式在古埃及已被用来计算农民的谷物总量以确定应向中央政府上缴的税额.在微积分和天体力学在 17 世纪后期出现以前,在所有的天文计算中代数和几何是一对孪生主要支柱.每个在好的中学里学习过传统课程的人对老的代数的基本运算都是熟悉的.事实上,一个在中学里掌握了初等代数和几何的人就能很好地学习直到 1800 年所发现的大部分数学而无需大的心理上的调整.其理由是 1800 年以前的数学本质上只涉及两个常识性的观念,数和形.

19 世纪初数学的这个观点开始改变.引进了两个新的观念,并且深远地扩展了数学的范围.第一个观念是数学不必把自己限制于数和形,而可以有效地研究任何事物(虽然“任何事物”常常用某种方式继续与数和形发生关联).第二个观念是将抽象化的进程推得更远一步:数学时常可以被看作只是逻辑的过程,并不是与哪个特别的事物有关.

不是数学家的那些科学家都被第一种观念所吸引;它表明数学可以有比前一个时代曾经设



群的代数如何应用于物理世界？现在把一个假想的现象图解如下：设想一面墙上有三个洞出现三种不同颜色.（a）颜色顺序变化有六种不同的方式.（b）由按墙根的六个按钮而定. 这些变化或运算依照满足一个群的四条基本要求的方式出现.（1）如果一个运算后跟着另一个运算，结果同单独施行某一个运算一样.（2）一系列运算满足结合律，用符号表示为 $x(yz)=(xy)z$.（3）对于每一个运算存在一个逆运算.（运算 3 与 5 互为逆运算；其他运算是自己的逆运算.）（4）存在一个恒等运算它保持原来顺序不变（运算 1）.（c）是一个表，任何一对运算的结果画在此表（该表称为一个矩阵）中.（d）我们所观察到的这个现象有一个"最简单的"物理解释：假设墙后面藏着一块适当地染了色的三角形木块. 保持与墙面方向一致，三角形的旋转或翻转一共只有六种不同方式，正好对应于从墙洞中看到的六种颜色的安排. 这个特别的群是一个有限的非交换群：有限是因为运算总数有限，非交换是因为运算施行的顺序会影响其结果（xy 不必等于 yx）. 在（e）和（f）中给了这个群的非交换性的一个证明，它们显示了先运算 3 后运算 4 不会得到先运算 4 后运算 3 的同样结果.

想过的更广大得多的应用范围. 第二个观念则更多地是令纯粹数学家倾心,他们认识到数学研究的只不过是美丽的模式. 在这两种观点之间并没有真正的冲突. 纯粹数学家仅因其美丽而设计出来的,一个模式,可能会证明与物理世界的某个方面是吻合的;反过来,由科学家在自然中发现的某些数学模式的确极为美丽.

要想追溯这两个新观念在近世代数的发展中的全部或大部影响,必将远远超出了任何一篇文章的篇幅. 一方面,代数本身已经被分割为如此多的分支,而对每一个分支又都在或多或少的孤立状态中进行过研究. 另一方面,孤立和片断的信息似乎不适合于大众读者,他们不可能知道能说明这些片断的重要性的那个完整的结构. 唯一的令人满意的解决办法看来是砍下近世代数的相当大的一个分支并且详细解释. 考虑这个特殊分支自 1800 年以来这些年中如何发展起来,读者将会对代数之进步的总的方向有一个概念. 我选择将本文的大部分用于详细讨论向量代数和矩阵代数,这两个主题恰好开始进入中学教学计划. 这两个主题在纯粹数学和科学中都已经有了重要贡献. 最后,很简要地叙述近世代数的若干个其他分支,在这些分支中都已经有了有趣而且重要的工作.

出现于 19 世纪初的关于代数的新的观念是从老的代数中自然地成长起来的. 一个刺激是 -1 的平方根,习惯记作 i,用它解决了 17 和 18 世纪的很广泛的问题,但是看来没有人能使人满意地解释它何以是一个数. 在 19 世纪初对于这个进退两难提出了两个不同的解答. 头一个运用了所谓抽象方法,i 被解释为在数的对子上进行一系列相当任意的运算(参见本书第 27 章"数学基础",第 318 页). 第二个解答给 i 一个具体解释,将它等同于一个几何运算:"在平面上按逆时针方向旋转一个直角."

两个解释都引起了进一步的探索. 既然由于 i 引入初等代数的进程获得了极大的利益,难道引入更多几个无意义的符号不会带来好处吗? 主宰着这些符号的法则可以裁制得更合乎情况的需要. 如果 i 被解释为平面中的一个旋转,为什么不考虑三维空间中的旋转,并且看看这样做能否给代数贡献一点什么东西? 这个探索的路线最终导致 1843 年哈密尔顿(Willian Rowan Hamilton)发现四元数. 在四元数代数中引进了两个新符号,i 和 j,满足法则 $i^2=-1$,$j^2=-1$ 和惊人的 $ji=-ij$ *(见第 13 章"数",149 页以及第二部分第 8 章哈密尔顿传).

与哈密尔顿同时代的许多重要的英国数学家完全都因四元数的发现而激动不已,他们认为四元数是数学的最后的一个词,同时是解决大多数代数问题的理想工具. 实际上,四元数是头一

---

* 译注:i 和 j 应分别为 j 和 k.

个而不是最后一个词.跨越了一个障碍物:已经发展起来一个代数,它否认了老的代数的几条约定.数学家们迅速行动起来去寻找另外的道路,在其中通常的数可以用新的符号补充而产生后来所谓的"超复数".最终提出了这样的问题:为什么要从通常的数出发?为什么不去考虑任何一组符号并规定它们满足的一批法则?"代数"一词逐渐扩充到把任何一个遵守给定的法则的符号的系统包括在内.任何人现在都可以自由地发明他自己的代数.当然这不是说任何人只要干了这样的事便有权博得不朽的名声;问题永远是:要发明这样一个系统,它既是有趣的而且会带来丰富的成果,并且对数学的其他方面和对科学有重要的贡献.

代数不再只是讨论某些特殊事物的了,虽然并不排除这种可能性:一个特殊的代数系统可以应用于一个特殊的课题.这样的一个课题从而被说成是有代数特征的.

初等代数里符号表示数同时记号+表示把数相加.读者当获知代数不再被数所独占而记号+仍在继续使用时,他可能会很惊奇.你怎么可以去"加"不是数的东西?其解释是:在近世代数中记号+并不表示在某个现实意义下的加法.它只意味着遵照某些法则在施行某个运算,这些法则使数学家联想起加法的法则.其相似之处是在其形式,而不在其内容.

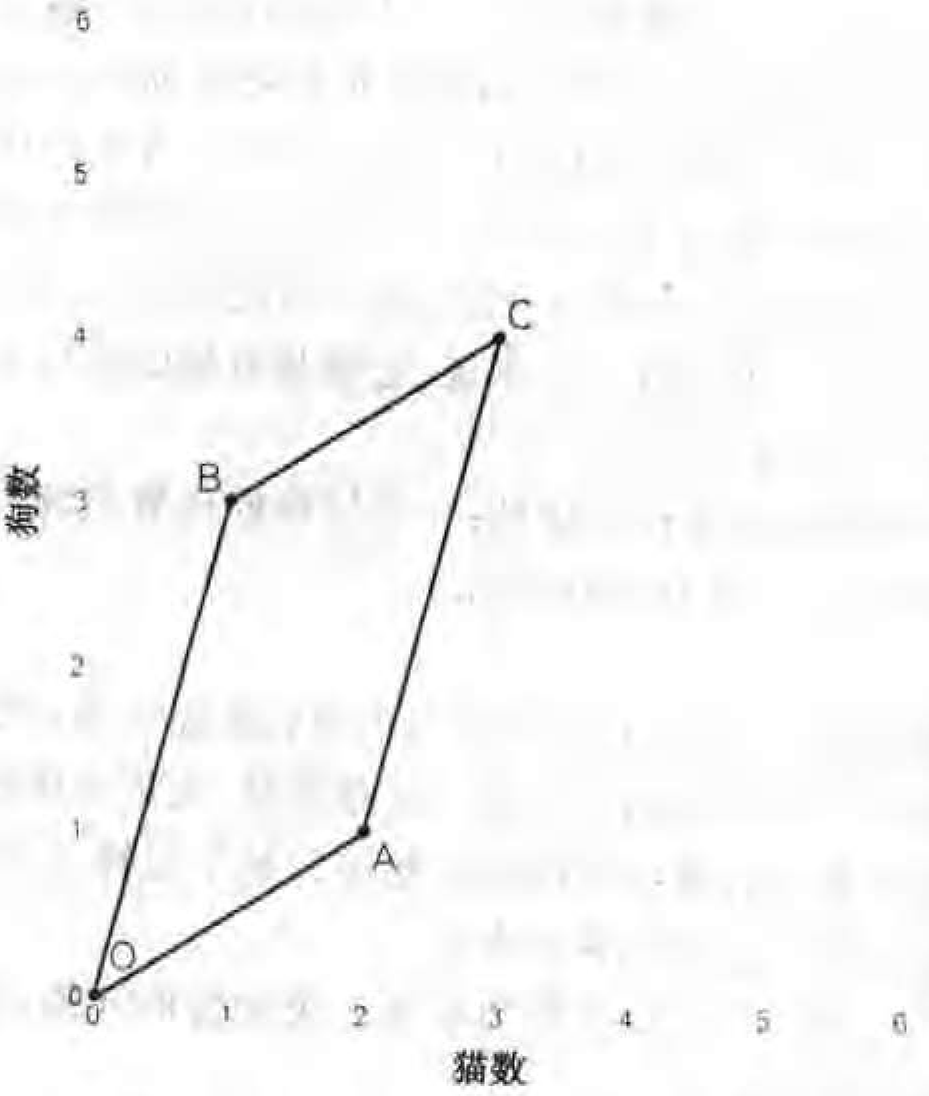
现在我们考虑推广记号+的含意的一个例子.我们从一个显然与加法有关的情形开始,并从它导出另一个情形,在其中与加法的联系就很不明显了.

在算术中"相加"一般地是与"放在一起"相对应的.做饭时人们说"加"水就可以做稀糊.大多数人对下面陈述中的加法不会感到困难:"两只猫和一头狗+一只猫和三头狗=三只猫和四头狗".他们会认为这是记号+的合理的运用.

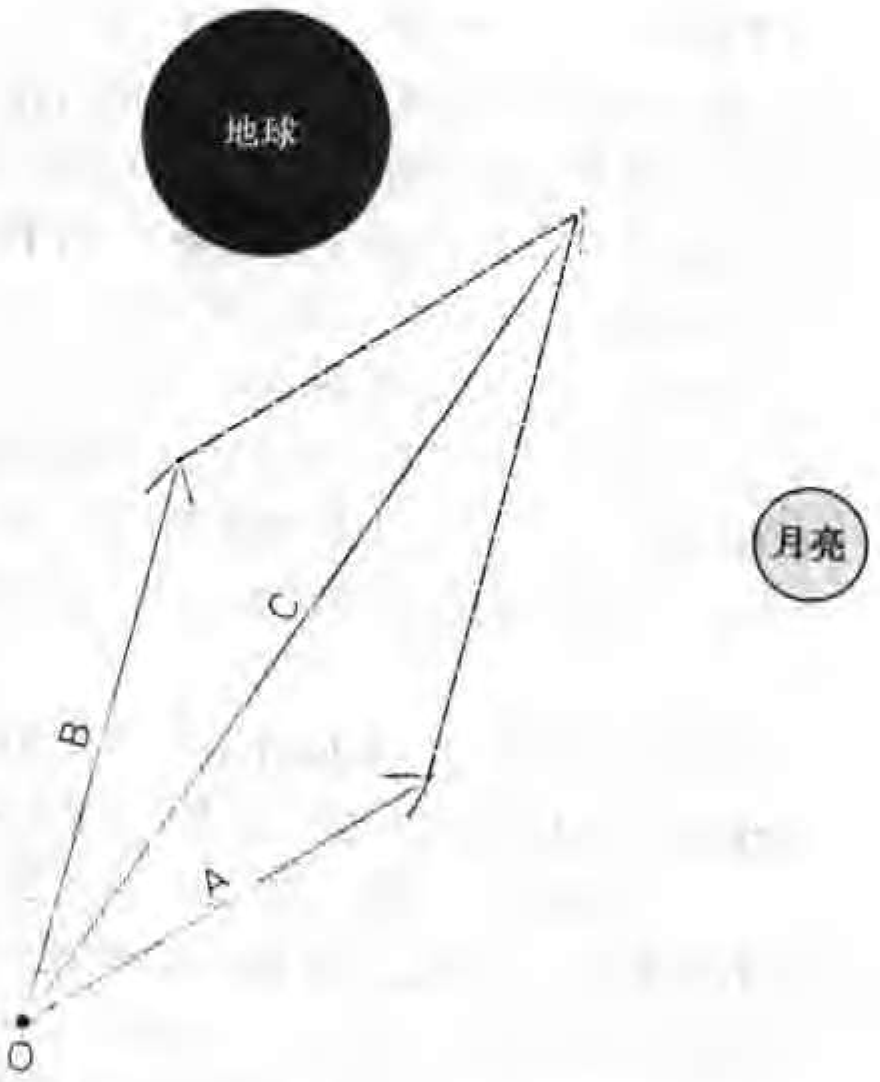
在上述的命题中的加法运算可用图来解释(参见下页上左图).这里猫数用水平坐标表示而狗数用铅直坐标表示.点 A 表示两只猫和一头狗;即 A 是从原点 O 横向两个单位并向上一个单位.用同样的办法,点 B 表示一只猫和三头狗.因为点 C 表示这两个数对子的和(三只猫和四头狗)所以我们可以写成 $C=A+B$.

假设我们将这个图出示给某个不知道有关猫与狗的故事的人,并请此人描述他之所见.可能他会说:"图纸上标出了四个点 O,A,C 和 B 使得成为一个平行四边形."因此可能给出一个纯粹几何的描写,说明如何从 A 和 B 得到 C:只需选取 C 使与 O,A 和 B 形成一个平行四边形.

显然,从命题"两只猫和一头狗+一只猫和三头狗=三只猫和四头狗"所得出这个图至少可用两个不同的观点来导出.在猫和狗的故事的行文中一开始就有加法参与,而图示只是去说明作加法的一个办法.从纯粹几何的观点看,C 是为完成平行四边形 $OACB$ 而需要的那个点.在后面这个情形似乎写成 $C=A+B$ 是很不自然的,或者的确很难发现能与代数多少有什么关联.然



在陈述"两只猫和一头狗 + 一只猫和三头狗 = 三只猫和四头狗"中的加法可以用平行四边形来图解. 因为点 C 表示了由 A 和 B 表示的量的和, 因此你可以写 $C = A + B$.



向量加法也涉及构作一个平行四边形. 该平行四边形的对角线(向量 C)表示在 O 处的观察者受地球引力(向量 B)和月亮引力(向量 A)作用的合力. 你可以再一次写作 $C = A + B$.

而因为不管我们如何看, 那个图示总是那个样子, 显然平行四边形的几何必定在某种意义下具有与加法有关的很强的代数特征.

任何学过力学或电磁学的人都熟知这样的事情, 自然界常常运用平行四边形来表示加法. 在右图中字母 O 表示空间某处的一个观察者. 直线 OB 表示地球引力, 即假设地球是观察者附近唯一的一个大物体时作用于他的力. 类似地, 直线 OA 表示月亮引力. 事实上, 地球和月亮同时吸引观察者, 因此为计算实际作用于观察者之力就需要将地球和月亮分别产生的作用组合起来, 或"加起来". 这个合力可以用直线 OC 来表示, 它就是平行四边形 $OACB$ 的对角线.

如果我们希望把太阳的作用力也计算进去, 我们必须再一次应用平行四边形技术, 将太阳的引力与表示为 OC 的力"加起来". 到此为止, 与通常数的加法很重要的相似之处已经可以明显

看到：如果你来加任何三个数，你加它们的顺序是不重要的. 如果一个人付帐，比如说，3 美元，5 美元和 6 美元，他没有必要按某种特殊的顺序来付. 用任何顺序都可以，只要他付够了总数 14 美元. 这被称为加法的交换律.（严格地说，这里还涉及到加法的结合律，用符号表示为 $a+(b+c)=(a+b)+c$）. 数学家发现，在运算的顺序会影响最后结果时如果仍采用符号＋将产生误导.

对于我们的引力问题，显然运算的顺序没有影响. 因为在 O 点的观察者是同时被地球，月亮和太阳作用的. 在我们计算其作用于观察者的合力时我们可以先合成地球引力和月亮引力，然后再将这个结果"加上"太阳引力. 我们也可以先将太阳和月亮的作用合成，再"加上"地球的引力. 如果这两个过程得到不同的结果，我们的纯粹几何的技术便显然是令人不满意的. 而这个具体情况的物理学则要求结合律和交换律成立. 既然合力必须服从这些法则，那么它就很像通常的数的加法.

上述两个例子中所讲的平行四边形技术被称为向量加法. 两例中的 OA，OB 和 OC 均称为向量，通常画一个箭头来表示.

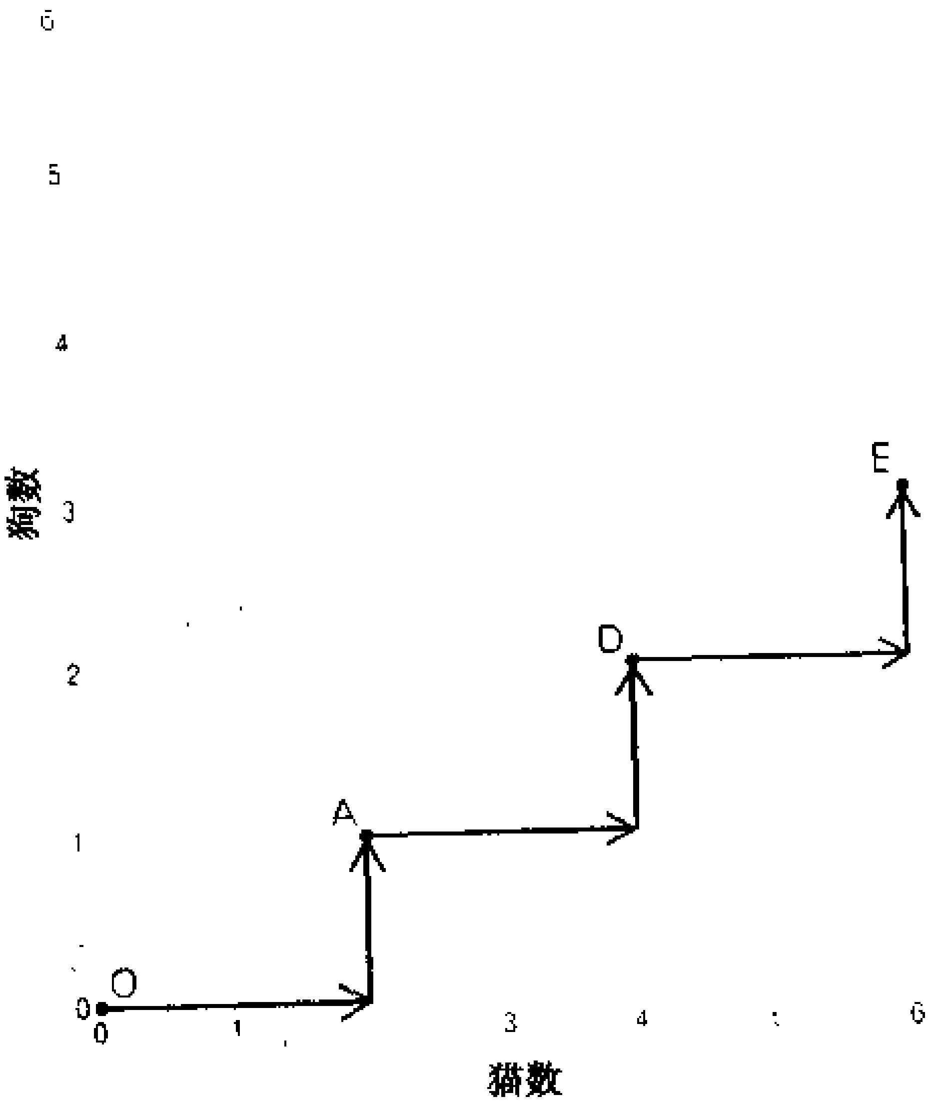
解释猫狗图的另一个方法是用旅行. 从 O 到 A 的距离对应于旅行往东两个单位并往北一个单位；类似地，从 O 到 B 的距离对应于旅行往东一个单位并往北三个单位. 如果我们合并这两个旅行，往东先走两个单位，再往北一个单位，再往东一个单位，再往北三个单位，我们发现合到一起我们往东旅行了三个单位并且往北四个单位，或者说从 O 到达 C. 故事改变了，但又一次我们发现 C 可以解释为 A 与 B 之和.

我们已经看到可以把好几种不同的含意赋予表达式 $A+B$. 有什么办法可以用来解释表达式 $3\times A$ 或者 $3A$ 呢？

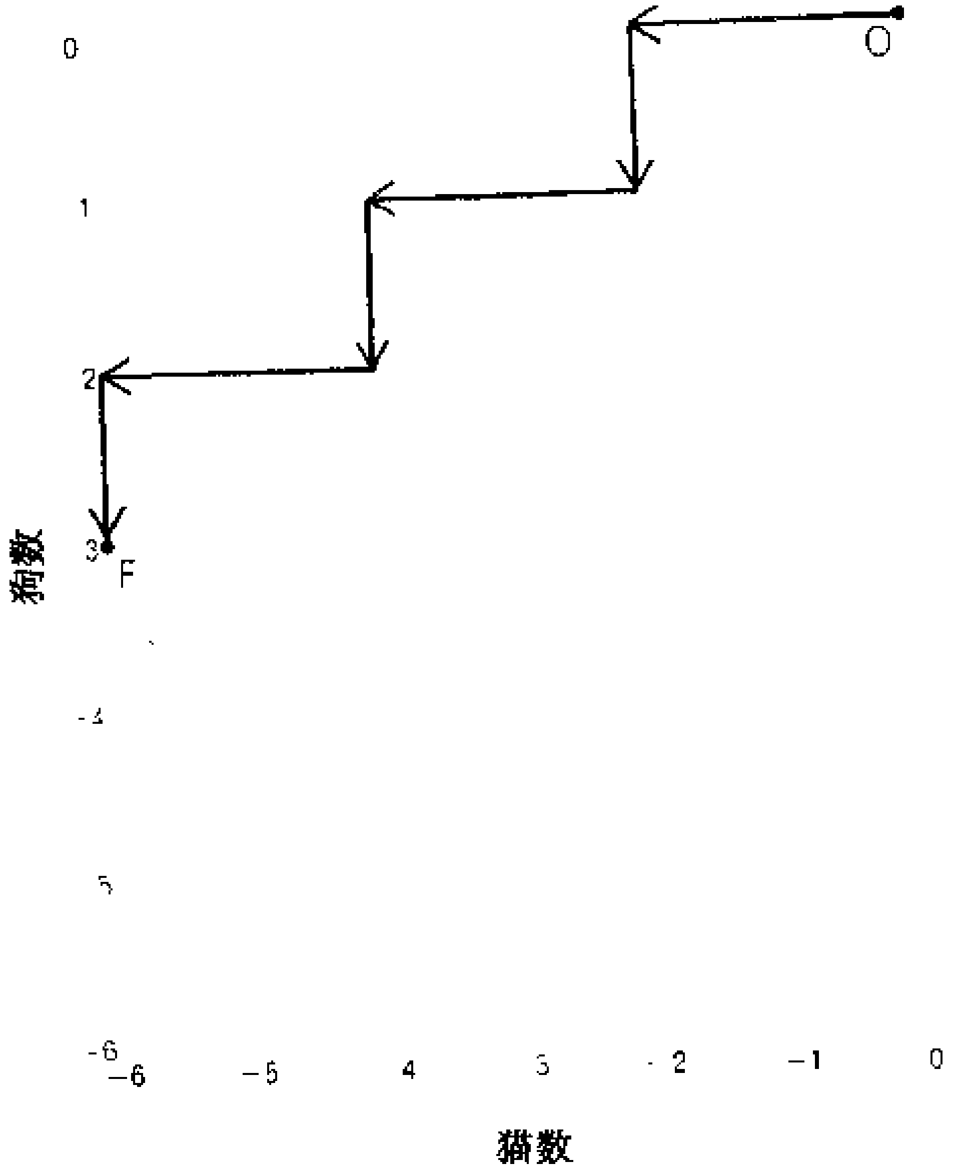
如果 A 表示两只猫和一头狗，那么 $3A$ 的含意没有一点问题，这个积显然表示六只猫和三头狗. 在下页左图中这个积用 E 表示；因此我们可以写下等式 $E=3A$. 几何地说，我们可以视 E 为从 O 出发，方向与 A 相同，但是它的三倍远. 除了 $E=3A$ 的这个纯几何的解释外，解释为旅行也是有帮助的；从 O 到 E 的旅行可以分成三步，O 到 A，A 到 D 以及 D 到 E，每一步具有相同的规格：往东两个单位并且往北一个单位.

现在我们引进符号 c 和 d 分别用来简化猫和狗. 我们发现表达式 $6c+3d$ 至少可用三种不同办法来解释：(1)原始意思是六只猫和三头狗，(2)指示下页左图中 E 点的一个方法，(3)描述同一个图中从 O 到 E 分步骤旅行.

我们的符号运用仍有一个缺陷. 我们容易用 $6c+3d$ 的写法表示从 O 到 E 的总旅行，但是如何表示相反方向的旅行呢？为此我们需要负数；因此 $-6c-3d$ 可以用来表示往西六个单位



在陈述 $E=3A$ 中的乘法可用几种不同办法来解释. 如果 A 表示两只猫和一头狗, E 等于六只猫和三头狗. 几何地说, 点 E 位于从 O 出发与 A 相同方向但是三倍远处.



需要用负数来表示我们欠下的一笔债务, 比如要还别人六只猫和三头狗(F). 从 O 到 F 的转移也可表为一次分为三段的旅行, 每段有相同规格: 往西两个单位, 往南一个单位.

并往南三个单位的一次旅行. 同一表达式也可以在上面的右图中用来指示点 F 之位置. 或者它可以表示负六只猫和负三头狗, 这就是说, 有一笔债务要求我们还给别人六只猫和三头狗.

我们现在可以用一对代数符号, 如 $6c+3d$, 来表示平面上的任意点. 此外, 我们可以把许多几何构作翻译成这些符号的代数运算; 例如, 画一个平行四边形对应于加法. 许多初等平面几何的定理可以不用几何作图面只用有关 c 和 d 的适当的代数运算来证明.

第 177 页之图展示出可以施加于一个长方形图画的几个几何变形. 在 B 中原来的图形 (A) 被放歪了, 或说逆时针方向以左下角为中心旋转了; 在 C 中它被放大了; 在 D 中它被反

射在一面镜子里*；在 E 中它被竖直方向拉长而水平方向压缩；在 F 中它向右侧倾斜．这些运算有没有代数的面貌？我们能否将它们相加或相乘？比如，我们能否给反射加上一个旋转并陈述该过程为 $B+D$？看上去好像不可能而实际上可以做．事实上这些运算都有非常简单的代数面貌．

为了解释上面的说法，我们回到猫与狗的故事．设想一个社会，在那里猫和狗代表财富，如同某些原始社会之羊和牛．在我想的假想社会中一个银行可能提供如下利率：对每一只现在存入的猫，一年后你会得到两只猫和一头狗；对每一头现在存入的狗，一年后你会得到一只猫和三头狗．用符号这可以表作 $c\to 2c+d$；$d\to c+3d$．（箭头表示"得到"．）很容易对任意给定数的猫和狗的存款算出所得．例如，一只猫和一头狗的存款将得到三只猫和四头狗（$c+d\to 3c+4d$）．另一方面，两只猫和一头狗的存款将得五只猫和五头狗（$2c+d\to 5c+5d$）．对于猫与狗的不同组合的存入其所得在下页的表中列出．这种类型的一个表称为一个矩阵，关于这种表的数学分支称为矩阵代数．

我们现在将所有符号翻译到几何中去．在第 175 页右图中点 A 代表存入 $2c+d$ 而 A' 代表这笔存款所得，即 $5c+5d$．还标出了另外几个点：例如，B 代表存入 $c+d$ 而 B' 代表对应的所得 $3c+4d$．类似地，C' 代表存入 C 对应之所得，D' 为存入 D 之所得，如此等等．有一点是明显的，在两个图中的点是按一个有规则的模式来安排的：原来点 A,B,C,D,E,F 和 G 组成一些正方形，而对应的带一撇的点 A',B',C',D',E',F' 和 G' 则组成平行四边形．

这个从正方形到平行四边形的转换不是偶然出现的．事实上，任何一个一般类型的代数的"银行体制"都将产生出类似的图，其中正方形代表存入，所得的平行四边形则代表收益．反过来，每一个这样的将正方形转换成平行四边形的几何形变都可以借助一个适当的代数的"银行体制"而生成．第 177 页图中 F 图所表示的形变就是一个这种类型的正方形变换为平行四边形的形变．在同一图中所示的其他形变对应于类似的"银行体制"．因此方案 $c\to 2c$，$d\to 2d$ 将得到对应于 C 图的放大，而方案 $c\to \frac{1}{2}c$，$d\to 2d$ 将得到对应于形变 E 图．176 页的图几何地比较人、黑猩猩和狒狒的头骨，要生成这时所需的形变，需要稍微复杂些的代数方案．这类比较图解法已被广泛应用于形态学的刻画，这种刻画可以认为具有代数面貌．

有没有可能把两个银行体制"相加"？假设在我们的假想社会中三家银行 X,Y 和 Z 提出三个不同的利率；我们如何理解 $X+Y=Z$？这可能意味着方案 Z 之所得等于方案 X 和 Y 之和．对一笔存款计算一下方案 X 之所得，加上同一笔存款按方案 Y 之所得，我们可以确定对于那笔存

* 译注：在 A 图对阴影矩形由左上到右下的对角线上放一个镜子，则镜中的像就是 D．这称为反射．

猫数

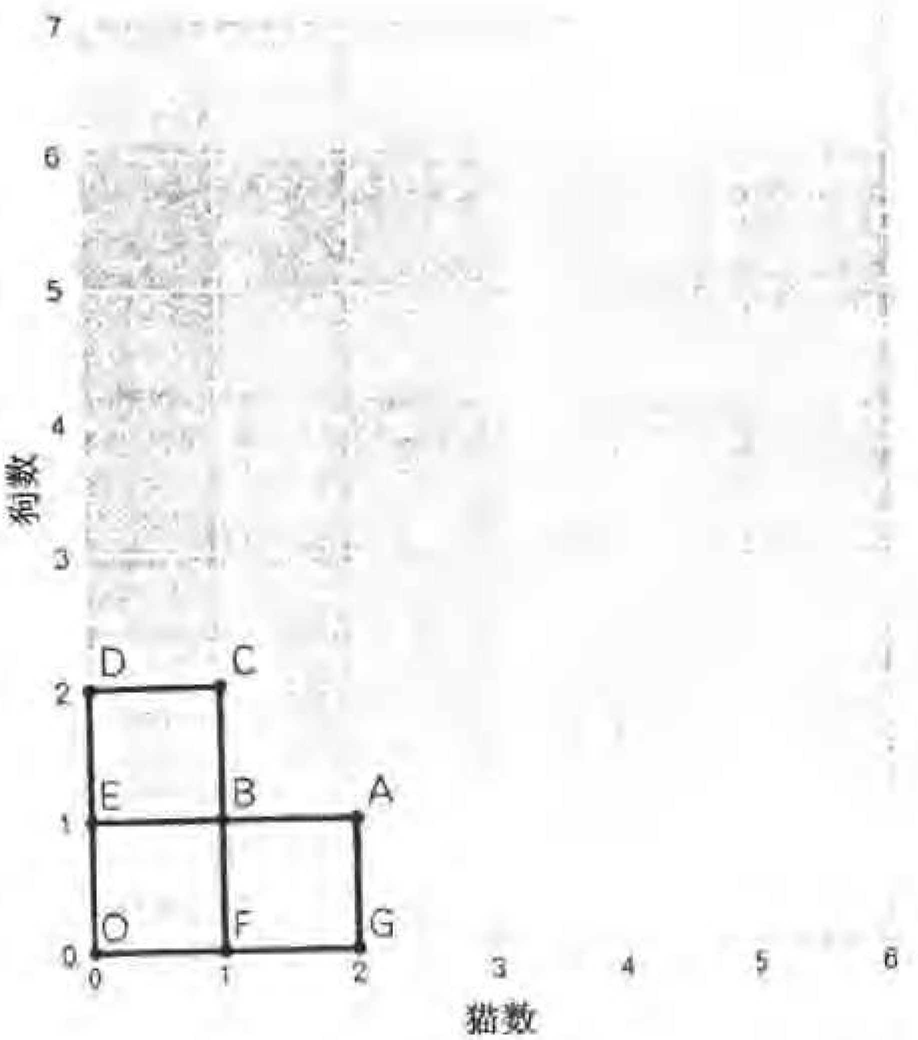
狗数	0	1	2	3	4	5	6
0	0 / 0	2 / 1	4 / 2	6 / 3	8 / 4	10 / 5	12 / 6
1	1 / 3	3 / 4	5 / 5	7 / 6	9 / 7	11 / 8	13 / 9
2	2 / 6	4 / 7	6 / 8	8 / 9	10 / 10	12 / 11	14 / 12
3	3 / 9	5 / 10	7 / 11	9 / 12	11 / 13	13 / 14	15 / 15
4	4 / 12	6 / 13	8 / 14	10 / 15	12 / 16	14 / 17	16 / 18
5	5 / 15	7 / 16	9 / 17	11 / 18	13 / 19	15 / 20	17 / 21
6	6 / 18	8 / 19	10 / 20	12 / 21	14 / 22	16 / 23	18 / 24

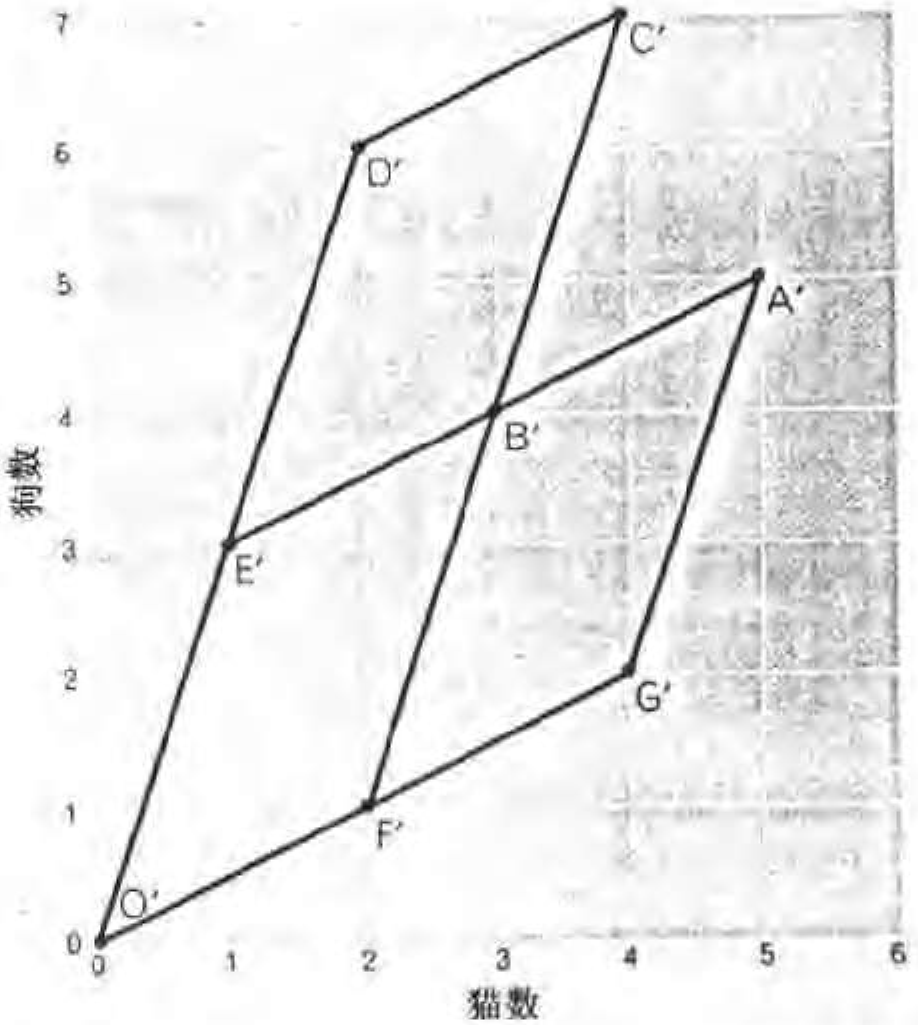
矩阵被用来求假想的动物"银行体制"在下述利率之下的所得：每只现在存入的猫一年后本利和为二只猫和一头狗；每头现在存入的狗一年后本利和为一只猫和三头狗. 斜线上方的数字表示存入；下方的数字表示收益.

款方案 Z 将会是什么. 类似地，我们可以解释等式 $A=3B$ 意思是方案 A 之所得为关于同一笔存款等于方案 B 之所得的三倍.

将后两个观点组合起来我们可以解释如 $4A+5B$ 这种表达式. 对于任何一笔存款，这一组合方案之所得将等于方案 A 所得之四倍加上方案 B 所得之五倍.

有可能进而讨论"银行体制"之乘法. 表达式 AB 将表示你先按方案 B 投资，然后再将其所得按方案 A 投资. 从下述例子可以看出，把这个过程称为"乘法"不是不合理的. 假设方案 B 之效果是将你的存款翻两倍，而方案 A 之效果是将存款翻三倍. 若先按方案 B 投资然后按方案 A 投资，其总效果是原始投资乘以六. 因为六等于三乘二，把再投资解释为乘法不是没道理的.

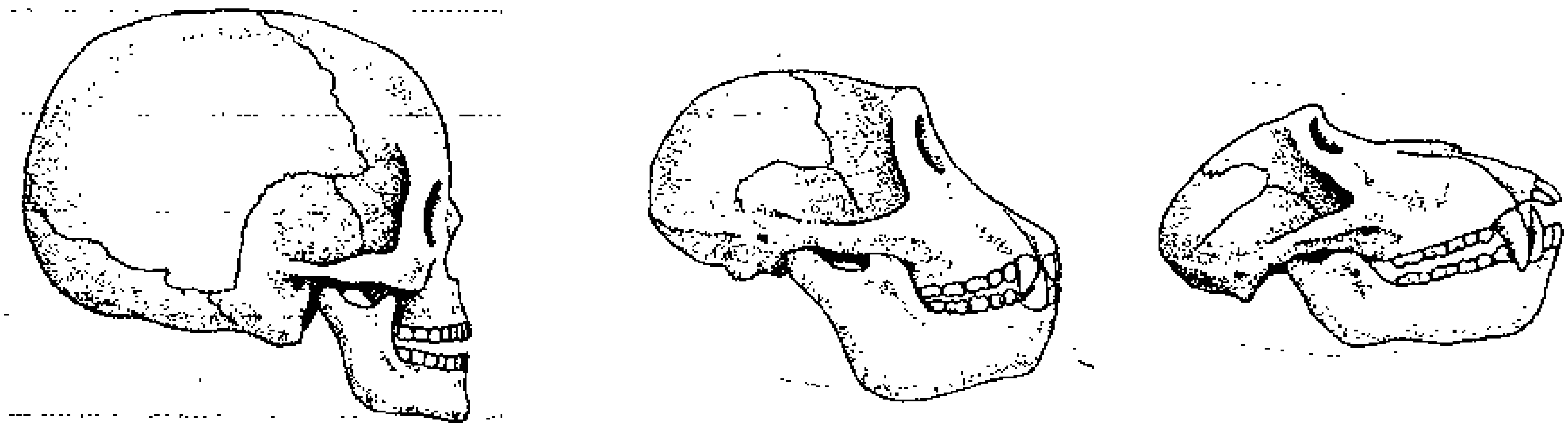




在上一页中用来构作矩阵的动物银行体制也能够用图形来显示. 左图中用字母标注的点表示特定的存入. 右图中对应点表示这些存款的收益即本利和. 从表示存入的正方形向表示收益的平行四边形的转换是任何一个这种一般类型的代数"银行体制"的特征.

这些例子证明了什么? 首先,各种各样的猫狗故事已经证明了代数可以应用于许多乍看上去似乎与代数无关的几何的情形. 其次,用到的代数是非常直截了当的;我们用到的大多数表达式简单到就是如同 $6c+3d$ 这样,而人们已从初等代数中对它们很熟悉了. 第三,"代数"一词意义的扩大有许多重要的含意. 我们曾经谈及力的合成方式,在压力下形状的变形方式,事物变更其位置的方式——所有这些在科学和工程中都有明显的重要性. 在科学和高等数学中它们还有许多并不显然易见的应用.

以上有关向量和矩阵代数的讨论中我们主要是讨论模型;即,我们已经检验过某些实际情况和运算——收集动物,旅行,投资,旋转和反射——并且已经发现在这些情况和运算中有某些要素,这些要素提醒我们想起通常的数的加法和乘法. 然而要求它们有这种"提醒"作用,这种说法有点含糊. 如果某种东西提醒我们想到加法,那么到何种程度才值得使用加法的符号+? 如



比较人(左),黑猩猩(中)和狒狒的(右)头骨也可以说是有代数的面貌的.同动物银行体制的情形一样,在人类头骨上的直角坐标系可以用适当的代数运算逐步扭曲变形.这种类型的图解法已被广泛应用于形态学的研究中.

果不愿意引起符号运用上的许多混乱的话,需要更为比较明确的法则.

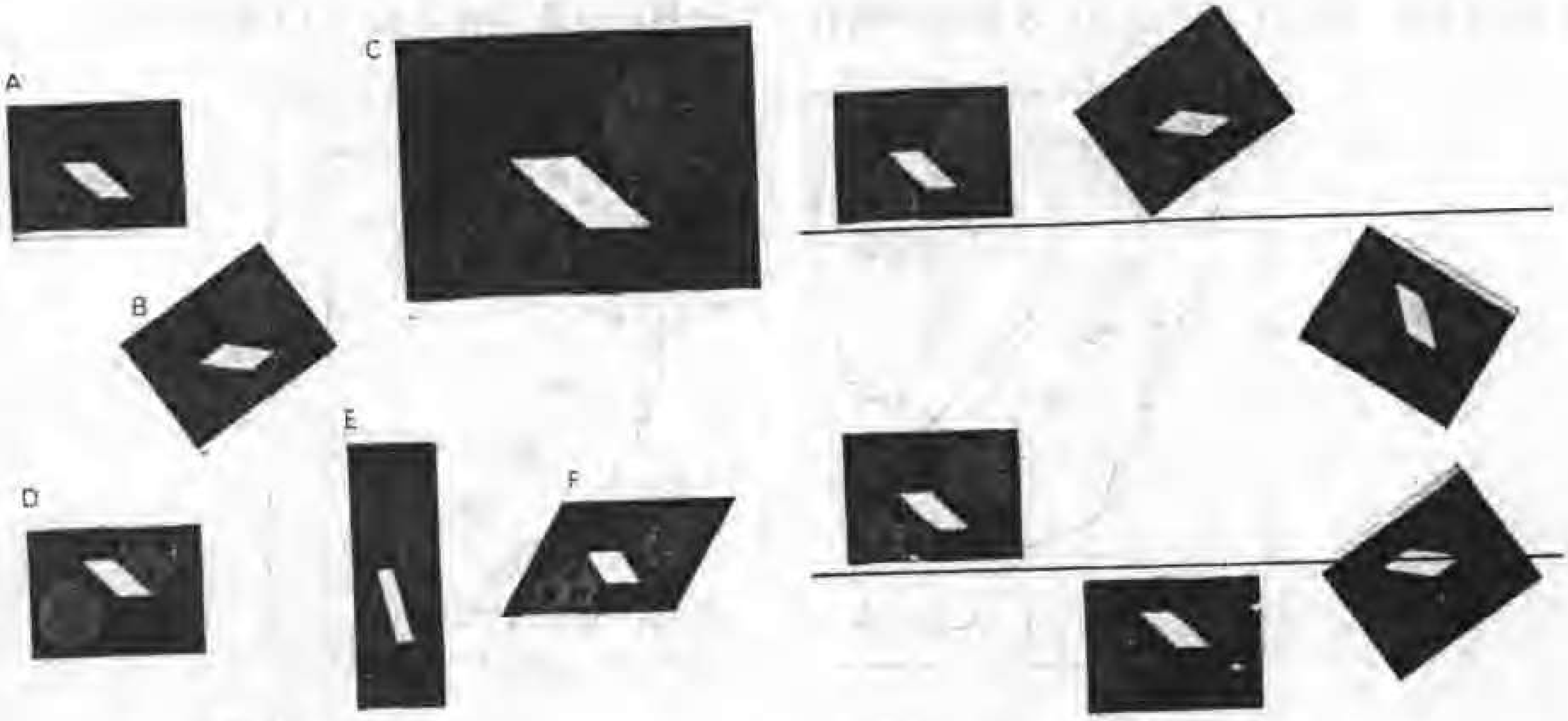
为了把一个运算认为是加法的推广,应该有一些要求,而我们已经提到过这一点.例如,交换律说不论哪两个对象 a 和 b,也不论将它们组合起来的运算如何复杂,我们永远有权要求 $a+b$ 意味着与 $b+a$ 一样.

在通常算术中乘法也是交换的:3×4 总等于 4×3.事实上,乘法的性质与加法的性质很像.正因如此,我们才能造出对数表,它将乘法转换为加法.因为具有相同含意而采用两个符号就有点浪费,数学家们约定符号+只用于可交换的系统,而符号×不必受此限制.在代数的某些分支中 $a\times b$ 和 $b\times a$ 可以表示同一对象,但它们不一定必须这样.当 $a\times b$ 和 $b\times a$ 有不同含意时,这个代数便称为非交换的.

我们不需要到远处去找非交换代数的例子:我们前面有关矩阵代数的讨论便提供了几个.第 177 页的图中如果运算"旋转"(B)和"反射"(D)按某种次序作用于原来图画上,结果可以看得出来:反射那旋转过的图画与旋转那已反射过的图画会产生不同的效果;用符号表示,$B+D$ 不等于 $D+B$.也可以构作出不同的"动物投资银行体制",其中投资和再投资的顺序会影响最后结果.(在通常银行中不是这样,投资和再投资总是可交换的.)所以最好是不说 $B+D$ 而说 $B\times D$,因为上面我们已经提出"我们永远有权要求 $a+b$ 意味着与 $b+a$ 一样. *

通常算术中加法和乘法的另一个重要性质是这些运算是结合的.换句话说,如果你去算 3+4+5,你可以去算 7+5=(3+4)+5 或算 3+9=3+(4+5)而不影响所得结果.在乘法的情形,

* 译注:这一段话是译者加的.



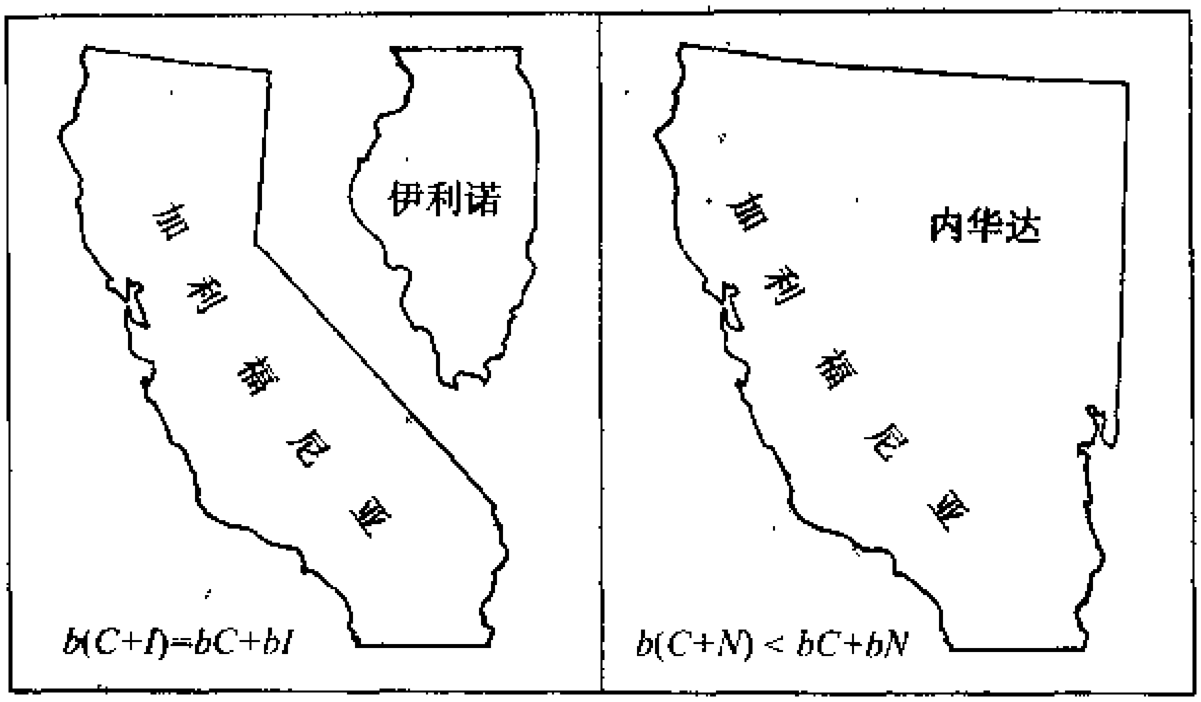
施加于一个矩形图画(A)上的一系列变形呈示于左图中. 这些变形都其代数的面貌. 变形 F 对应于将正方形转化为平行四边形的银行方案;其他的变形各对应于各自的类似银行方案. 变形的组合是非交换的:右图显示旋转一个反射后的图画与反射一个旋转后的图画结果是不相同的(用符号来说,$B+D\neq D+B$).

结合律要求 $3\times4\times5$ 可以由 12×5 或 3×20 求得. 这个概念可能有些微妙. 读者可能问:难道我们不是在说这个系统是交换的,在其中你去加和去乘时用什么次序是没有关系的吗? 其区别可以用片语"fat-cattle merchant(肥牛的贩子)"和"fat cattle-merchant(胖的牛贩子)"的阐释之区别来比喻*. 字的顺序是相同的,但意思已经不同了. 改变的是把字组合起来的方法. 结合律不涉及顺序,而涉及标点符号的作用. 这两个性质是真的不同的,这可进一步用考虑矩阵代数来说明. 矩阵代数是不可交换的,然而是结合的. 至今被研究过的大部分代数系统都是结合的,不过非结合代数最近已经吸引着某些数学家的注意力了.

通常算术的第三个基本性质称为分配律,用符号来说是 $a(b+c)=ab+ac$. 分配律会出现意想不到的情况. 例如,加利福尼亚州和伊利诺州所覆盖区域的边界是加利福尼亚的边界加上伊利诺的边界. 不难看出这个说法与等式 $b(C+I)=bC+bI$ 之联系,其中 b 是"边界"而 C 和 I 是论

* 译注:或者用中文的标点符号来作比喻:"下雨天留客天留我不留"可以解释为(下雨天)+(留客天)+(留我不留)$\neq$(下雨天留客)+(天留我不留).

及的两个州.值得注意的是当论及的两个州有公共边界时分配律便不成立了(参见右图).



通常算术的分配律用符号来叙述是 $a(b+c)=ab+ac$.在分配律的这个例子中加利福尼亚和伊利诺所覆盖区域的边界是加利福尼亚的边界加上伊利诺的边界;用符号是 $b(C+I)=bC+bI$.分配律对加利福尼亚和内华达却不成立,因为它们有公共边界.边界概念在拓扑学和微积分中都出现,这时并不涉及数,但是代数也被引入这些分支中.

边界概念出现在拓扑学和微积分的某些领域中.这里重要的是认识到代数能够在数学的其他分支中扮演重要角色,不只是因为这些分支涉及数.事实上,数学的各分支有着惊人的相互作用.

在代数中"域"一词被用来描写一个很像通常算术的系统.加法,减法,乘法和除法诸运算出现在一个域中(但不许用下面讲的 O 做除数)*,并且很像通常算术中对应的运算.例如,在每一个域中有一个元素记作"O",它很像零(即是说如果你对任何一个元素"加"上一个0,结果不变仍是原来的元素),还有一个元素 I,它很像一(如果你用 I"乘",结果不变).存在许多各种各样的域.179页的表中举出一个域,其中只有四个元素:O, I, A 和 B.我们在这个系统上做运算,遵照着那些我们在算术和初等代数中做运算时相同的法则;在其中交换律,结合律和分配律都成立.一个域只有有限个元素这种可能性是由法国数学家伽罗瓦(Évariste Galois)于1830年发现.这

* 译注:这句话是译者加的.

个特别的域称为一个只有四个元素的伽罗瓦域.

从中学里取来任一公式，你会发现它在伽罗瓦域中仍然成立. 例如，初等代数使我们确信 $A+B$ 乘以 $A-B$ 应当等于 A^2-B^2. 这对于伽罗瓦域仍然成立. 利用所示的表来计算这两个结果，你将发现两者给出相同的答案：I.

迄今我们已到达一个完全抽象的阶段. 对 O, I, A 和 B 没有暗示它们有任何涵义. 我们不再谈及动物的集合或物体的运动. 我们只是已经找到了一个模式，它与通常算术的模式有着许多有趣的相似之处. 一位很纯粹的数学家会说，这是数学的全部目的——发现美丽的和有趣的模式. 一位应用数学家，一位科学家或一位工程师会有兴趣去了解这个模式是否是在自然界中出现，从而能否给出一种解释和一个应用. 虽然是当作一个抽象数学的练习而设计出来的，伽罗瓦域近来已找到一个相当出人意料的应用：它们被用于高速机器做信息传输的无误差编码.

	O	I	A	B
O	O	I	A	B
I	I	O	B	A
A	A	B	O	I
B	B	A	I	O

	O	I	A	B
O	O	O	O	O
I	O	I	A	B
A	O	A	B	I
B	O	B	I	A

伽罗瓦域是一个抽象的代数系统，它只含有四个元素 O, I, A 和 B，它们可以加，减，乘和除(但不能用 O 作除数)而满足算术和初等代数中成立的类似法则. 左表是加法；右表是乘法. 伽罗瓦域最近被用于高速机器做信息传输的无误差编码.

在域中我们可以加，减，乘和除(0 不能作为除数). 不是所有的代数系统都有那么多运算. 例如，在环中我们可以加，减和乘，但是不一定可以除. 环的一个熟知的例子是整数，包括正的和负的都在内. 如果一个人仅熟知如下的数…－4，－3，－2，－1，0，1，2，3，4，…，他将能解决这些数

的加法,减法或乘法的问题. 然而如果要求 3 被 4 除,若限制在这些数的范围内,他就无能为力了.

比环更受限制的是群的概念. 当我们说某个系统是一个群,我们只约定在其中有一个运算,它可以想成一种广义的乘法. 这个运算必须是结合的:如 XYZ 这样的式子必须有一个确定的意义而不管其如何组合. 群也必须含有一个元素 I,它像算术中的数一. 还有,除法是可以的. 第 167 页中列出了一个有六个元素的群.

为了确认一个代数系统是一个群所必须通过的检验少得惊人. 所以群论在高等数学和物理学中有如此多种多样的变化就更令人吃惊了(参见"物理科学中的数学").

许多新的代数系统产生于其他数学分支的特殊问题. 临近 19 世纪末,挪威数学家李(Sophus Lie)完成了微积分中微分方程的全面分类. 在这个分类系统中提炼出某些模式,现今已组成一个单独的科目,称为李群. 类似地,拓扑学的某些问题也导致新的分支,同调代数,它已被证实在拓扑学之外也有重要应用.

在 1840 年代末英国数学家和逻辑学家布尔(George Boole)发展了一个形式逻辑系统,其中亚里斯多德的逻辑学的命题可以归结为非常类似于初等代数中的一些等式. 这个系统满足初等代数的法则,包括交换律,结合律和分配律. 布尔代数近来被应用于电话线路和电脑的设计.

像数学和科学的其他每个分支一样,代数像热带雨林一样,充满活力和扩张精神而继续繁衍. 这里遇到了困难的局面. 要了解每件事显然是不可能的,然而每一位专家都会奉劝你弄清楚他感兴趣的代数的那一个特定的部分. 那些用到数学的科学家应当知道,许多新的数学知识正在被发现;大部分发现都与他自己的研究没有关联,然而,他应该睁大眼睛注视着那些可能会对他大有价值的小小的片断.

16.

几 何

克莱因(Morris Kline),1964 年 9 月号

数学之发展依赖于数和几何两方面的进步.然而不能说数学的这两个关键成分总是肩并肩地前进.它们经常是竞争着,一个的前进以另一个的牺牲为代价.这两个学科虽有共同目标,但有时关系又有点紧张,这一历史让人想起音乐中的对位主题.

数学的真正的第一大步是由几何迈出的.某些原始的数学被埃及的和巴比伦的木匠和测量员于公元前 4 000 年之前就创立了,但是直到公元前 600 年与公元前 300 年之间古希腊哲学家才给数学建起了抽象和演绎证明的决定性的建筑,竖起了欧氏几何大厦,并向它提出了理解宇宙这一课题.

有多方面的力量使希腊人转向几何,可能最重要的是希腊学者碰到了无理数的困难:一个数既不是整数又不是整数之比.此困难产生于著名的毕达哥拉斯定理,直角三角形斜边之长是两直角边长平方和之平方根.在两个直角边均为单位长的直角三角形中,斜边之长便必为$\sqrt{2}$,一个无理数.这样的一个概念超出了希腊人的想像;对他们来说,数曾永远意味着整数和整数之比.希腊人解决这个困难的办法是不承认它是数,而生产一种几何学,它只确认定理并提出证明,但不引征数字.今天这个几何以纯粹几何或综合几何之名而为人所知,而综合几何这个不幸的术语仅有历史的意义.

因为古希腊人的数学致力于演绎自然界的真理,它必须奠基于真理.所幸是手头上已有不少看来是不证自明的真理,其中有如下一些:两点决定一线;一直线向任一方向可延伸至任意远;所有直角皆相等;等量加等量得等量;可以相重的两个图形是全等的.这些公理中的一部分

主要是对空间本身给出了种种论断;其余的则是关于空间中的图形的论断.

从这些公理出发,欧几里得在他的《几何原本》中演绎出约 500 个定理. 在其他著作中,他和他的后继者,特别是阿基米德(Archimedes)和阿波罗尼乌斯(Apollonius),又演绎出几百个定理. 因为古希腊人选择了只研究几何,所以许多定理所叙述的结果按现今的看法被认为是代数的. 例如,一个未知数的代数方程($x^2-8x+7=0$ 是如此的一个方程)的求解是用几何方法实现的,而且欧几里得给出的答案不是一个数,而是一个线段. 因此,欧氏几何当时将现在所认为的代数也包含在内.

定理编排的混乱可能使人认为古希腊人一时研究某一个主题而一时又转到另一个主题. 这可能是一个错误的印象. 他们选择的图形是基本的:一类是直线和曲线,另一类是曲面. 第一类的图形是如三角形和圆锥曲线:圆,抛物线,椭圆和双曲线. 第二类中的图形有立方体,球面,抛物面,椭圆面和双曲面(参见第 185 页之图示). 然后古希腊几何学家处理这些图形的基本问题. 例如,知道了什么就可以断言两个图形是全等的(全等就是除位置可以不同以外是恒等的),相似的(形状相同,可能大小尺寸不同)或者等价的(具有相同的面积)? 因此全等性,相似性和等价性都是欧氏几何的重大主题,并且大部分定理都论及这些问题.

产生了欧氏几何的古希腊文明在亚历山大大帝(Alexander the Great)时期转移离开希腊半岛,而在埃及沿着新的路线重建起来. 亚历山大把他的帝国的中心从雅典搬到另一个城市,他谦逊地名之为亚历山大利亚,并且他宣称其目的是融合希腊和近东文明. 他的后继者实行了这个目标,托勒密(Ptolemys)各王朝统治埃及,自公元前 323 年起,到这个家族的最后一位,被罗马人所勾引 * 的克利奥佩特拉(Cleopatra)为止. 在主要是埃及的和波斯的近东文化的影响之下,亚历山大利亚的希腊文化变得更加倾向工程和更加倾向实践. 数学家的反应是转向了新的兴趣.

应用科学和工程学很大程度上是定量的. 亚历山大利亚时代的人,为了得到定量结果而把算术和代数加在欧氏几何上. 这些主题的令人不安的事实是:它们没有逻辑基础;亚历山大利亚时代的人只接受由埃及人和巴比伦人建立的基于经验的算术知识. 因为欧氏几何贡献了保证推论的安全性的证明,所以它继续统治数学长达若干世纪. 直到 19 世纪末数学家才解决了为算术和代数提供一个公理化基础的问题.

---

* 译注:究竟凯撒和埃及女王克利奥佩特拉是谁引诱了谁,从莎士比亚到当代最著名的电影,不知有多少人或感动或叹息. 反正后来是罗马人征服了埃及.

拉斐尔的名画"圣母的婚礼"(SPOSALIZIO 或 Marriage of the Virgin). 这里是部分的复制,表现出文艺复兴时期的画家们是如何解决透视问题,从而对射影几何的发展作出了贡献的. 我们在画面上添加的白线表示画家如何将实际是水平的平行的直线描写为收敛于一个"生灭点"的直线并且直接从观察者退向远处.

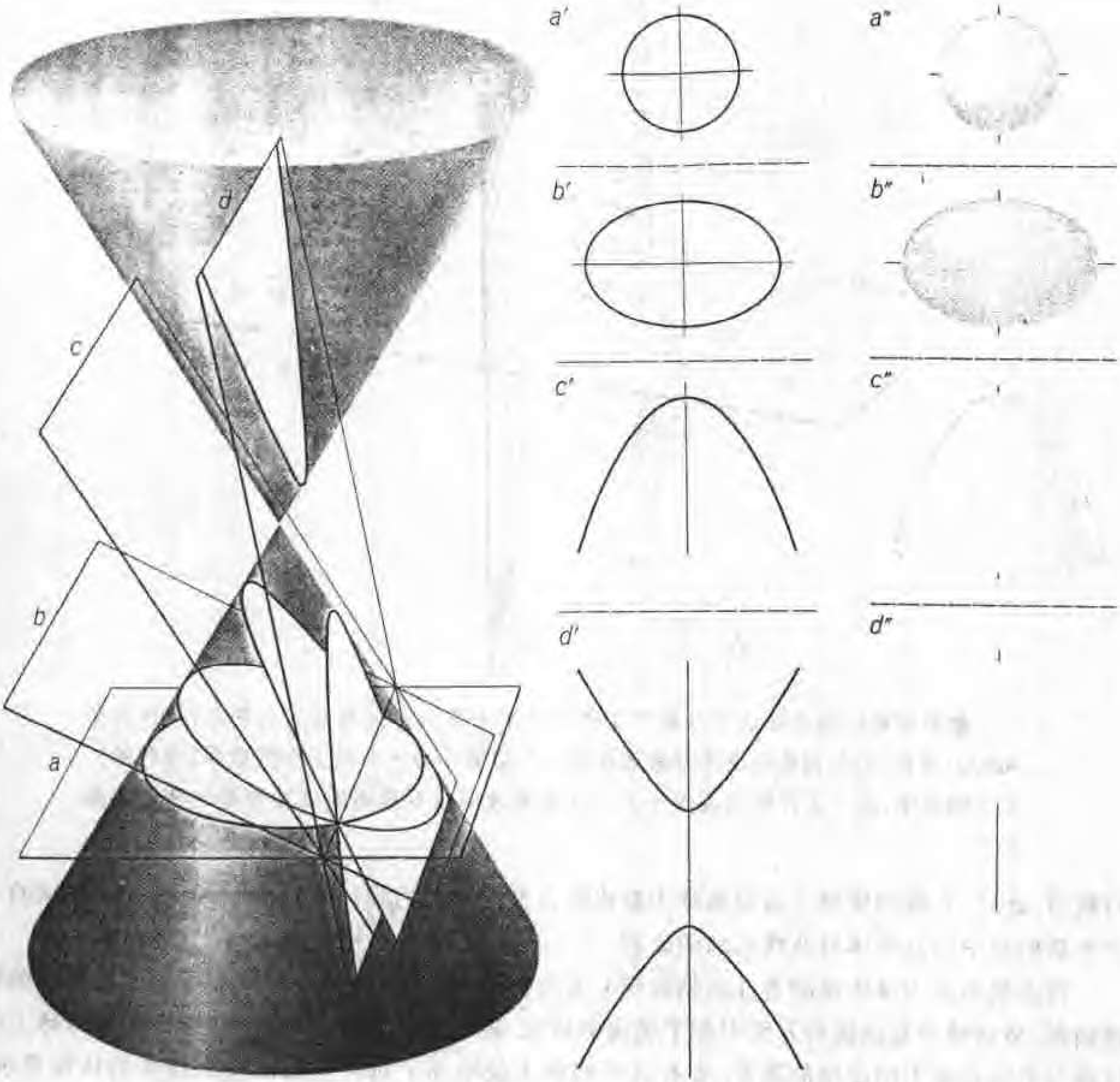
实际上几何一词包含了各种几何.在建立新的几何这个方向上,第一个突破是由文艺复兴画家们完成的.他们寻求解决如何正确描写眼睛所看的东西.因为真实的景象都是三维的,而一张图画是平面的,因此,要想画得完全真实看来似乎是不可能的.画家们采用承认关于视觉的一个基本事实的办法解决了他们的问题.假设一个人用一只眼睛透过一个窗户看某个真实的景象.他看见这个景象,因为从景象的不同点发出的光线射到他眼睛里.这些光线的集合被称作射影.因为这些光线穿过窗户,所以有可能在窗户上标出每一条光线穿过它的一个点.这些点的集合称为一个截面.画家们的发现是:这个截面在眼睛里产生的印象与景象本身所产生的一样.这是可以实际体验的(见186页图).不论光线是从真实景象的粒子发出或者是从窗户上的点发出,到达眼里的是同一条光线.因此画面可以包含窗户上呈现的东西.但这只是一只独眼之所见,面人的视觉是用双眼,画家为补偿这个局限性而采用的方法减弱远处光的强度和运用阴影.他们解决透视问题是何等地成功可由第183页中复制的画来判断.

射影和截面的应用提出了一个基本的几何问题,先由画家提出来,而后才由数学家接手.是哪些几何性质保证原始的景象和其截面通常能在眼睛里产生相同的印象?这个问题的回答导致了新的概念和定理,最终组成了几何的一个新分支称为射影几何(参见克莱因的文章"射影几何",即本书第17章).下面是其中一些概念和定理.从186页图上易见,一条直线的射影的截面是一条直线,如果两条直线相交,则这两条相交直线的射影的截面也是两条相交直线,虽然截面中两条直线间之夹角一般说来与原来图像中的两条直线间之夹角不同.由此可知,一个三角形将给出一个三角形截面,而一个四边形将给出一个四边形截面.

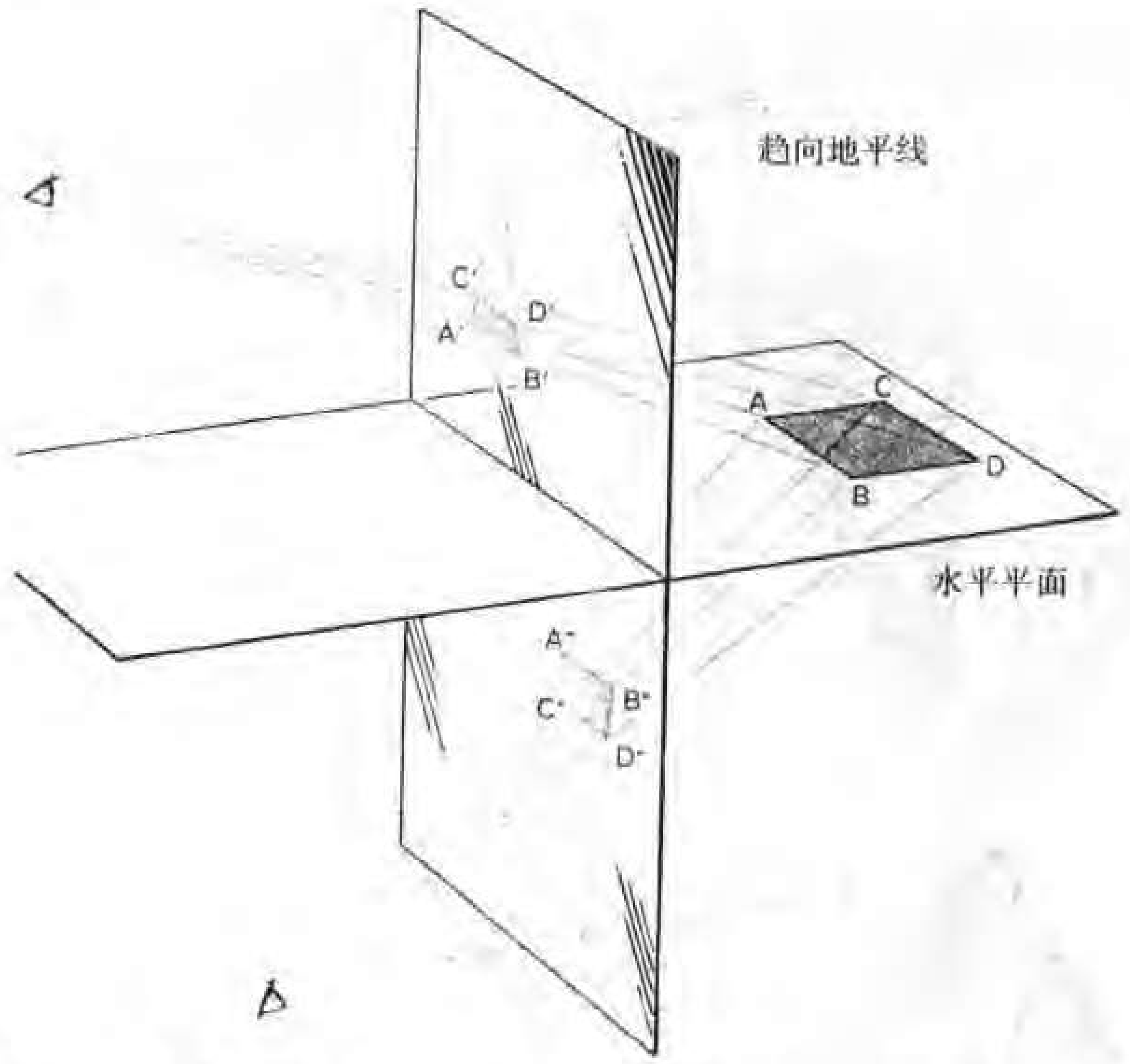
一个图像和它的截面的一个更有意义的共性是由17世纪法国自学成才的建筑师和工程师德扎格(Gérard Desargues)提出的.在现今名为德扎格定理中,他证明了:对任一三角形和该三角形的任一射影的任一截面,每一对对应边将有一交点,并且三对对应边相应的三交点共线(参见187页图上的 P,Q、R 三点).射影几何的这个定理以及其他定理的重要性在于:射影几何不再讨论欧氏几何中的全等,相似,等价和其他概念,而代之以讨论共线性(几个点位于同一直线上),共点性(几条直线通过同一点)以及其他从射影和截面产生的概念.

射影几何有一个短暂的繁荣,然后被一个新登场的几何竞争对手挤到一边去了.这个对手将代数方法赋以几何,现在称为解析几何或坐标几何.它是由16和17世纪在西欧开始的科学时代的一系列事件和发现促成的,并将曲线和曲面的性质的推导和应用推到前台上.

一件事是哥白尼(Nicolaus Copenicus)和开普勒(Johannes Kepler)发现的行星运行日心说理论明显地需要用到有关圆锥曲线(也称圆锥截线)的有效方法;这些曲线是该系统中天体的运



圆锥曲线是几何研究的基本曲线. 跟随着每一个字母，诸如 a，a′和 a″，你可以在左图看到一个平面截割一个圆锥而得一曲线，在中图看到所得曲线之图形而在右图看到由此曲线旋转而得的曲面. 于是 a′是一个圆周而 a″是一个球面，b′是一个椭圆而 b″是一个旋转椭球面，c′是一个抛物线而 c″是一个旋转抛物面，d′是一个双曲线而 d″是一个旋转双曲面. 圆锥曲线的定义和性质是由古希腊学者特别是阿波罗尼乌斯完成的.

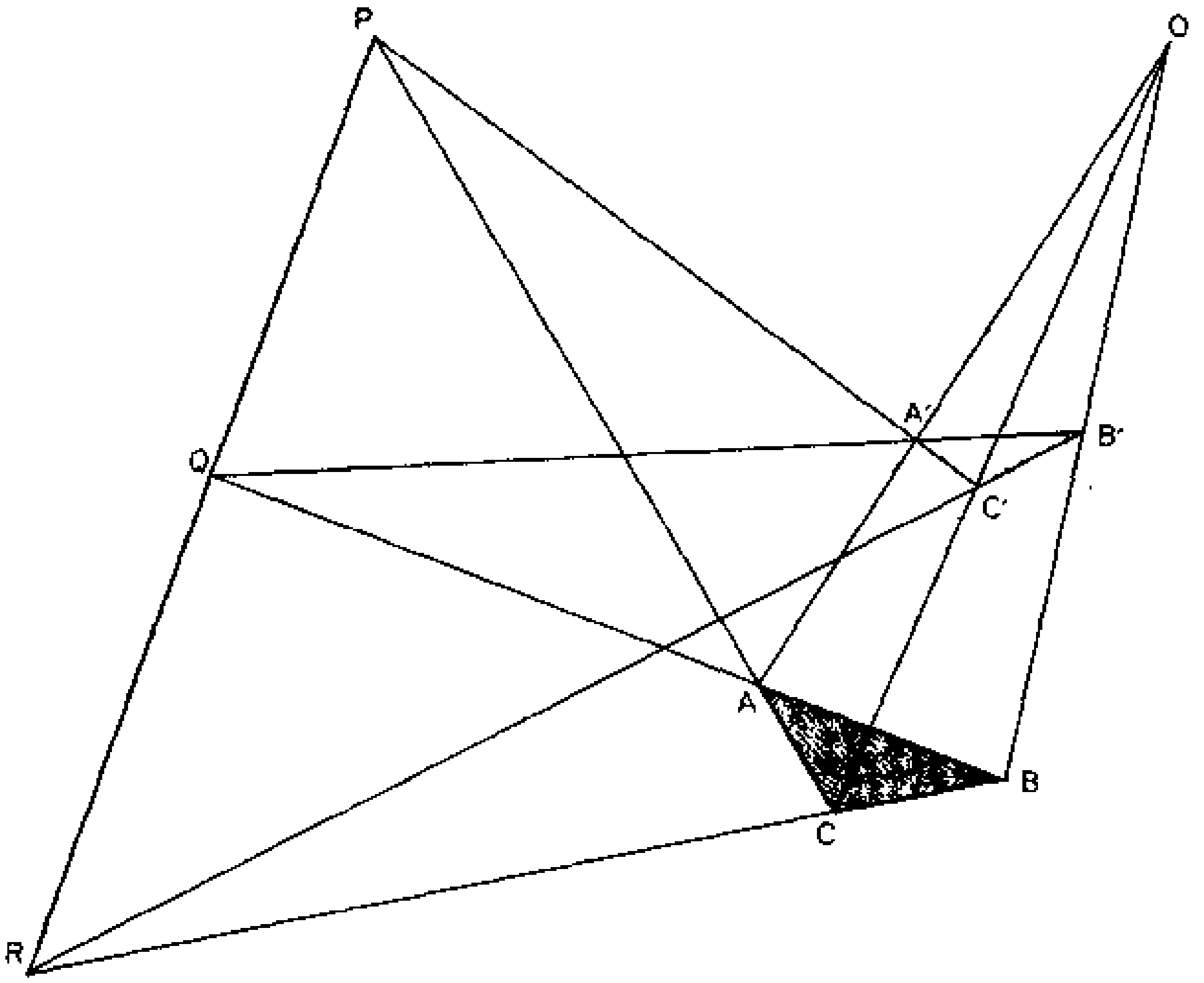


射影和截面概念是从艺术家的工作中产生出来的并且导致了射影几何. 正方形 *ABCD*(深色的)的投影对两个观察者在同一个交截平面上形成不同的截面(浅色的). 一张图画中,这个正方形必须表示为一个截面才能使观察者看这幅图画时感觉到真实性.

行轨道. 此外,它既然推翻了假设地球为静止的古典的希腊力学,日心说理论需要关于运动的一个全新的科学以及物体沿曲线运动的研究.

许多其他的力量也推动着几何朝着同一方向前进. 火药应用的逐渐增加提出了抛射物的轨道问题. 望远镜和显微镜的发明引起了透镜的研究. 地理学探险需要地图,特别要知道地球上的道路与平面地图上的道路的关系. 所有这些问题不仅增加了对熟知的曲线的性质的认知要求,而且还引出了新的曲线. 如笛卡儿(René Descartes)和费马(Pierre de Fermat)所认识到的,欧氏综合方法对研究这些问题是太局限了.

笛卡儿和费马两人都是为快速成长的代数科目作出了巨大贡献的人. 他们看到代数这个分支为几何提供方法论的潜力. 他们发展起来的解析几何通过坐标系统这种工具而将曲线换成了方程. 坐标系统用数来确定平面或空间中的点的位置. 在一个平面上,这个系统用两个数,一个

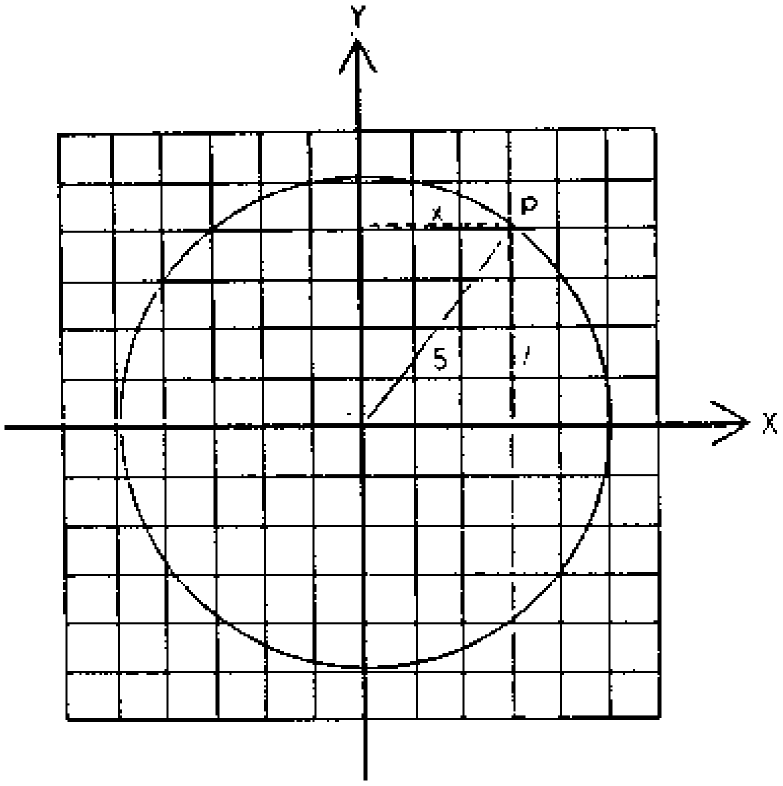


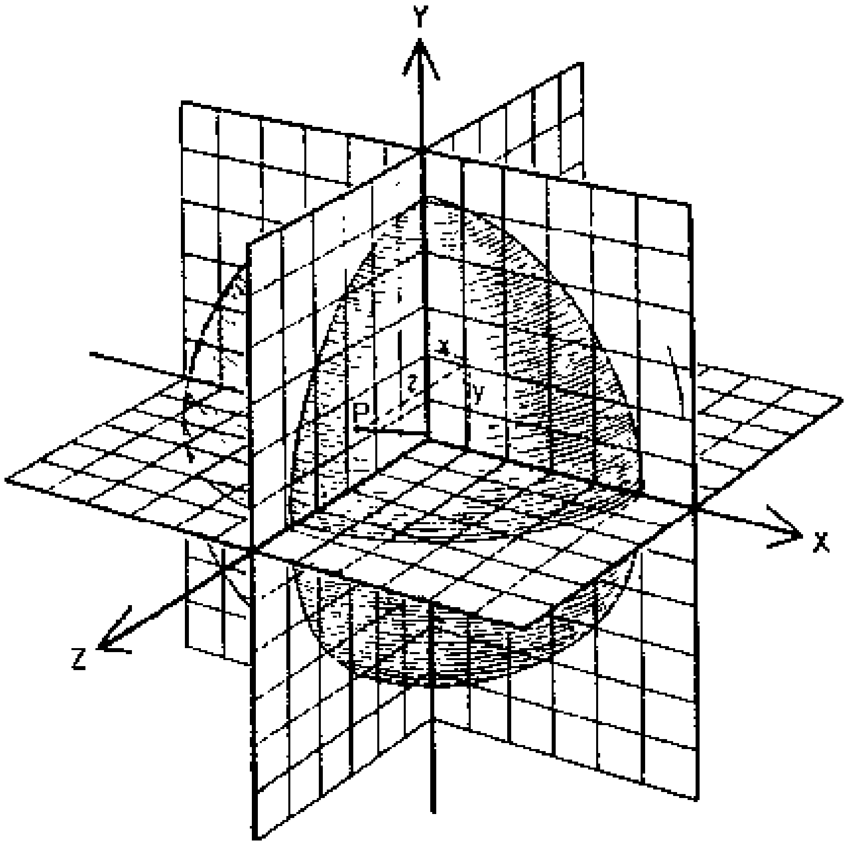
德扎格定理阐述射影几何的任务是研究一个图形及其截面的共性. 该定理说,一个深色的三角形(ABC)和一个截面(浅色的)的任意一对对应边相交于一点,例如边 BC 和 B′C′相交于点 R,并且三个交点 P,Q 和 R 将位于同一直线上.

横坐标和一个纵坐标(见 188 页之图). 横坐标表示一点到一固定的称为 Y 轴的铅直线的距离;纵坐标表示该点到另一固定的称为 X 轴的水平直线的距离. Y 轴之右方及 X 轴之上方的距离为正;而相反方向的距离为负.

这个工具怎样能够使我们代数地表示曲线? 考虑一个半径为 5 个单位的圆周. 如同其他任何曲线一样,一个圆周只是一个特殊的点集. 如果这个圆周是放在一个坐标系中,而且把圆心放在原点,则圆周上的每一点有一对坐标. 因为该圆周是一个特殊的点集,这些点的坐标在某方面是特别的. 其特别的性质由方程 $x^2+y^2=25$ 表示. 这个方程所说的是,如果你取该曲线上任意点的横坐标且用 x 来代替它,并且取同一点的纵坐标且用 y 来代替它,则由 x^2+y^2 所得之数会是 25. 人们说,该曲线上任意点的坐标满足此方程. 此外,只有位于该曲线上的点的坐标才满足此方程. 在曲面的情形要用三个坐标的方程. 例如,半径为 5 个单位的球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=25$.

于是在笛卡儿—费马体制下点变成了数组,而曲线变成了由方程界定的数组的集合. 曲线的性质就能通过应用代数过程于方程而推导出来. 伴随着这个进展,数与几何的关系走了一圈





笛卡儿坐标系能把任意图形表作方程.对于左图中之以5单位为半径的圆周,其方程为 $x^2+y^2=25$.满足方程的 x 和 y 的任意值表示这个圆周上的一个点;对于点 P 而言,$x=3$ 而 $y=4$.在右图中可看到由方程 $x^2+y^2+z^2=25$ 表示的那个球面.

又回到起点.古希腊人把代数埋藏在几何里,而如今几何被代数遮蔽而黯然失色.正如数学家们所说,几何已被算术化了.

笛卡儿和费马期望代数的技巧会提供研究曲线的有效的方法这个结论并不完全正确.例如,这些方法不能应付曲线的斜率和曲率等基本性质.斜率是一条曲线每一个水平单位长与上升或下降的量之比率.曲率是该曲线沿曲线单位长的方向改变量之比率.这两个比率除了二者均为直线和后者为一圆周以外,对所有曲线都逐点改变.为了计算逐点改变的比率,笛卡儿和费马的纯粹代数的技巧就不够用了;必须用到微积分,特别是微分学.的确,微积分的显著特点是它有能力获得这类比率.

借助微分学,曲线和曲面的研究获得长足的进步,引进了一个新名词:微分几何来表示这项研究.微分几何考虑的各种各样的问题远不止是斜率和曲率的计算.它特别研究曲面上极重要的两点间的测地线或短程线问题.给了一个如地球表面样的曲面,联结曲面上给定的两点 P 和 Q 的哪条曲线是从 P 到 Q 沿着曲面的最短距离?如果你取地球表面为一球面,答案是简单的.测地线为大圆.(一个大圆把球面切为大小相同两半;赤道是一个大圆而其他的纬圆则不是.)如

果你更精确地认为地球表面是一个椭球面，则测地线是较为复杂的一些曲线并依赖于你所选取的 P 和 Q 两点的位置. 微分几何所论及的内容包括曲面的曲率，地图制作和由空间曲线界定的最小面积曲面，后者可用肥皂泡膜来精彩地实现(见 194 页图).

从纯粹几何的立场来看解析几何和微分几何的方法论，虽然成功却走得太远了. 虽然这些科目处理几何，但曲线表示为方程而证明方法是代数的和分析的(即用到微积分). 漂亮的几何推理被抛弃，同时几何沉没在公式的海洋中，几何的灵魂被驱逐了.

纯粹几何学家在冷遇的阴影中生活了 150 年. 然而，到 19 世纪他们找到了勇气和活力去重新肯定他们自己. 几何的复活是由蒙日(Gaspard Monge，1746—1818)发起的，他是最重要的法国数学家，并且是拿破仑的顾问. 蒙日认为分析学家把几何出卖了，并且由于没有用几何去解释他们的分析，没有用几何图形去帮助他们思考，他们也害了自己. 蒙日是一位非常能鼓舞人的老师，他在自己身边团结了一批非常聪明的学生，其中有卡诺(M. Carnot，1753—1823)，布良松(Charles-Julien Brianchon，1785—1864)和彭赛列(Jean Victor Poncelet，1788—1867). 这些人受到蒙日的激励对几何充满热忱，超越了老师的目标并证明几何方法可以完成得与代数的和分析的方法一样多甚至更多. 击败笛卡儿，或如卡诺所说，“从分析的象形之下解放几何”，成了他们的目标.

由彭赛列领导的几何学家回到射影几何，它于 17 世纪曾被无情地抛弃了. 作为拿破仑的一名军官，彭赛列被俄国人俘虏并于 1813 年～1814 年间关在俄国监狱里. 在那里他没有任何书籍的帮助，重建了他向蒙日学到的所有内容；然后他继续进而创建了射影几何的新结果.

射影几何的研究在整个 19 世纪都在继续进行. 很奇怪，它在本质上是用代数方法发展起来用以证明定理，而这种代数方法又是坐标几何方法的延拓，可是搞到头来，发起这场复兴的纯粹几何学家的兴趣却被颠覆了. 但是，射影几何再一次因另一个发展而黯然失色，这就是非欧几何的创建，一个同古希腊人的数学一样戏剧性的和重要的创建.

在欧氏几何长期统治下，许多数学家因为有一个小的污点似乎损伤到公理集合而烦恼. 这就是关于平行线，即同一平面上两条无公共点的直线. 欧几里得提出了一条公理，它说：如果直线 n 交直线 l 与 m 使两同侧内角之和小于 180 度，则 l 与 m 将在直线 n 的这两个角所在之一侧相交. 这条公理对于导出最重要的一些定理是不可或缺的. 其中一个定理是三角形内角之和为 180 度. 但这条公理有点复杂，有理由使人相信欧几里得自己也不太喜欢它. 其实，不但他而且后来直到大约公元 1800 年数学家们实际上无人怀疑其陈述之真理性；这就是说，他们未曾怀疑它是实际的或物理的直线的行为的一个正确的理想化. 烦恼着欧几里得和其后继者的是：这条公

理不是那么自明的，如像两个直角是相等的那条公理那样.

从希腊时期起数学家们寻求将这条平行公理换成一条等价的公理，也就是想找出一条公理，连同其他九条欧几里得公理将能演绎出欧几里得已经推出的全部定理. 同时，由欧几里得原来提出的公理也可以把这条新的公理作为定理导出. * 提出过许多等价的公理. 其中一条是数学家普雷费尔(John Playfair，1748—1819)建议的，这一条是通常在中学里讲授的，它说，给了一直线 l 和 l 以外的一点 P，包含 P 和 l 的平面中只存在一条直线 m 通过 P 而不与 l 相交.

普雷费尔的公理不仅等价于欧几里得的公理，而且它也较为简单并且显得直观上可信；即它确实看上去是陈述了物理空间里的直线的一条无疑的或自明的性质. 然而，后来的数学家并不满足于普雷费尔的公理或任何另外提出的与欧几里得公理等价的公理. 他们不满意的理由是每一个提出来的替代品都直接或间接涉及发生在空间很远处的一个结论. 普雷费尔的公理断言 l 和 m 将不相交，不论这两条直线延长多远. 实际上，欧几里得公理在这一点是最高明的，因为它说的一个条件是：在此条件下直线将在某个有限远的地方相交. 总之，欧几里得避免了“无穷远处”这个十分困难的概念.

有关那些断言发生在空间很远处的公理有什么值得反对呢？答案是它们超越了经验. 欧氏几何的公理是被设想为有关真实世界的无可怀疑的真理. 你怎能保证两条直线在物理空间中延长至无限远仍不会被迫相交？数学家面临的问题是欧几里得的平行公理不是很自明的，同时等价的那些公理看上去似乎较为自明，其实仔细审查后发现也一样值得怀疑.

平行公理的问题，或者如法国数学家达朗贝尔(Jean Le Rond d'Alembert)所说“几何学之丑闻”，从希腊时期直到 1800 年的各个阶段都纠缠着数学家. 即令由此而看到数学家们是多么坚韧 不拔和一丝不苟，这些研究的历史也是值得注意的. 这里我们必须省去历史的叙述面跳向结果. 一条破坏真理的真理清清楚楚地被 19 世纪所有数学家中最伟大的高斯(Karl Friedrich Gauss，1777—1855)所看到. 他的第一个观点是有点技术性的然而很本质的，就是说，平行公理独立于其余九条公理；即逻辑上可能选择一个矛盾的公理并用它与其他九条欧氏公理结合而演绎一套新几何的定理. 因此人们可以假设：给了一条直线 l 和线外一点 P，在 P 和 l 的平面中存在无限多条通过 P 而不与 l 相交的直线. 高斯接受这条矛盾的公理并从它和其他九条公理演绎出许多定理. 高斯称他的新的几何为非欧几何.

正如所期望的，新几何的许多定理都与欧氏几何的定理相矛盾. 在这个几何里三角形内角和恒小于 180 度. 并且这个和随三角形之大小而变化；三角形面积越接近于零，内角和就越接近 180 度.

---

* 译注：这一句话是译者加的.

逻辑上不同于欧氏的几何的存在性本身就是一个惊人的事实.直到那时为止,几何学基本上就是欧氏几何;解析几何和微分几何只是用了不同的技术的方法论,而投影几何虽然论及新概念和新主题,它们都与欧氏几何完全一致.非欧几何则是与欧氏几何相抵触的.

高斯的第二个结论更令人不安.它说非欧几何能同欧氏几何一样被用于表示物理空间.这个结论乍看上去是一派胡言.如果一个三角形内角之和是180度,那么它怎能又小于180度?答案是,这只似乎是不可能,但因为非欧几何要求三角形充分小时内角和才任意接近180度,而人们通常处理的三角形都很小;这样一来,这些三角形之内角和能如此接近180度,使得在测量这个和时,不可避免的测量误差使得我们不能排除这两种可能性之任何一种.

非欧几何的含意是戏剧性的.如果欧氏几何和非欧几何可以同等好地表示物理空间,那么哪一个是关于空间和空间中图形的真理?没法说.事实上还可能不限于在这两个可能性之中选择.这个可悲的可能性很快被认识到了.逐渐逼迫着数学家承认的事实是,几何不是关于物理空间的真理,而是可能的空间有许多种,若干种这样数学地构作出来的空间,相互尖锐地不同,却能够同样好地适应于物理空间一直到实验误差可以容许的程度.

从而几何的概念必须要修正.同样,数学的概念也要修正.因为两千多年来数学曾是真理之堡垒,非欧几何这一理性之伟大胜利证明为知识之一个灾难.这个新的几何带来了这样一个观念,数学在组织思维和为人类工作的种种方面大有用途,但却并不提供真理性,而是外观上貌似为事实,实际是一个人造的寓言.

黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann(1826—1866))不可估量地扩展了在几何中新开辟的远景.黎曼是高斯的学生之一,并且无疑地从他那里继承了研究物理世界的兴趣.黎曼在几何领域中的头一个观察是数学家曾被骗而相信欧氏平行公理必须是正确的.可能他们同样被骗而接受另外的欧几里得公理.黎曼立即注意到这样一条公理,一条直线是无限的.他指出,实验不能让我们确认物理直线的无限性.实验告诉我们的只是沿着直线走我们不会走到尽头.但是如果一个人沿着地球的赤道走,他也不会走到尽头.换句话说,实验告诉我们的只是直线是无尽头的或者无边无涯的*.如果我们改变相应的欧几里得几何中与此相关的公理,并且假设那儿**没有**平行线,我们便有了另外一组公理,由它我们可以演绎出另外一种非欧几何.

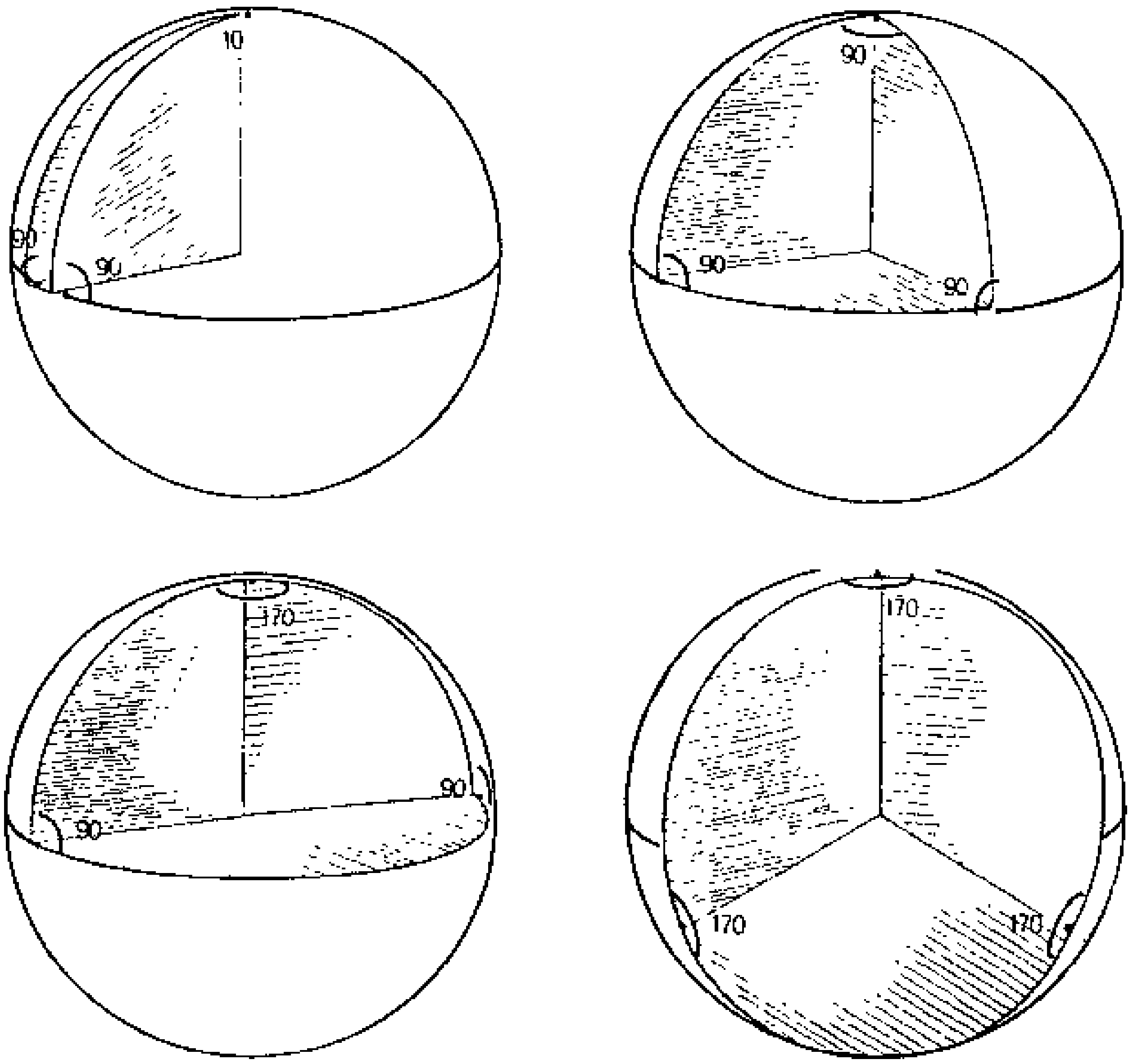
在1854年的一篇题为"论作为几何基础的假设"的文章里黎曼只用到了有关物理空间的最可靠的事实,开创了关于可能的空间更深刻的研究.他构作了一个新的几何分支,现今称之为黎曼几

---

* 译注:黎曼在这里把"无界"即没有边界与"无限"区别开了.通常读过一点高等数学的人常把作为一个拓扑概念的无界与作为一个度量概念的无界(即无限)混起来了.这是黎曼的重大贡献.

何，它把数学空间的种类成千倍地打开了（参见勒柯尔白也的“空间的曲率”，本书第 18 章）.

为了欣赏黎曼几何你必须首先知道：选什么来作为两点之间的距离决定了所得之几何. 这件事不难看出. 考虑地球表面上的三个点. 你可选取连结任意两点的直线段的长度作为距离. 在这情形你得到的三角形具有欧氏三角形的所有性质. 特别，此三角形内角和为 180 度. 然而，你可以取任意两点之间沿地球表面的距离，意为沿过这两点的大圆劣弧 * 的长度作为两点之距离. 在这种情形下，三个点决定一个所谓球面三角形，这样的三角形具有完全不同的性质. 例如，它们的内角和可以是 180 度到 540 度之间的任何数（参见下图）. 这是球面几何的一个事实.



球面三角形内角和可以大于 180 度. 在图中左上角的三角形内角和为 190 度. 在接下来的几个球面上的三角形内角和为 270 度，350 度和 510 度. 这种三角形是黎曼的非欧几何的典型的概念.

黎曼心中想的是一个构形可以变化的几何. 假设你试图去设计一个几何使它符合一个山区

* 译注：这两个字是译者加的.

的表面. 在某些地方表面可能是平坦的，另外一些地方可能是锥状的山，而还有些地方是半球面的山岗. 曲面的特征各处改变着，因此决定几何的距离公式必然从一地到另一地甚至从一点到另一点都是改变着的. 换句话说，黎曼建议了非匀齐的空间，特征从一点到另一点改变着的空间，或带有变化的曲率的空间.

黎曼四十岁就死了. 除了把他的空间概念的粗略轮廓给出一个梗概，很难再多做什么了. 黎曼几何的进一步发展成了许多人的任务并且至今仍在进行. 20 世纪早期意大利数学家里奇(Gregorio Ricci)和列维齐维塔(Tullio Levi-Civita)做出了重要贡献. 里奇引进了张量演算，这是一套可以用来表示几何关系的形式系统，而且采用何种坐标系都可以. 列维齐维塔给出了黎曼几何的平行性概念：它对于很一般的空间提供了表示欧氏平行性的办法.

由爱因斯坦建立的广义相对论不仅激励了黎曼几何的进一步研究，而且提出了统一引力场和电磁场于一个数学框架中的问题. 为此外尔(Hermann Weyl)于 1918 年引进他称之为仿射联络空间，用到列维齐维塔的平行性概念而不用距离概念来关联空间中一点与另一点*. 比黎曼的更加一般的一个距离表示式产生了所谓芬斯勒(Finsler)空间.

黎曼也是拓扑学的奠基者，这是几何的又一分支，它的研究今天最为活跃. 19 世纪 50 年代他在研究现在所谓的单复变函数时，引进了一类曲面，称为黎曼曲面，用以表示这类函数. 这些函数的性质被证明与这些曲面的性质密切相联. 然而，对每个给定的函数，曲面的精确形状并不要紧. 这样他发现了按一个新的原则将曲面分类更好.

给了两个相似的图形，例如一个大的和一个小的有着相同形状的三角形，其中任意一个可看作另一个的变形或变换，其改变是小的那个均匀地放大而得大的，或者大的那个均匀地缩小而得小的. 在讲到射影几何中的投影和截面时，一个图形的变形会更严重. 不过甚至在这些变形之下，一个四边形仍然保持是一个四边形. 还可能做出更为严重的变形. 比如，一个圆周可以弯成一个椭圆或者一个更为复杂的形状，一个球面可以变成一个鸡蛋的形状. 在另一方面，如果不撕裂或粘连、**一个圆周，一个 8 字形和一个三叶形不是能互相变化的曲线，同样，球面，环面和双环面也不是能互相变化的曲面.

因此黎曼进而考虑允许拉伸，弯曲，压缩甚至扭曲的变形. 可以用这种变形相互得到的图形称为是同胚的，或拓扑等价的. 然而，如果你撕破一个图形，或者使不同的点粘连，则新的图形不

---

* 译注：规范场的概念也应该追溯到外尔.

** 译注：这句话是译者加的. 下文作者也提到它.

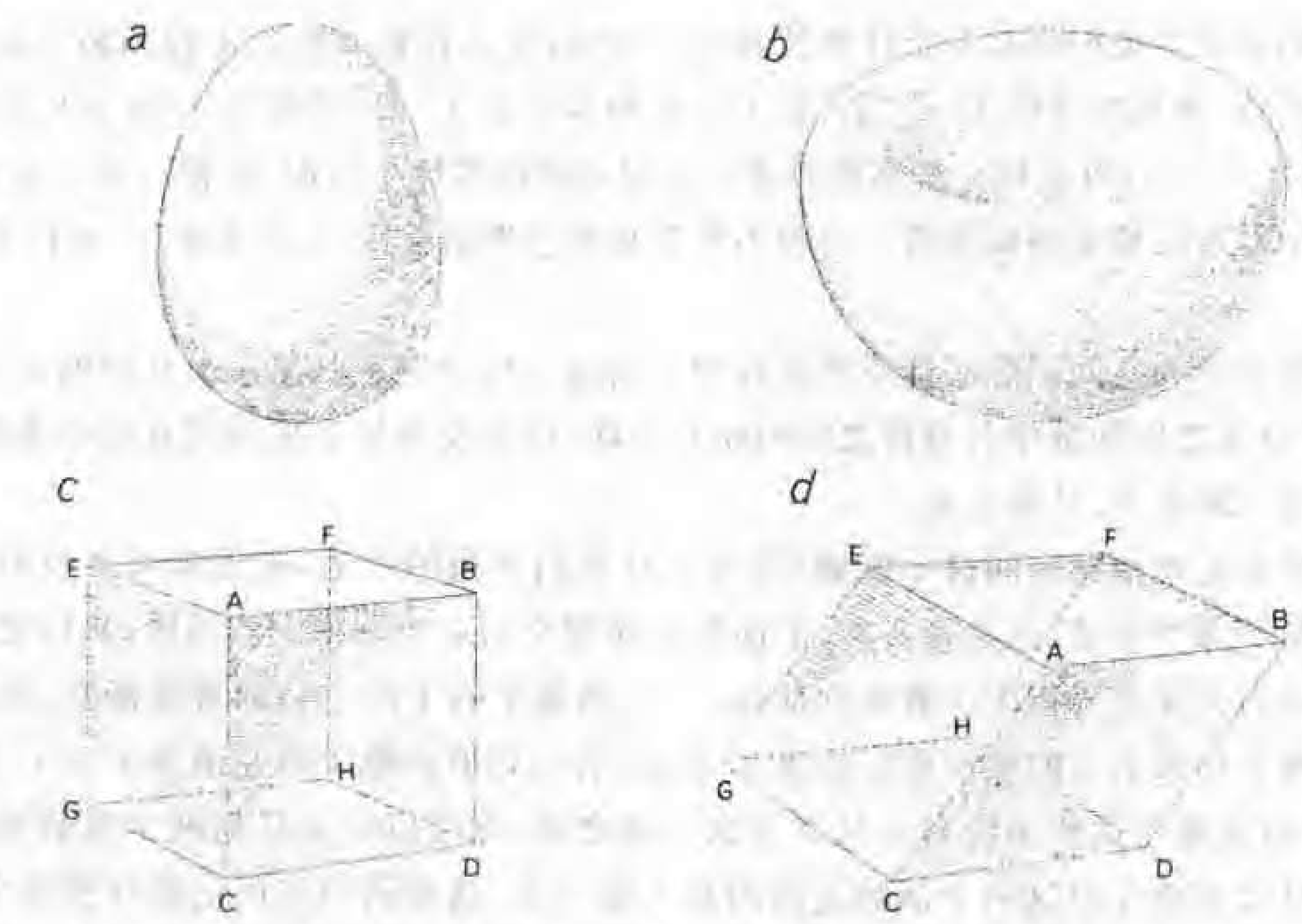
拓扑等价于老的.于是你可以将一个圆周捏成一个8字形,但后者与原来的不是拓扑等价的.也可以这样来描写拓扑等价的图形,即把它们想像成是用橡胶做成的.于是任何一个可以用拉伸,弯曲和压缩但不撕破或粘连橡胶而得的图形都是与原来的那个拓扑等价的.

拓扑学的主要问题是去了解何时两个图形是拓扑等价的.这可能很难由观察图形而看出,特别因为拓扑学要考虑三维的甚至高维的图形.由于这个原因和其他原因,人们寻求用某些确定性质来刻画等价图形,使得如果两个图形具有这些性质,它们必然是拓扑等价的,正好像如果一个三角形的两边和夹角等于另一三角形的对应的两边和夹角则两个三角形保证是全等的.例如,如果你在一个球面或一个椭球面上画一条闭曲线,这条曲线将成为曲面上一个区域的边界,但这在环面上就不对(参见下一页之下图).球面与环面因此不是拓扑等价的.可以用曲线在曲面上是否界一区域来刻画曲面,但这个判断标准对于更为复杂的曲面或对于高维图形就不够了.

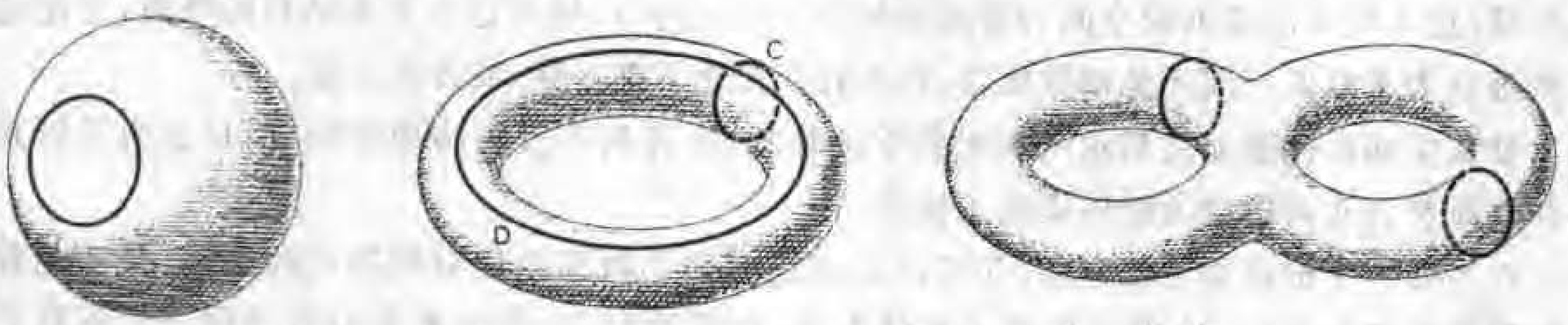
肥皂膜总是具有最小面积的形状,它们直观地解释了微分几何中的一个问题:求空间中的曲线所界的最小面积的曲面.微分几何也用于地图制作和曲面的曲率等问题.

虽然拓扑学的许多基本问题仍未解决,数学家在他们能够做到的方面都取得了进展,并在过去的十多年间他们转向了称作微分拓扑的分支.在这一场奋斗中他们合并使用了拓扑方法和微分几何方法以期望并用两个工具会优于只用一个.

另一个当前很活跃的领域是代数几何.两百年以前这个题目是坐标几何的一个延伸,并且



这里画出了我们熟知的形状的拓扑变换.一个球面可以形变为一个蛋形(*a*),一个瓜球形(*b*),一个正立方体(*c*)以及正立方体的一个变形(*d*).每个变形都拓扑等价于其余的,从而拓扑等价于球.



曲面的拓扑等价能够用在图形上画闭曲线的办法来确定.如果每条闭曲线都界曲面上一个区域,则该曲面拓扑等价于球面,见左图.在中图的环面上和右图的双环面上所画的这一型的曲线不界定一个区域;因此这后两个图形都不拓扑等价于一个球面.

是专门研究较圆锥曲线更复杂而用高于二次的方程来表示的曲线.不过从 19 世纪末以来,代数几何的主要范围已被认为是研究由代数方程定义的曲线,曲面和高维结构的性质,以及它们在有理变换之下的不变量.这种变换对一个图形的改变要大于射影变换而小于拓扑变换.

数学家们屈服于他们喜欢复杂化和代数化的嗜好，允许代数几何的方程中的坐标取复值甚至代数域中的值(参见本书第13章"数"第152页和本书第15章"代数"第178页). 从而甚至简单的方程 $x^2+y^2=25$，当 x 和 y 是实数时表示前面讨论过的那个圆周，但若 x 和 y 取复值时，则可以表示一个复杂的黎曼曲面或者一个很不平常很难想像的结构. 几何遭殃了，而代数兴旺了.

几何作为空间和空间图形的性质的研究的上面这一场讨论可以展示出几何的成长，变化和活力，以及各分支之间和数学各分科之间的相互关联，但还没有呈示出现代几何的全部本质. 人们常说代数是一种语言. 几何也是.

当今数学家追随抽象空间这个课题，你可以从他们所用的术语，就看出其涉及的高度理想化的空间是何等深奥难懂. 这是真实的，但抽象空间理论的主要用处——的确，从历史上看推动这个研究的动力是促进分析中函数类的应用. 一个抽象空间中的"点"通常是函数，而两个点之间的距离是两个函数之差的某种重要的测度. 因此，你可以有兴趣于研究诸如 x^2，$3x^2$ 和 x^3-2x 这些函数，并有兴趣于这些函数当 x 从0变到1时之值. 你可以定义任何两个函数之间的距离为当 x 之值从0变到1时这两个函数之间的最大数值差. 这种函数空间已经证明是无限维的. 今日人们经常听说的希尔伯特空间和巴拿赫空间都是函数空间. 就数学方面来讲，这些在所谓的泛函分析科目中是重要的，而泛函分析现在已是量子力学的主要工具.

为什么你事实上在处理函数而要谈及空间？这是因为思维的几何方式是有帮助的，并且甚至能联想出有关函数的定理. 当用分析的办法表述时复杂和难懂，可能用几何的办法解释会直观明显. 让人惊奇的是抽象空间的研究是拓扑学的一部分，因为这些重要结构的性质，无论这些结构被认为是真的空间还是函数集合，在拓扑变换之下都保持，或者说不变.

抽象空间的课题显然呈示出现代数学的抽象性. 几何不仅为物理空间，而且也为任何其概念和性质符合几何框架的结构提供了模型.

在另外一个也很重要的方面，几何已是远远超出了研究只是容纳物质的载体. 笛卡儿曾断言物理能够被几何化，20世纪目睹了它的实现. 相对论是20世纪最重要的两项科学成就之一(量子理论是另一项). 在相对论中物质的净引力作用已归结为几何. 正如山区的几何要求一个随处变化的距离公式来表示地面变化的形状，爱因斯坦也用一个变化的距离公式来表示空间不同的质量分布. 物质决定了几何，而结果这个几何解释了原先归之于引力的现象.

几何已经消化了现实的一部分，并且可能必须要消化全部现实. 今天，在量子力学中，物理学家努力去解决亚原子物质的看上去似乎相互抵触的波粒二象性. 他们可能必须从空间的量子去生成这两者. 或许物质本身也将被溶解于纯粹空间之中.

如果你想评估今天的数与几何的竞争，你必须承认，就证明的方法论而言，几何已在很大程度上让位于代数和分析. 复杂结构的几何处理，当然是高维空间的几何处理，如笛卡儿抱怨欧氏几何那样，能够"在想像力极度劳累的条件下来锻炼理解力". 此外，科学的定量要求只有最终求助于数才能达到.

然而，几何给空洞的公式提供了营养和涵义. 几何永葆其为丰足的和富有成果的直观的主要源泉. 而直观反过来为数学提供创造的动力. 大多数数学家用几何模式在思考，当他们提出复杂的分析结构时，看不见做作的任何迹象. 你可以仍然相信柏拉图的名言"几何拽着灵魂走向真理".

17.

射影几何

克莱因(Morris Kline),1955 年 5 月号

在数学的大厦中有许多巨宅,其中最精美的是射影几何.其概念之优美,其结构的逻辑严密性以及其在几何中所起的基本作用都值得推荐给每一位学数学的人.

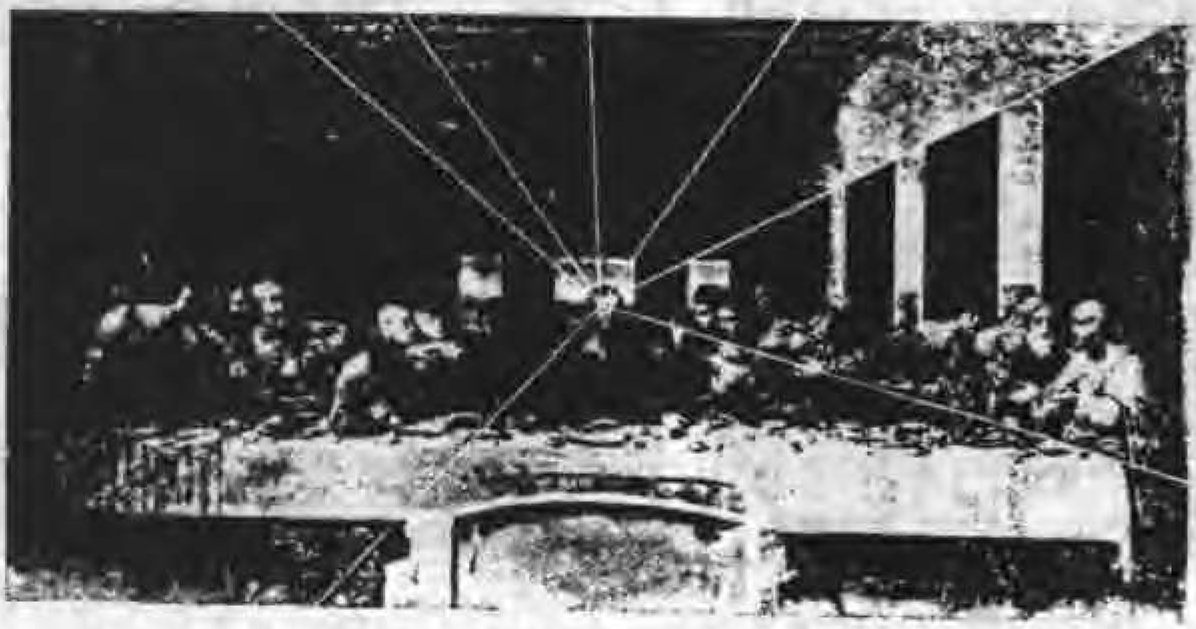
射影几何起源于文艺复兴时期艺术家的工作.中世纪的画家曾满足于用象征性的术语来表现自己.他们用高度程式化的方法来画人物和实物,通常以金色为背景,似乎在强调图画的主体,一般来说是宗教的,是与现实世界没有联系的.一个极好的例子是被批评家认为是中世纪绘画之花的马丁尼(Simone Martini)的"天使报喜"*.随着文艺复兴的到来不仅要求绘画现实化,而且希腊的学说认为自然界之本质是数学法则也得以复活.文艺复兴的画家奋斗了一百多年以寻求一个数学模式,使他们能够在二维的画布上描画出三维的真实世界.因为文艺复兴的许多画家是建筑师和工程师同时也是艺术家,他们最终达到了他们的目标.为了解他们的成就是如何卓越,只需比较一下达·芬奇(Leonardo da Vinci)的"最后的晚餐"与马丁尼"天使报喜"(参见 199 页)就够了.

三维表现之关键被发现在于现在熟知的射影和截面的原则.文艺复兴的画家想像从他正在画的景物之每一点发出一条光线到一只眼睛.他把这个收敛的直线集合称为一个射影.于是他想像他的画布是一块玻璃屏幕插在景物和眼睛之间.射影中的直线交这个玻璃屏幕所得点集他称之为一个"截面".为达到现实主义,画家必须在画布上将呈现在玻璃屏幕上的截面再现出来.

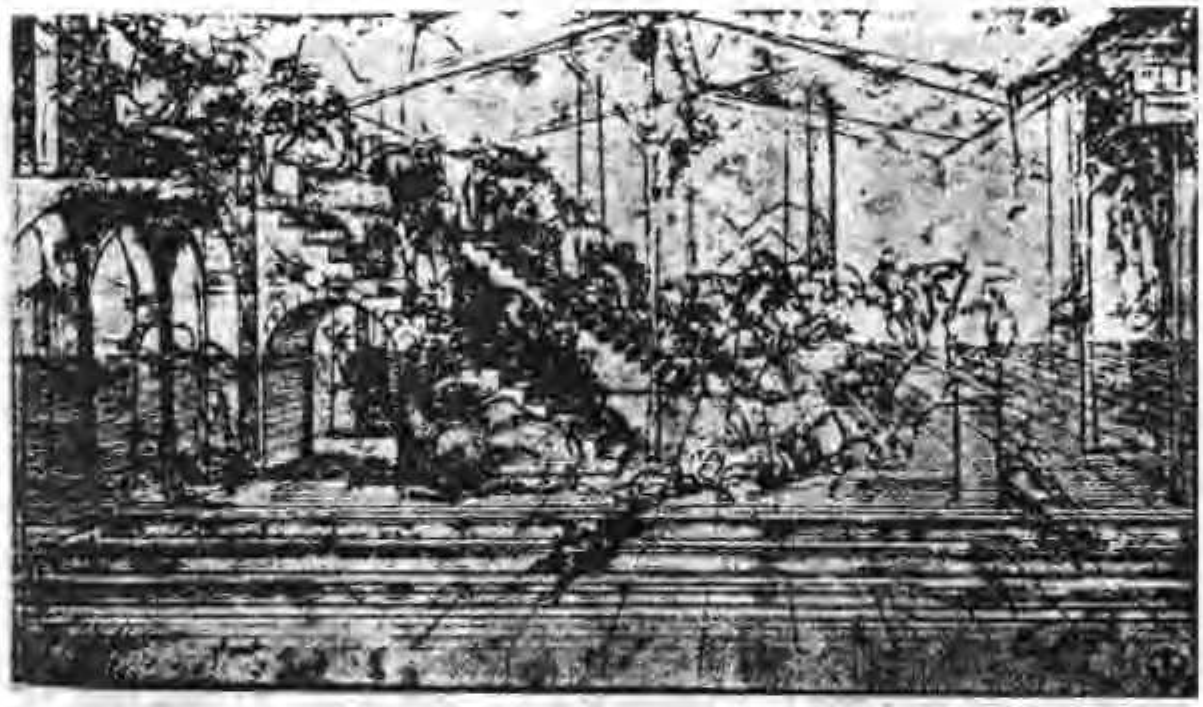
---

* 译注:这是一个圣经故事.说天使长加百列向圣母玛利亚报告她将生育耶稣的喜讯.

马丁尼的"天使报喜"是中世纪艺术家的平板的因袭的绘画的一个卓越的例子. 人物用写意手法被安排在金色背景之中.



达·芬奇的"最后的晚餐"运用了射影几何来产生三维的幻觉. 在此复制画上画出了一些直线相交于无限远点.



达·芬奇的画稿，为研究他的画"三贤人之朝拜"*而作，显示了他在实际画该画之前如何艰辛地将整个景象做出几何设计.

由德国画家丢勒(Albrecht Dürer)所作两幅木刻说明了射影和截面的原则(见下图). 在"坐着的男人的设计者"(左)中艺术家正在玻璃屏幕上标下一条从景物发出射向艺术家的一只眼睛的光线交屏幕的一点. 第二张木刻,"鲁特琴的设计者"(右),显示在玻璃屏幕上描出的截面.

丢勒(Albrecht Dürer)的木刻描述了射影和截面原则. 在第一张木刻中这位画家正在描从景物发出的一条光线到他眼中而与玻璃屏幕相交的那个点. 在第二张中一个景象被描绘在屏幕上.

---

* 译注：圣经故事，当耶稣诞生时，有三位贤人(或称三博士)从东方来到伯利恒朝拜.

当然截面不仅依赖于艺术家站立的位置也依赖于眼睛与景物之间放置玻璃屏幕的位置. 然而这只意味着同一景物能够有许多不同的画像. 当他已经选定了他的景物，他的位置和玻璃屏幕的位置，画家的任务是精确地把截面中所包含的内容搬到画布上. 因为画家的画布并不是透明的，并且因为他所画的景物有时只存在于他的想像之中，文艺复兴时期的艺术家必须导出一些定理，这些定理会确切地指出一个景物将如何呈现在想像中的玻璃屏幕上（位置，大小和形状），以便把景物搬到画布上去.

他们推演出的这些定理提出了一些问题，而后来证明它们在数学上是很重要的. 职业数学家接过了这些问题的研究，并且发展了一门有着极大普遍性和威力的几何. 让我们追踪它的发展的足迹吧.

从一个正方形的一侧的某一点去看它（图 1）. 在一个插在眼睛和正方形之间的一个玻璃屏幕上，它的射影的截面不是一个正方形而是某个另外的四边形. 因此例如正方形的地砖在图画里不画作正方形. 屏幕位置的改变将改变截面的形状，然而只要观察者的位置保持固定，则截面在眼睛里产生的印象是相同的. 同样，如从一个固定位置来看，一个圆周的射影的不同截面是相当地不同的——它们可以是扁得多一些或扁得少一些的椭圆——然而所有这些截面在眼睛里产生的像将都与同在固定位置上的原来的圆周所产生的像一样.

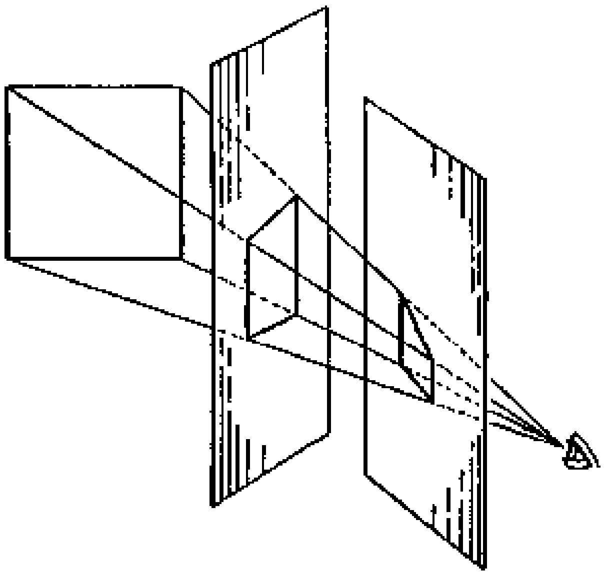


图 1

对于爱用脑子去管闲事的数学家们来说，这个现象提出了一个问题：难道在眼睛里呈现出相同的像的这些不同的截面没有某些共同的几何性质吗？进一步而论，一个物体从不同的位置去看所得的截面，由于它们都是从同一个物体导出的，难道没有某些共同性质吗？换句话说，数学家们振奋起来去寻求一个给定的景物的同一个射影的所有截面，和两个不同的射影的截面的共同性质. 这个问题实质上是射影几何学家们在他们的学科发展中的主要关心的事情.

显然，正如在图形的同一射影的不同截面或在不同的射影中，一个正方形或一个圆周的形状在改变，同样，一个线段的长度，一个角度的大小或者一块面积的大小也会改变. 更有甚者，在一个物理景物中平行的直线在它的绘画中可以不平行而是相交于一点的；例如，请看在达·芬奇的“最后的晚餐”中的天棚梁之轮廓线. 换句话说，一个物体的不同的射影的截面的共同性质的研究看来并不属于欧氏几何的范围.

然面，立即可以验明不同的截面共有某些相当简单的性质. 例如，一条直线在它的所有射影

的所有截面中都将保持为一条直线(即它不会变成曲线);一个三角形将保持为一个三角形;一个四边形将保持为一个四边形.这不仅直观看来是显然的,而且是容易用欧氏几何证明的.然而这几条不变性质很难使创立人满意,也不会给数学结构及其力量增光添彩.因此要求更为深刻的洞察力以获得不同的截面的重要的共性.

首先提供这种洞察力的是德扎格(Gérard Desargues).他是一位自学成才的在17世纪前半世纪工作的建筑师和工程师.德扎格的动机是帮助艺术家;他的艺术兴趣甚至扩展到写了一本书来讨论如何教孩子们唱歌唱得好.他寻求将许多关于透视的定理组合成一个紧密的形式,并且发明了一套术语.他认为要比通常的数学语言更好理解.

他的主要结果被称为德扎格定理并且是射影几何学中的基本定理,这定理提出了一个三角形的同一个射影的两个截面之间的一个重要共性.德扎格考虑的情况我们在这里表示如下:从点 O(图 2)作一个三角形的射影并取其两个不同的截面.这两个三角形(即截面)的关系可以这样来描述,即它们是从点 O 透视的.德扎格于是断言,这两个三角形的每对对应边将相交于一点,更重要的是这三个点将位于一条直线上.在我们的图上就是,AB 与 $A'B'$ 交于点 R;AC 与 $A'C'$ 交于 S;BC 与 $B'C'$ 交于 T;并且 R,S 和 T 位于一条直线上.图上所说的情形是两个三角形截面位于不同的平面上,德扎格的结论甚至当三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 在同一平面上例如这张纸平面上也成立,虽然定理之证明在后一情形不同.

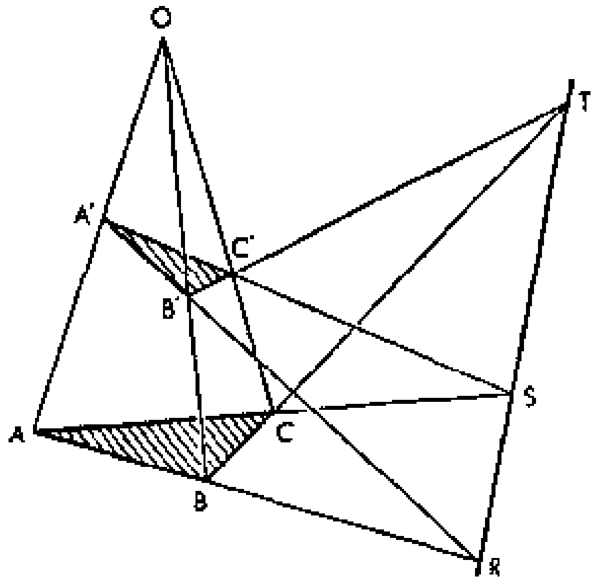


图 2

读者可能不放心德扎格定理中的结论说两个三角形的每对对应边必定相交于一点.他可能问:如果正好其中有两个边平行那怎么办?德扎格处理这种情形的办法是作一个数学上约定:即认为任意一组平行线都交于一个公共点,并建议读者把这个点想成在无限远处——这个办法多少有点像用不回答来回答这个问题.不过,你能否看见这个在无限远处的点并不要紧.承认平行的直线有一个公共的点是合逻辑的,这个点有别于欧氏几何中考虑的直线上的通常的有限远处的点.此外,在射影几何里我们约定在一个给定的平面里,不同组的平行线交于不同的无限远点.但这些无限远点位于一条直线上.它有时被称作无限远直线.因此,甚至当德扎格定理中所论及的三角形的三对对应边的每对都由平行线组成,从我们的约定也将推出三个交点位于一条直线,即无限远线上.

这些约定不仅逻辑上合理,而且也符合于这样的论证,即射影几何讨论视觉现象提出的问

题：我们实际看不到平行线，熟悉的例子明显如收敛的铁路轨线提示我们那样. 那么又何必看得见无限远线呢？* 的确，平行性在射影几何中不起作用.

早慧的法国数学家和哲学家帕斯卡（Blaise Pascal）是德扎格的同时代人，他在十六岁时提出了射影几何的另一重要定理. 帕斯卡断言，如果把一个圆的内接六边形的每对对边延长后都相交，所得三个交点也将位于一条直线上（图 3）.

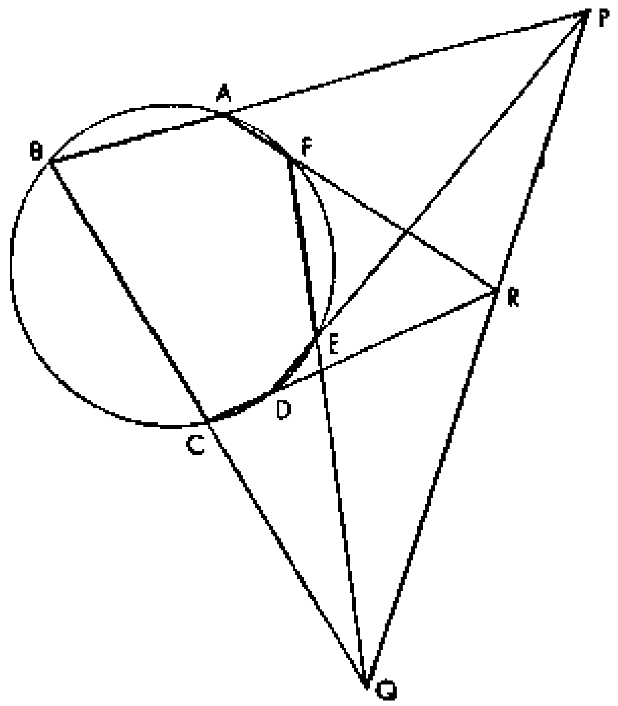


图 3

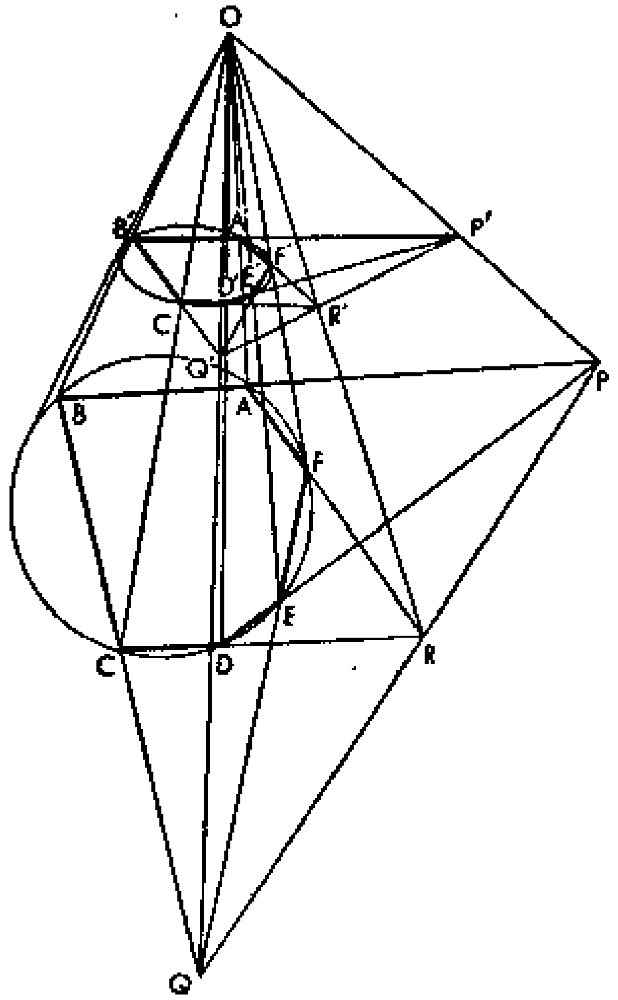


图 4

从上面所说的看来，帕斯卡的定理似乎与射影和截面没什么关系. 然而，让我们把帕斯卡定理所论的图形的射影具体化，同时将这个射影的一个截面具体化（图 4）. 那个圆周的射影将是一个锥，而这个锥的一个截面一般来说不是一个圆周而是一个椭圆，一个双曲线或一个抛物线——即一条通常所说的圆锥曲线. 原来的圆周里的六边形在任一圆锥曲线里将给出一个对应的六边形. 现在帕斯卡定理结论是，新的六边形的各对对边也将交于同一条直线上，这条直线对应于原来图形导出的直线. 因此，这条定理陈述了关于圆周的一条性质，这个性质在这个圆周的任意射影的任一截面上将仍然成立. 这的的确确是射影几何的一个定理.

---

* 译注：这句话是译者加的.

如果德扎格和帕斯卡的定理立即被他们同辈的数学家领会了，而且他们的方法和概念的潜力被急切地掌握了并进一步得到发展，我们一定会很高兴. 实际上，高兴与我们无缘. 可能德扎格的新术语困惑了他那时代的数学家，正好像今天许多人被数学语言所困惑和吓跑一样. 不论怎么说，所有德扎格的同事除笛卡儿外都表示出通常对激进观念的反应：他们说德扎格疯了，并且不理睬射影几何. 德扎格本人气馁了并转回到建筑和工程的实践. 德扎格的 1639 年的原版书印刷本全部轶失而一本不留. 帕斯卡论圆锥曲线的工作和他的有关射影几何的其他工作，发表于 1640 年，也被遗忘. 所幸是德扎格的一位学生依尔(Philippe de la Hire)把德扎格的书抄了一本手抄本. 到 19 世纪这个手抄本偶然地被几何学家沙勒(Michel Chasles)在一个书店里得到，于是世界才了解德扎格的重要工作的全貌. 同时大部分德扎格和帕斯卡的发现被 19 世纪的几何学家独立地重新发现.

射影几何一系列最初提出的课题是引人注目的，而其偶然发现同样引人注目，再加上一些重大事件射影几何复苏了. 蒙日(Gaspard Monge)，应用射影和截面的画法几何的发明者，在法国高等工科学校*他的身边聚集了一大批有才华的学生，他们中有卡诺(Sadi Carnot)和彭赛列(Jean Poncelet). 这两个人被蒙日的几何深深地打动. 纯粹几何已被笛卡儿的代数的或解析的几何遮蔽了大约二百年之久. 他们着手证明纯粹的几何方法能够比笛卡儿的完成得更多.

彭赛列复活了射影几何. 作为拿破仑的一名军官在入侵俄罗斯时被俘而于 1813—1814 年间关在俄国监狱里. 不借助任何书籍，彭赛列在监狱里重新建立了他从蒙日和卡诺那里学到的东西，并且进而建立了射影几何中的新结果. 能完全欣赏到这个课题的确是数学中的一个崭新的分支的数学家，他可能是头一个. 当他重新开辟这个课题后，整个一批法国的，稍后一点还有一些德国的数学家继续集中地进行了研究.

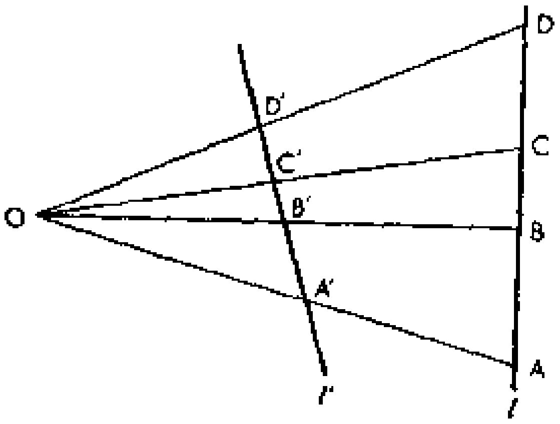


图 5

他们建立的基础之一，是一个其重要性未能及早被赏识的概念. 考虑一条被四个点分割的直线的射影的一个截面(图 5). 显然在截面中的直线之几个线段之长度不等于原来直线上那些线段的长度. 你可能会大胆猜测，可能两个线段之比，如 $A'C'/B'C'$，将等于对应之比 AC/BC. 这个猜测是不正确的. 然而惊人的事实是比之比，即 $(A'C'/C'B')/(A'D'/D'B')$，将等于 $(AC/CB)/(AD/DB)$. 于是，比之比，它被称作交比，是一个射影不变量. 这里应当

---

* 译注：École Poletechnique，这是与巴黎高等师范同为拿破仑创立的两所著名高等学校之一. 它是一所军事学校，人们时常简称为巴黎高工.

注意，所涉及的长度必须是有定向的长度；即如果从 A 到 D 的方向为正，则长度 AD 为正而长度 DB 必须取成负的.

任作一条直线与四条直线 OA，OB，OC 和 OD 相交，所成的线段具有与原来线段相同的交比这一事实建议我们对相交于点 O 的四条射影直线指定一个特别的交比，即在任一截面上的线段之交比. 此外，四条直线的交比是一个射影不变量，这就是说，如果构作了这四条直线 OA，OB，OC，OD 的一个射影，并由此射影做了另一个截面，此截面将包括另四条共点直线 $O'A'$，$O'B'$，$O'C'$，$O'D'$，其交比与原来四条的相同(图 6). 即是说，从点 O'' 到图形 $OABCD$ 的射影中形成的截面 $O'A'B'C'D'$ 里面，四条直线 $O'A'$，$O'B'$，$O'C'$ 和 $O'D'$ 有与 OA，OB，OC 和 OD 相同的交比.

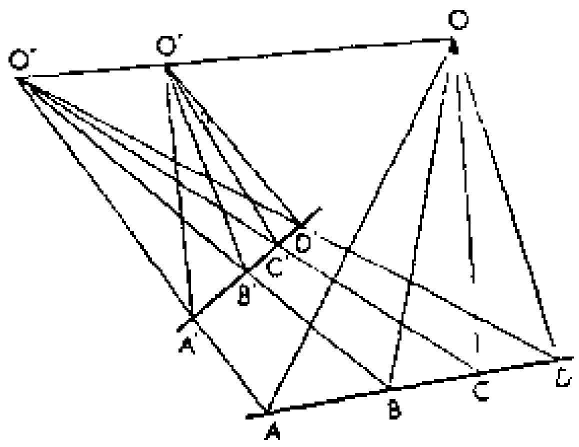


图 6

交比的射影不变性被 19 世纪的几何学家广泛应用. 前面在讲帕斯卡定理时，我们注意到，在射影和截面中一个圆周可以成为一个椭圆，一个双曲线或者一个抛物线，即一条圆锥曲线. 于是，几何学家寻找某些共性用以解释这样的事实，即一条圆锥曲线在射影和截面中永远给出一条圆锥曲线. 后来他们找到了用交比表述的答案. 在一个圆锥曲线上给了点 O，A，B，C，D 以及第六个点 P(图 7)，则射影几何的一个重要定理说，直线 PA，PB，PC 和 PD 有着与 OA，OB，OC 和 OD 相同的交比. 反之，若 P 是任一点使得 PA，PB，PC 和 PD 有着与 OA，OB，OC 和 OD 相同的交比，则 P 必位于通过 O，A，B，C 和 D 的圆锥曲线上. 这个定理及其逆的要点是一条圆锥曲线被交比性质所决定. 圆锥曲线的这一新的刻画很受欢迎，不仅因为它用到了射影性质，而且因为它开启了关于圆锥曲线研究的全新的路线.

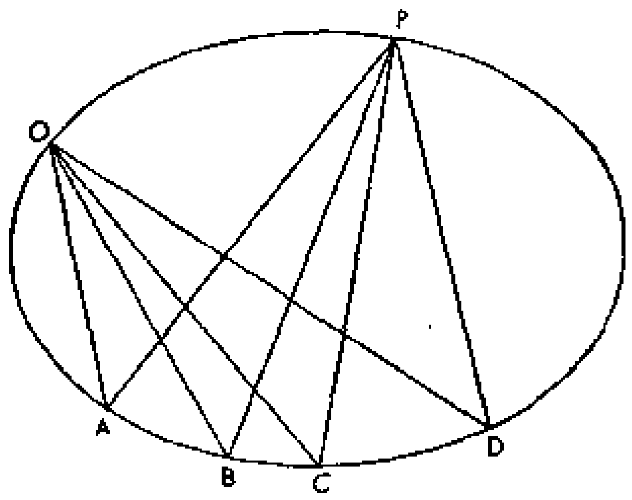


图 7

全部数学中最漂亮的原理之一的对偶原理的发现为射影几何的令人满意的成就锦上添花. 同在欧氏几何里一样，在射影几何里任何两点决定一直线，或者我们宁愿说成任何两点必位于同一直线上. 然而在射影几何里，说任何两条直线决定或位于同一点也是对的. (那些拒绝承认欧氏意义下的平行线也是有一个公共点这一约定的读者只好跳过接下来的几段，并将因他的固执而付出代价.)值得注意的是，第二个陈述只要把第一个命题中的点和线这两个词调换一下，就可以从第一个得到了，这时我们说在射影几何中，我们把原来的陈述对偶化了. 因此我们不仅可以说一组点

在一条直线上，也可以说一组直线在一个点上(图 8). 同样地，一个由四个点组成的图形，只要三个点位于同一直线上，其对偶就是一个由四条直线组成的图形，其中没有三条直线位于同一点上(图 9).

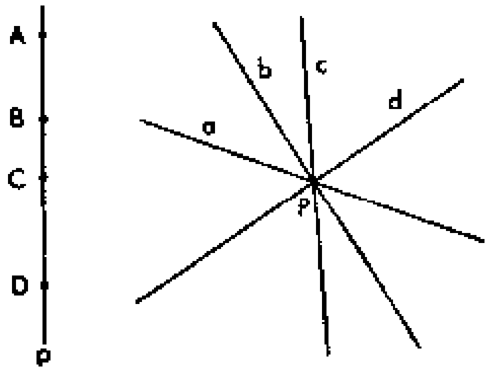


图 8

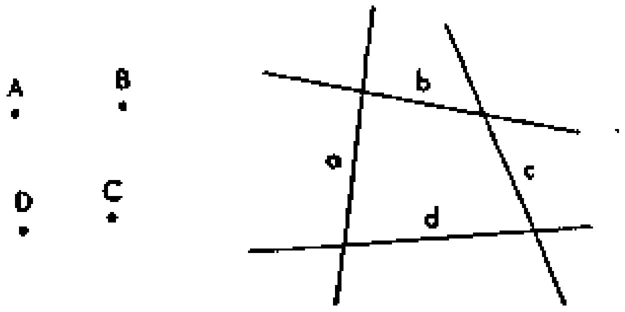


图 9

让我们来用这样的办法重述一些稍为复杂的图形. 一个三角形由三个不在同一直线上的点以及三条联结这些点的直线组成. 其对偶陈述将读成：三条不在同一点上的直线和三个联结这些直线的点(即这些直线的交点). 这样重述三角形定义而得到的图形还是一个三角形，所以三角形称为是自对偶的.

现在让我们用对偶术语来重述德扎格定理，运用一个三角形的对偶是一个三角形这一事实并假设此时两个三角形和点 O 均位于同一个平面. 该定理说：

“如果我们有两个三角形，使得联结对应顶点的直线经过同一点 O，则这两个三角形对应边成对地联结于位于同一直线上的三个点.”

它的对偶说：

“如果我们有两个三角形，使得联结对应边的点位于同一直线 O 上，则这两个三角形对应顶点成对地由位于同一点的三条直线联结.”

我们看到，对偶的陈述正是德扎格定理之逆，即它是交换了假设和结论的结果. 因此用调换点与线，我们发现了一个新定理的陈述. 要求这个新定理的证明应当从老的定理的证明应用调换点和线来得到似乎是太苛求了. 然而如果这算是过分的要求，则上帝的慷慨大方远远超越了我们凡人的劳绩，因为新的证明恰好可以用这个方法得到.

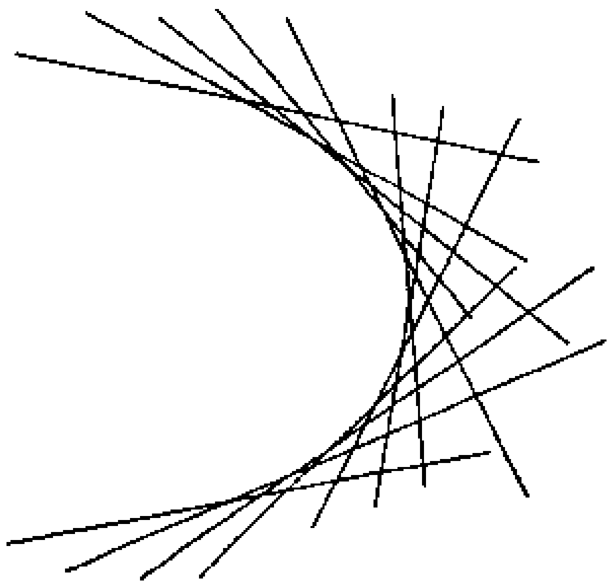


图 10

射影几何也讨论曲线. 如何对偶化一个关于曲线的陈述？线索在于这样一个事实，一条曲线归根结蒂是点的一个集合；我们可以对偶地把这个曲线想成一个直线的一个集合，当然，这个集合应满足一定的条件. 令人吃惊的是，对于一个圆锥曲线而言，满足这个条件的直线集合正好是那条曲线的切线集合(图

10). 如果这个圆锥曲线是一个圆周，其对偶图形就是同一圆周的切线集合(图 11). 这个切线集合提示我们，圆周既可看作是点的集合，也可看成是切线的集合. 我们将称这个切线集合为线圆.

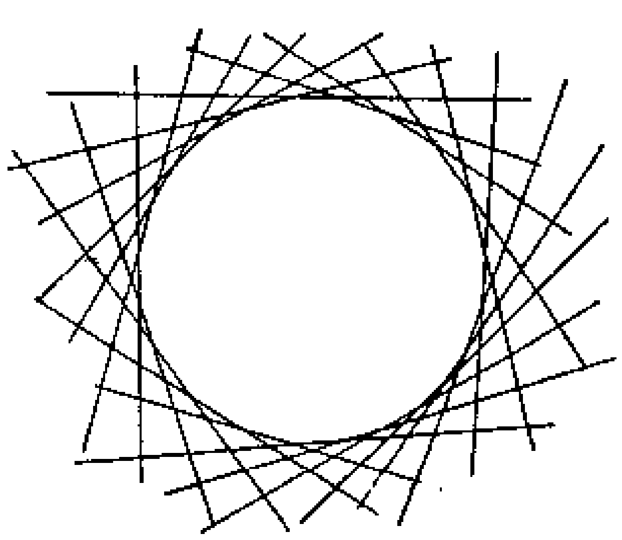


图 11

我们来将帕斯卡的关于圆内接六边形的定理对偶化. 他的原来的定理说：

"如果在圆周上取六个点 A,B,C,D,E 和 F，则联结 A 和 B 及 D 和 E 的直线联结于一点 P；联结 B 和 C 及 E 和 F 的直线联结于一点 Q；联结 C 和 D 及 F 和 A 的直线联结于一点 R. 这三个点 P,Q 和 R 位于一条直线 l 上."

它的对偶说：

"如果在线圆上取六条直线 a,b,c,d,e 和 f，则联结 a 和 b 及 d 和 e 的点被直线 p 联结；联结 b 和 c 及 e 和 f 的点被直线 q 联结；联结 c 和 d 及 f 和 a 的点被直线 r 联结. 这三条直线 p,q 和 r 位于同一点 L."

对偶陈述的几何意义为：因为线圆是点圆的切线集合，线圆上的这六条直线是切于点圆的六条切线，从而这六条切线形成一个外切于点圆的六边形. 因此对偶陈述告诉我们，如果我们作一个外切于点圆的六边形，则六边形对顶的联结线，即对偶陈述中的 p,q 和 r 相交于一点(图 12). 这个对偶陈述的确是射影几何的一个定理. 它被称为布良松定理，因为蒙日的学生布良松(Charles-Julien Brianchon)颇像我们所做那样应用对偶原理于帕斯卡定理而发现了它.

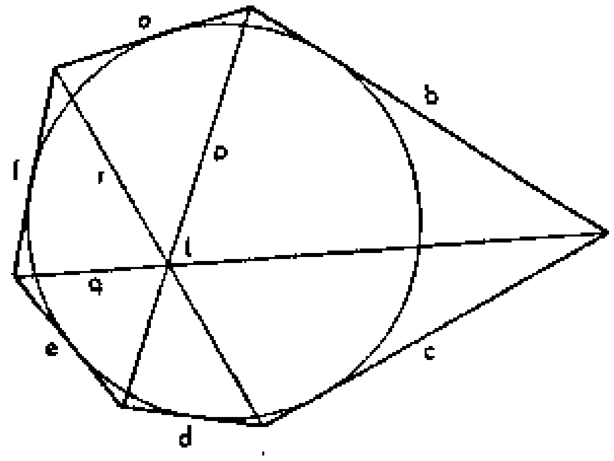


图 12

能够一下子就证明，射影几何的每一个定理根据对偶原理的重述都可得到一个新定理. 这个原理是射影几何的一个惊人特点. 它透露出那个几何结构中点和线所扮演的角色的对称性. 对偶原理也使我们可以洞察数学的创造过程. 然而这个原理的发现，如同德扎格和帕斯卡定理之类的发现一样，需要想像力和天才，而利用对偶原理来发现新定理则几乎是一个机械的过程.

人们可能怀疑射影几何是否比欧氏几何更为基本. 这两个几何的关系之线索可以由再次考虑射影和截面而获得. 考虑一个矩形的射影和在一个平行于该矩形的平面中的一个截面(图 13). 这个截面是一个相似于原来矩形的矩形. 现在如果点 O 向

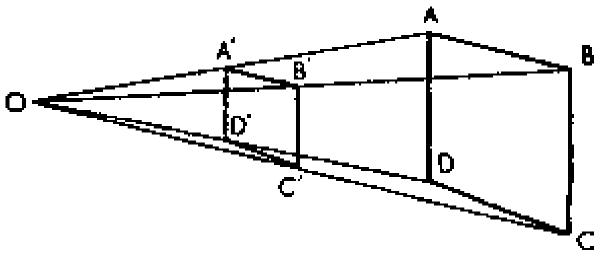


图 13

左方无限制地远离而去，则该射影的直线越来越接近相互平行的直线. 当这些直线变成平行同时射影中心变成"无限远点"时，矩形变成不仅相似而且全等(图14). 换句话说，从射影几何的观点看，在欧氏几何中被深刻地研究过的全等和相似的关系可以通过特殊射影的射影和截面来研究.

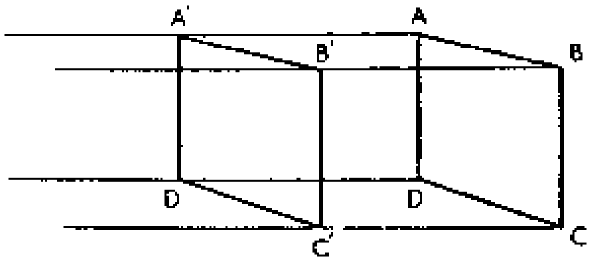


图 14

如果射影几何的确从逻辑上说较欧氏几何为基本，那么所有欧氏几何的概念都应该能用射影几何的术语来定义. 然而，在以上描述的射影几何中存在逻辑上的瑕疵：我们的交比的定义，从而那些基于交比的概念，依赖于长度概念，而长度在射影几何中不应当起作用，因为长度不是一个在任意的射影和截面之下的不变量. 19 世纪的几何学家克莱因(Felix Klein)把这个瑕疵消除了. 他证明了如何完全用射影的概念来定义长度以及角度. 从而可以确认射影几何的确是逻辑上较欧氏几何为基本，并且后者可以作为一个特款而构造出来. 克莱因和凯莱(Arthur Cayley)两人甚至还证明了基本的非欧几何都可以作为射影几何的特款导出来. 难怪凯莱高呼："射影几何就是全部几何!"

只剩下从射影几何的公理演绎出欧氏和非欧氏几何的公理了，并且这件事几何学家在 19 世纪末和 20 世纪初已成功地做到了. 欧几里得所做的是把他以前三百年间的工作组织起来，射影几何学家最近所做的无非是把德扎格和帕斯卡开创的研究组织起来.

射影几何的研究现在已不太活跃了. 现在几何学家还在寻找更为简单的公理和更为优美的证明. 有些研究是有关 n 维空间的射影几何. 一个庞大的新的类似领域是射影微分几何，它研究曲线和曲面的局部或无限小性质.

射影几何已经与好几个领域的当代数学研究有着重大关系. 射影和截面就是数学里所说的变换，要寻求在此种变换下的不变量. 数学家们问道：有没有其他的比射影和截面更一般的变换值得研究? 近代一个新的几何追随着这条思路已经发展起来，这就是拓扑学. 考虑拓扑变换将把我们带得太远. 我们在此只限于提到拓扑学考虑的变换比射影和截面更一般，并且现在已经很清楚拓扑学在逻辑上比射影几何更基本. 凯莱肯定射影几何是全部几何是过于匆忙了.

射影几何学家的工作在现代物理科学中有重要影响. 它们为相对论的研究者铺平了道路，后者探寻着宇宙在从一个观察者到另一个观察者的坐标变换下的不变的定律. 是射影几何学家和其他的数学家发明了张量演算，它被证明是表示不变的科学定律的最方便的方法.

当然，微分方程、代数和数学的某些其他分支对科学的进步做出的贡献比射影几何更多. 但

是没有一个数学分支在观点的独创性上，在协调发现中的直观和证明的严密上，在思想的纯洁性上，在逻辑的完美性上，在证明的优美性上和概念的综合性上可以与射影几何比拟. 诞生于艺术之科学证明了它本身也是一门艺术.

18.

空间的曲率

勒科尔白也(P. Le Corbeiller),1954 年 11 月号

在1854 年春天,一位年轻的德国数学家名叫黎曼(Bernhard Riemann)正在为他的前途和他即将面临的考试极为优虑不安.他已经 28 岁了,但尚未能自立——他靠着在小小的汉诺威城当基督教牧师的父亲每月赠送的几个退勒(当时德国货币)过着贫困的生活.他谦虚地写信给他父兄说起,在柏林和哥廷根的最著名的教授们都待他好到不可言状.他已经获得博士学位;现在,为获得一个(无薪)讲师聘约他必须在哥廷根哲学系全体教师面前给出一个使人满意的讲演.他已经提交了三个题目."头两个我已经准备得很好了",黎曼给他哥哥信中写道,"但是高斯挑选了第三个,因此现在我很惶恐不安."

高斯(Karl Friedrich Gauss)是德国数学家的头和他的大学的光荣.在黎曼的天堂的图画中,高斯的教授圈椅离开上帝的宝座已不太远了.(这仍是今日哥廷根的一般看法.)高斯为年轻的黎曼的讲演所选的题目是"论作为几何基础之假设".高斯除了少数有深刻隐晦的评论外关于这个题目尚未发表过东西,但是他之所以偏爱它甚过黎曼提出来的另外两个题目而选择了它,是因为像这样一个深刻而新颖的题目高斯自己已经想过很多而且已经得到一个伟大的虽然尚未被广泛赏识的贡献,他想知道这位年轻人会讲些什么.

黎曼公开讲演是在 1854 年 6 月 10 日,一个星期六.这就是他的著名的"就职演说".他的大多数听众是古典文学家,历史学家,哲学家——至少不是数学家.黎曼已经决定了他要谈论有关 n 维空间的曲率而不用书写任何方程.就他这方面说,这究竟是一个谦逊的姿态,还是一个温和的马基耶维利式的权谋*?

---

* 译注:马基耶维利(Niccolo Machiavelli,1469—1527,意大利政治家,主张无所顾忌地运用权术以达目的.

我们将永不得知. 但可以肯定的是即令没有方程式,高斯也非常好地了解了他,因为讲演结束后高斯在步行回家的路上怀着不寻常的热情告诉他的同事韦伯(Wilhelm Weber)* 他对黎曼提出的观念的竭力赞扬.

高斯的热情是合理的. 这位年轻人已经到达的思想的王国是如此之新,没有任何科学家能跟得上. 但是他的抽象观念在半个世纪之后通过爱因斯坦(Albert Einstein)的工作同经验的现实建立了接触. 爱因斯坦看到黎曼的构想可以直接应用于光与引力之间的相互作用问题,从而使它们成为他的广义相对论的基础,它直至今日仍然统治着我们的宇宙观. **

让我们回到一百年前,并且了解一下 1854 年六月的那一天黎曼宣布的思想. 在到达黎曼的观念之前我们首先应当掌握一些更加基本的背景知识.

每个人都熟悉平面几何的原理. 一条直线是两点间的最短路线;平行线不会相交;一个三角形三内角之和等于两个直角或 180 度,以及其他等等. 也熟悉画在一个球面上的图形的几何,它服从稍微不同的法则. 在球面上的两点间的最短路线称为"大圆";这是用过这两点和球心的平面将球分为相等的两半时所截得的曲线. 两个大圆总是相交于两点;例如,地球的两条经线总是相交于南北两极. 当三条大圆弧段(例如,地球赤道的四分之一及两条经线的北半部分)相交而形成一个"球面三角形"时,三个 90 度的角相加得 270 度或三个直角. 这个三角形与平面上的三角形之间的差异是从下述事实导出的:前者的边是画在弯曲的曲面上而后者是平坦的.

现在我们怎能知道桌子的表面是平坦的而地球的表面是球面的? 所有早期的文明都把地球想像成如同一个平坦的盘子,山脉堆在上而正如国王餐桌上的食物. 当时人们不可能去到月球上看看地球,所以人类不能看到地球的真正形状. 那么希腊天文学家怎么能做出结论说地球是圆的? 通过观测北极星在希腊要比在埃及高. 因此,显然我们有两个办法可以识别一个球面是圆的,或者从很远的地方来看它,例如从月球上看地球;或者如果我们站在地球上,就观测那些离地球很远的物体,这样也能识别出地球是球形的.

人也能够,并且已经用了两种完全不同的途径发现地球是圆的. 一个途径是人类的环球航海. 人们发现地球的表面没有"棱",没有边缘,然而它的面积是有限的. 这是一个非常重要的事实:地球的表面是无边缘的,但它是有限的. 显然,这个情况排除了地球是一个平面的可能性. 一个平面的表面是无边缘的,但也是无限的. (在普通的言语中,我们却把无边和无限这两个词看

* 译注:著名的物理学家,高斯研究电磁理论的合作者.

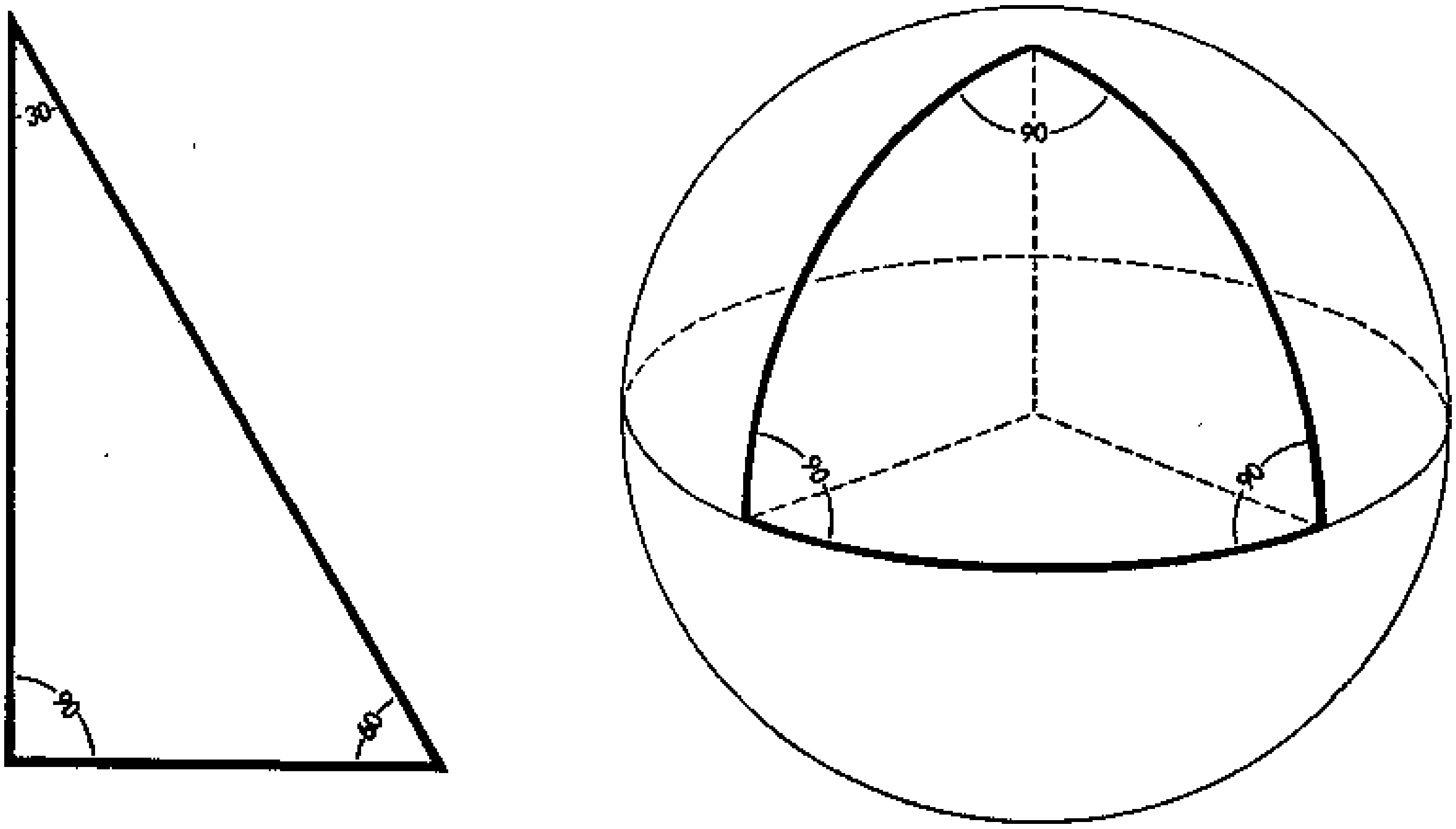
** 译注:这个评论在 2004 年仍然适用.

成是严格的同义的——这是一个实例，表明世界是球状的这件事尚未能被我们的心智所接受.）

像这样，即使假设地球始终被一个厚云形成的天幕所遮盖而无法观测星象，人类也该发现地球是圆的. 例如，假设有什么原因妨碍他探测我们这个行星. 他仍然有另外一个办法可能发现他是生活在一个球面上，这就是用我们曾经谈过的球面几何. 如果我们来看地球表面上的一个小三角形，比如说每边大约 30 英尺长. 它与一个平坦的三角形无法区别开来；它的三角之和会超过 180 度，但是其差小到无法测量. 当我们考虑地球表面上越来越大的三角形时，地球表面的弯曲将变得越来越重要，并且将显示出三个角之和超过 180 度. 因此，通过发展越来越精确的大地测量和绘制地图的方法，人类终究能够证明地球的球面性，并且从他们的测量他们能够求出地球的半径. 我们马上就转向这个问题.

除平面和球面以外还有许多类型的曲面. 考虑一个蛋. 它的一头大一头小. 从蛋壳大的那头切下圆的一块，看上去像是从一个球面上切下来的；从小的那头也切下圆的一块，看上去像是属于一个半径比前一个小的球面. 小头的那一片看得出比大头的那一片要弯得多. 几何学家定义一个球面的曲率是它的半径的平方之倒数. 所以半径越小，曲率越大，并且反之亦然.

如果我们从蛋的中部取下一片蛋壳，我们能否定义它的曲率？ 这里有一个小小的困难，因



在一个平面上和在一个球面上画出来的三角形服从不同的法则. 在一个平面上一个三角形内角之和总是等于 180 度. 在右边那个球的表面上的三条大圆相交形成的三个角加起来等于 270 度.

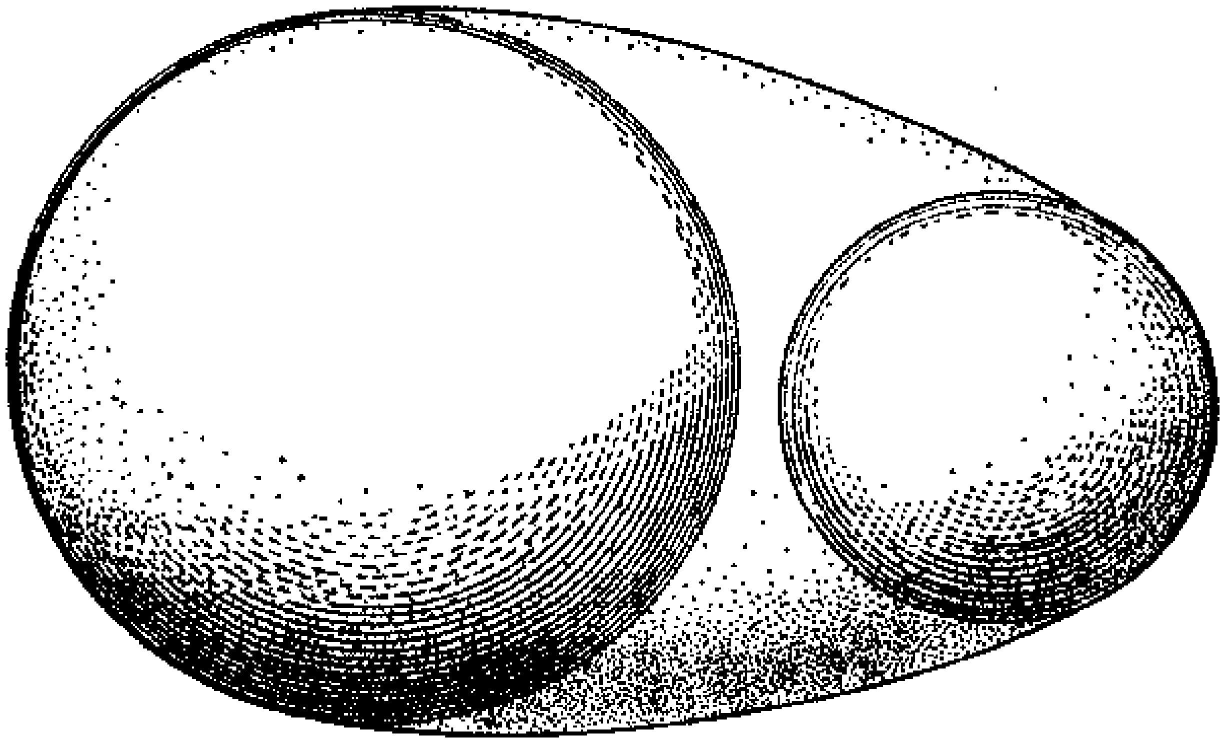
为这样的一片并不等同于一个简单的球面的一部分. 问题解决如下. 假设我们将这具有或多或少拉长的椭圆形状的一片蛋壳放在桌面上. 它形成一个相当平的穹顶. 这个穹顶的每一铅直断面都是一条凹向下方的曲线. 每一铅直断面看上去近似一个圆周的一部分,但不是所有的都有同一个半径. 通过最窄狭部分的断面具有最小的半径;通过最伸长部分的断面具有最大的半径. 让我们称第一个半径为 R_1,第二个为 R_2. 几何学家于是取一种平均值,并定义蛋壳的一小片的曲率为乘积 R_1R_2 的倒数. 你可以看到,如果蛋壳是一个真正的球面,我们便回到原来的定义.

在这些定义的基础上我们发现,当我们在蛋壳表面上旅行时,一小片蛋壳的曲率是变化的. 谈论整个蛋壳上的曲率是无意义的;我们只能谈论一小片的曲率.

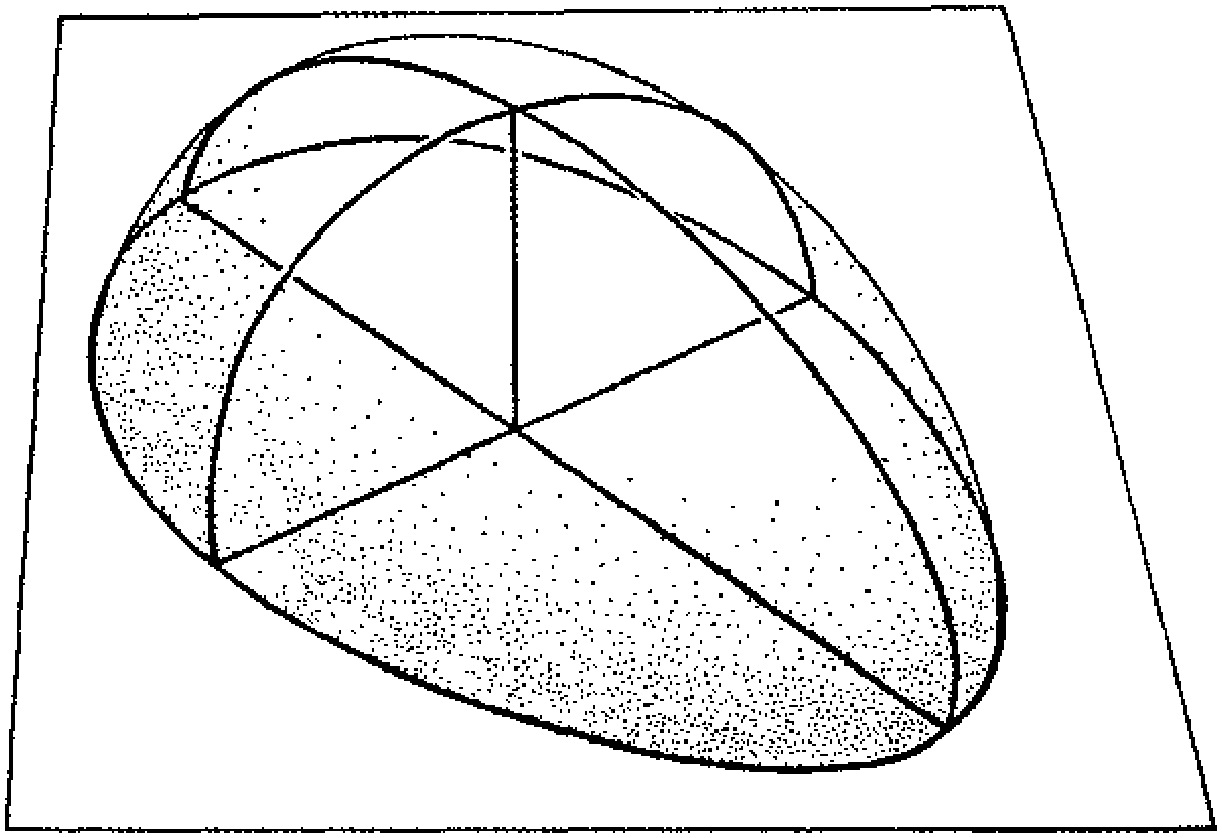
其次考虑一个马鞍面. 横割马鞍面的铅直断面形成一条凹向下方的曲线,而纵割马鞍面的铅直断面形成一条凹向上方的曲线. 这使得一个马鞍面的哪怕是一小片都与一个蛋壳的一小片根本不同. 几何学家说,蛋壳处处有正的曲率,而马鞍面处处有负的曲率. 一个鞍形曲面的一小片的曲率也可以定义为乘积 R_1R_2 的倒数,但这一次还必须加一个负号.

还有另外的情形. 考虑一个油炸圈饼. 如果你比较表面的内半部(朝向油饼洞的中心)与外半部,你将识别出外半的一小片具有正曲率,而内半的一小片如同马鞍面的情形一样具有负曲率. 因此我们不应当认为在整个给定的曲面上曲率必须全是正或全是负;当我们在曲面上从一点旅行到另一点时曲率不仅能变大或变小,它还能改变符号.

请记住在黎曼时代之前我们对曲面的曲率的认识是采用了鸟瞰观点. 上面我们所看到的一



一个蛋有弯曲的表面,它看上去好像其大的一端的表面属于一个球面而小的一端的表面属于另一个球面. 其中部有不同的曲率.



半个蛋放在桌面上并且用铅直断面切割，得到的断面为凹向下方的曲线. 这些曲线看上去像具有不同的半径的圆周的部分.

切，18 世纪的富有想像力和高产的瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler)都已经看到了，并被当时由拿破仑新建立的巴黎工科学校(École Polytechnique)的一批法国几何学家所发展. 然后于 1827 年黎曼的主要考官高斯为这个主题添加了许多推广化和精确性. 他发表了一篇论弯曲曲面的论文，它是如此的晶莹无瑕甚至今天你可以拿它作为大学课程之用*.

高斯从地理学家用经线和纬线来在地球上确定一个城市的位置这一事实出发. 他们画出经线(比如，联结所有在通过格林尼治的南北大圆西边 85 度的地球上的点的那条经线)还有平行的纬线. 我们可以说经线“族”和纬线“族”. 为了指定在任意一个数学上给定的曲面上一点的位置，高斯想像我们在曲面上画两族曲线，称为 p 曲线和 q 曲线. 我们采取适当的预防措施使得曲面上每一点只要指定它的 p 坐标和 q 坐标便将被精确地确定.

这就是高斯的伟大的洞察力. 在一个绝对平坦的曲面上，如果我们向一个方向旅行了三英里，然后向左转向垂直方向旅行四英里，我们知道由毕达哥拉斯定理，我们离家五英里. 但是高斯推导说，在一个弯曲的曲面上，无论蛋壳，或者马鞍面，或者你有的任何曲面，这个距离会不

* 译注：这篇文章题为“关于曲面的一般研究”(1828). 它与黎曼的就职演说“论作为几何基础的假设”(1854)，同属现代数学最重要的奠基性的经典之作之列.

同.首先,p 曲线与 q 曲线将不是处处相交成直角,这便要在毕达哥拉斯等式 $a^2+b^2=c^2$ 的两个平方和中增加了第三项.此外,如果我们具体化两族曲线想像为一种渔网紧蒙在整个曲面上,当我们从曲面的一个区域旅行到另一个曲率不同的区域时,网眼的边和角会逐渐地变化.

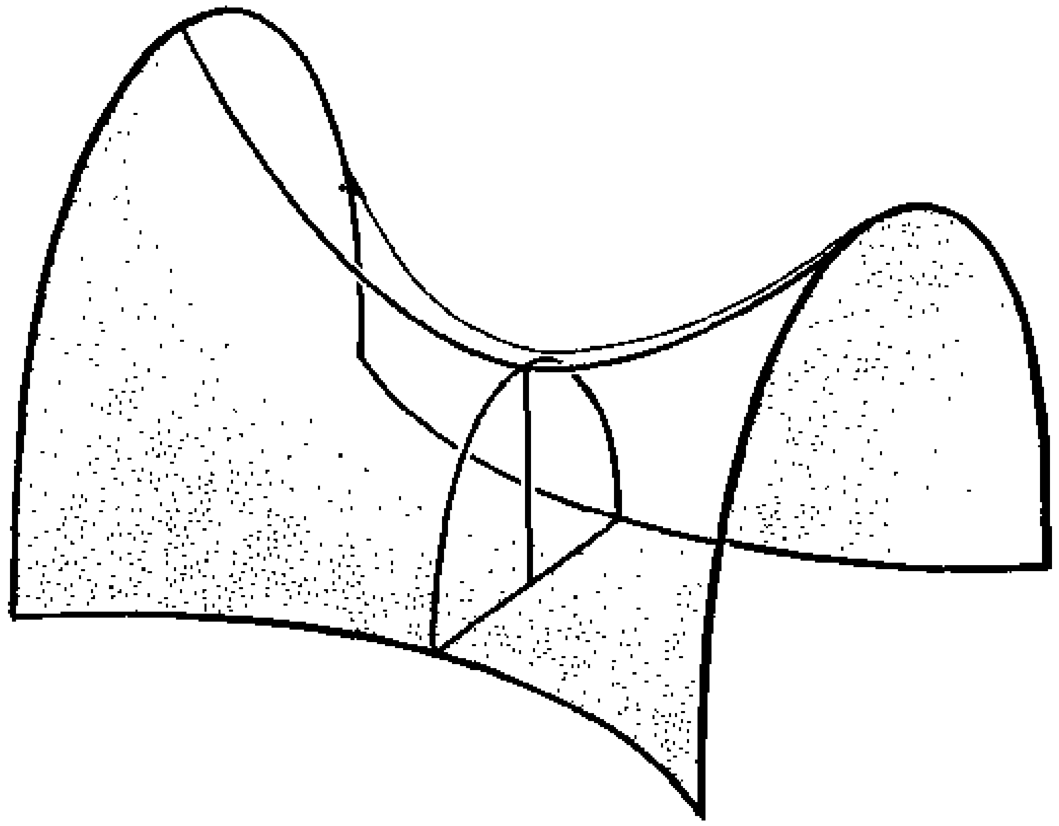
高斯用一个著名的数学等式表示他的推理.在一个弯曲的曲面上一个给定点 M 各有一条 p 曲线和一条 q 曲线通过.点 M 的"拟经度"p 和"拟纬度"q 有指定的值.我们在曲面上从点 M 移到邻近一点 P.我们先将 p 之值增加一个小量,而让 q 之值保持不变.高斯用 dp 作为 p 的一个任意小的增量的符号.于是我们得到一点 N,经度为 $p+dp$ 且纬度为 q.我们然后将 q 之值增加一个小量 dq,让 $p+dp$ 保持不变.我们从而到达一点 P,经度为 $p+dp$ 且纬度为 $q+dq$.我们希望知道从点 M 到点 P 的距离.因为这个距离是任意小的,高斯用符号 ds 表示.在高斯的记号中,距离 ds 的平方将表示为三项之和:

$$ds^2=Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2.$$

这个等式是整个数学和物理的制高点之一——一座我们应当怀着敬畏之心向它膜拜的山顶,好像浮士德突然看到了大宇宙的符号而高呼:"谁写下了这些符号,他是上帝吗?"从高斯的等式出发将我们带入广义相对论的国度只需要再走两步,第一步由黎曼完成,另一步由爱因斯坦完成.

在我们的任何曲面上的任一点 M,这个等式与欧几里得几何中关于任意三角形三个边的平方的一个定理没有区别,这三个边两个为 dp,dq,第三边为 ds.这是因为在一点的很近的邻域内这个曲面非常接近于一个平面.但是这里有新的内容:高斯引入了函数 E,F 和 G,它们的数值当我们从曲面上一点移到另一点时连续地变化.高斯看出,E,F,G 是两个任意量即点 M 的拟经度和拟纬度 p 和 q 的函数.在一个平面上我们可以画 p 线和 q 线将平面分成相等的小正方形如象棋盘一样;我们于是有 $ds^2=dp^2+dq^2$,因而在整个平面上 E 恒等于 1,F 恒等于 0 而 G 恒等于 1.但是在一个弯曲的曲面上,E,F 和 G 是变动的,而可用一个抽象而精确方法来将其变化用曲面的曲率表示,正是那些变化造成每一点与另外的点有区别.

高斯现在证明了这个卓越的定理:只要你知道了 E,F 和 G 在该点之值以及在很近的邻域里它们是如何变化的,就立刻可求得任意点曲面的曲率.为什么这个定理是卓越的?因为如果我们虚构一个被云层覆盖的地球,这回不是球面的地而是任一形状的地,所以称为地球已经有点勉强.假设人类就生活于其上,则地球上任何民族的测绘师,只要知道这个定理,就能够不用看星斗也不用去月球而得到有关 E,F 和 G 的全部信息.因此从曲面自身的测量中他们能够计算出他们的地球在每一点的曲率,并求出他们国家的曲面是弯曲得像一个蛋壳,还是像一个马鞍还是像一个油炸圈饼的一部分.



一个马鞍面沿长的方向的铅直断面形成凹向上方的曲线，同时沿跨的方向的铅直断面形成凹向下方的曲线具有较短的曲率半径.一个马鞍面被认为具有负的曲率.

在科学家喜欢去解决的所有可笑的和无用的难解之谜中，这一个你可能认为的确应该得彩了.为什么数学家要认为描写一个虚构的世界里的想像的人们的行为是重要的？因为最好的理由是：这些人就是我们自己.只要做一点小小的说明就会使你明白我曾经讲到的人就是你和我.

让我们设想在一个大的光滑球面上的几片不同的不规则形状的纸块.这些小纸块是活的会动的：它们就是那个世界的人民，只不过他们的身体不是由曲面包围的体而是由曲线包围的曲面.这些人民有绝对平的身体而无厚度，不能形成高于或低于他们的空间概念.他们自己只是曲面的一部分，是二维的生物.他们的感觉能给他们以关于他们的二维世界的环境的信息.但是关于这个世界之外是否天外有天，他们没有任何经验；所以他们想不到第三维.

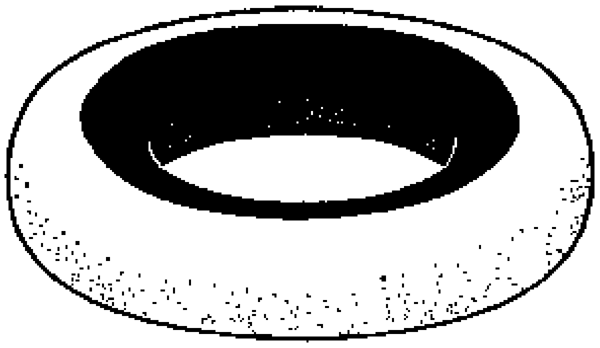
然而他们是有智慧的；他们已经发现了数学和物理.他们的几何学由两部分组成——线的几何和面的几何.在物理学中如果他们要阐述一个变量的问题就用一条线上的图；二个变量的问题就用曲面图.三元的，四元的或更多元的问题，他们就用代数来解决："这太糟了"，他们说，"有关这些，图对我们没有帮助".

在19世纪(他们的19世纪)上半一个想法在他们中的几位的脑子里浮现.他们说，"我们想像不出第三个维数，但我们可以掌握三个变量 x,y,z 的物理问题.为什么我们不能谈论有关一个三维的空间？纵然我们不能看见它，能谈论在那个空间里的点，线和面积可能是有好处的.这

可能会带来什么好处？至少试一试没坏处."然后他们就这样试起来了.

我们无需将这篇寓言再往下发展了；它的寓意已足够清楚了.我们正像这些人民，只不过我们的身体有三维并且在一个三维世界里移动.无论你和我都不能看见一个第四维；然而我们能够掌握空间中运动的粒子，而这是一个四个变量的问题：x,y,z 作为空间，t 作为时间.我们也能掌握电磁场的问题.好了，在每一点(x,y,z)的电场向量 E 有三个射影 E_x,E_y,E_z，并且它随空间和时间变化；这成了七个变量.加上另外三个作为它的孪生兄弟的磁场 B，我们有 10 个变量.这看上去好像数学物理学家能很好地运用四维或 10 维或任意维.

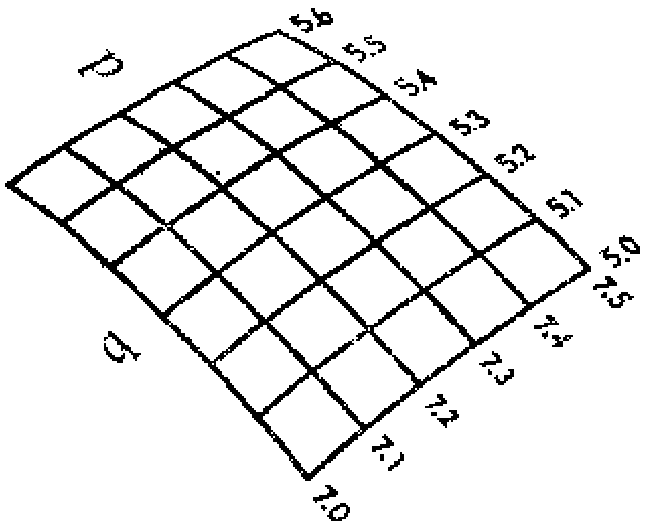
黎曼的演讲中一开始就假设从任意多维数的空间开始.现在一位不那么伟大的几何学家也会发现在这空间中的邻近的两点定义距离是直截了当的.难道我们不知道根据毕达哥拉斯定理在一个平面上那个距离之平方 ds^2 是等于两个平方之和 $ds^2=dx^2+dy^2$ 吗？好，于是显然在个 n 维空间中 ds^2 应当是 n 个平方之和，我们可以找到一个每项都类似于 dx^2 的和.一个非常方便的缩写用来表示"类似的各项之和"是希腊大写字母Σ.因此一个头脑简单的几何学家也会写下 $ds^2=\sum dx^2$.但是黎曼看得更远.他对他的老师高斯 1827 年的论文想过很多.他推断说，如果我们假设 $ds^2=\sum dx^2$，我们一开始便失败了.因为毕达哥拉斯定理只在一个像棋盘一样划分为相等的小正方形的平面上才成立.实际上，我们需要推广的是高斯的等式，它对包括平面在内的任何弯曲的曲面都成立.高斯已经给毕达哥拉斯公式加了两个东西：(1)给 dp 和 dq 的平方他加进去了这两个量的乘积 $dpdq$；(2)他给这三项的每一项乘上各自的一个系数，并假设这些系数 E,F,G 在整个曲面上从一点到另一点是变化的.



炸面圈的表面在其外半侧呈现正曲率，同时内半侧(黑色部分)为负曲率.

现在我们来对一个三维的"超曲面"做同样的事，只要能做.我们在整个超曲面上展开三个曲面族 p,q,r，或者更方便地记为 x_1,x_2,x_3.两点间距离之平方 ds^2 应当不仅由 dx_1,dx_2,dx_3 的平方组成，而且也有它们的两两之乘积：dx_2dx_3，dx_3dx_1 和 dx_1dx_2.这形成了六项之和并且我们必须给它们六个系数.我们用字母 g 带上适当的下标来表示这些系数.我们于是应当写下：$ds^2=g_{11}dx_1^2+g_{22}dx_2^2+g_{33}dx_3^2+2g_{23}dx_2dx_3+2g_{31}dx_3dx_1+2g_{12}dx_1dx_2$.(因子 2 不是不可少的，不过是使代数学家得到美学上满足而已，并且当一位年轻的柏林教授狄利克雷用语不当，在他所写的一篇论文里没有因子 2，高斯为此大发脾气.)于是这就是三维超曲面上 ds^2 的正确形式，而六个系数一般来说在整个超曲面上从一点到另一点是变化的.

我们曾经说过，黎曼一开始就假设他讨论的是 n 个变量，而不是一个特定的数如三或四个变量. 他需要为他考虑的那一类几何对象起一个名字. 他注意到两件事. 首先，一个粒子（理论上）自由地从一条直线或曲线上一点连续地和光滑地移动到另一点；它同样可以连续地从曲面上或空间中一点移动到另一点. 其次，在学习平面几何时，我们不想别的，只想着画在平面上的一个图形；正如逻辑学家所说，该平面在当时就是我们的整个“论及的宇宙”. 甚至到了第二年，当我们学习立体几何时，我们想的也是空间中带有任意定向的平面. 每一个这种平面都可能是去年论及的宇宙的平面几何中的那个平面. 无论这个平面是自在的或者是像我们现在所说的“嵌入”在三维空间中的，这对于平面几何不产生区别.



在任一数学地定义的曲面上一个点的位置可由从 p 曲线族中和相交的 q 曲线族中各给一个坐标而指定. 在非球面的曲面上这些曲线并不垂直相交.

将这些说法合到一起，黎曼为在其中一个点可以在其中连续地漫游的任意维数的几何对象创造了一个名称“连续统”. 例如，一条直线是一个一维的连续统，并且无论这个一维连续统是自在的还是嵌入在一个平面中，三维空间中或者一个任意维数的空间中，都不会对该直线的点和线段的几何学造成区别. 一个球面或者一个马鞍面如我们所知是一个二维连续统；同样，无论我们认为它是自在的或者嵌入于任意维的空间中都不会造成区别.

现在我们的空间是一个三维连续统. 而我们注定在我们的空间中的几何是同一个，无论我们认为这个空间是自在的，或者嵌入在一个四维，五维或任何维数的空间里. 我们不能具体看见这意味着什么. 这都没有关系，我们可以沿着这条道路走下去，并且看看逻辑将把我们带向何处.

上面那些想必是 1850 年左右年轻的黎曼的思想. 我们现在必须尝试稍微说一说，他从那儿前进了多远，即他 1854 年的讲演包含着什么内容.

读头一遍时，会感觉到黎曼的努力所获得的卓越结果是他成功地定义了超过二维的连续统的曲率. 一个二维的连续统是一个曲面，我们已经看到它的曲率对于围绕曲面任一点的一个小区域定义为一个单独的数，对于一个蛋壳形的曲面为正，对于一个马鞍形曲面为负. 如果这个曲率在每一点是零，这个曲面为一平面，并且反之亦然. 黎曼证明了曲率概念能被推广到 n 维连续统的情形. 只是不再是单个数；为定义三维连续统的曲率需要三个数一组，为定义四维连续统的

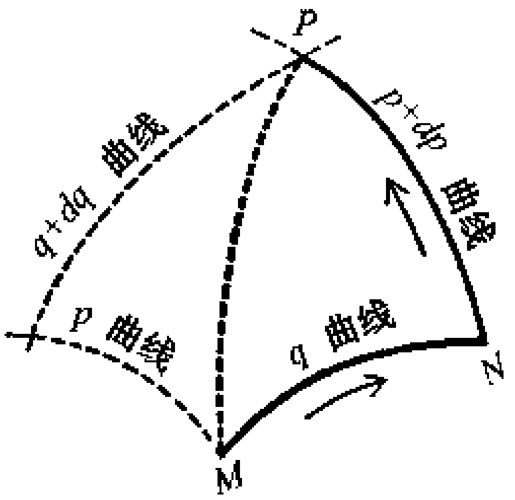
曲率需要六个数一组，等等. 黎曼只是叙述了这些结果并且把它们处理得看上去数学上是合理的；它们的证明及细节将需要一篇长的论文或花费好几周的讲演.

这些考虑似乎是纯粹抽象的——一个没有约束的数学的空洞的游戏. 然而，黎曼讲演的主要目标是使我们明白，他谈论的不仅是关于抽象的数学概念，而是关于一个物理问题，它可由实验方法来肯定.

让我们回到那些生活在一个大的曲面上的完全平坦的生物. 高斯的"极妙定理"证明了这个二维宇宙的二维生物如果懂得足够的数学，就能够求出他们的宇宙的任意小区域的曲率. 这些人怎么能够想像一个曲面是弯曲的，如果他们看不到一个三维空间？答案是这正是数学之力量所在. 这些人民会熟悉弯曲的道路的概念，对照而言一条"直"路是两点间最短的道路. 于是如果他们之中也有某个黎曼用纯代数的办法推广了这个概念成为二维连续统的曲率理论*，他们的测量员将能从黎曼给的一个公式计算出一个确定的数，他们会发现这个数从一个国家到另一个国家是变化的. 从而他们将能测量出他们的二维宇宙的曲率而无需能够用任何方式亲眼目睹那会是一个什么东西.

当然，这正是我们关于我们自己的宇宙的曲率的情况，我们必须回到黎曼的，看一看他是如何进一步定义某些观念的.

黎曼建议，如果定义一个 n 维空间的曲率的所有数都是零，这个空间应当称作平坦的，因为我们正是称一个曲率为零的曲面是平坦的. 现在如果我们将一个三维空间剖分为相等的小正方体，如同一个棋盘被剖分为相等的小正方形一样，于是 ds^2 就是和 $dx^2+dy^2+dz^2$，其中 dx，dy，dz 表示每个小正方体的边之长. 那个空间是平坦的，正如一个平面是平坦的曲面一样. 换句话说，我们的直观告诉我们的是，那个空间是平坦的——在黎曼为这个词所给的意义之下.



在具有任意曲率的一个曲面上从一点 P 到另一点 M 的距离不能由毕达哥拉斯法则决定. 高斯定义它为确定点的位置的相交曲线族之坐标的函数，并且曲率在曲面上从一点到另一点是变化的.

我们的空间真的是这样的吗？在我们附近的空间的一小部分应该表现出是平坦的这只是我们的期望而已. 可能那空间不仅在我们附近而且在远到最远的星云的领域都确实是平坦的. 在另一方面，同样可

---

* 译注：原文是 n 维连续统的曲率理论，并不是错了. 但改为"二维"似与下文更加协调.

能的是那空间始终是有点弯曲. 我们怎么能知道呢? 黎曼的答案是:根据经验. 这就是他非常平静地但又非常肯定地带给科学世界的革命性的信息.

欧几里得和康德曾经无意识地接受空间是平坦的直觉概念. 黎曼宣称,这个命题不应当是不证自明的;它只是一个假设,听候由经验去检验. 首先,我们可以做三个有关我们空间的假设:它有正常曲率,或负常曲率或根本没有曲率(准确些说是零曲率*,即它是平坦的,或如我们现在所说欧氏的). 这些假设中何者是正确的,留待天文学家和物理学家去解答. 这就是黎曼的那个曾经非常恰当地唤起高斯的好奇心的令人费解的标题"论作为几何基础之假设"的意义.

在黎曼的讲演中还有许多其他重要的事情,例如一个关于我们可能最终采纳的非常清晰的判断,即空间的量子理论是可能的——这正是目前我们的物理学家正在相当小心谨慎地尝试着的事情. 但是我们在这里已经提出的要点——为求出空间之可能的曲率而求助于实验——我们相信这是最重要的.

黎曼明智地不去建议应该做什么样的特别实验. 从我们现在的后爱因斯坦的知识的制高点来回顾,我们认识到人们很难发现这种实验. 你可能曾经期望,人们可以呆在经典天文学里,测量了星球之间角度这个小天地里睡懒觉,然而那行不通. 爱因斯坦指出引力很值得研究,而必须放弃黎曼有关常曲率空间的临时性假设,而代之以随着地点而变化(例如,太阳或天狼星的邻近的曲率要比空间的星际之间的空间的要大些). 他还指出时间必须参加进去;换句话说,应当用实验来研究一个四维的时空. 从而在 1920 年得到了有关爱因斯坦理论的三个实验检验:空间,时间和引力被证明是不可分地混在一起的.

黎曼认为宇宙的几何是物理的一章并同其余部分一样要由理论和实验的密切合作来加以发展,这一论点已经完全得到证实. 黎曼对他老师高斯的信仰也同样得到证实. 我们愈凝视黎曼的和爱因斯坦的真正宏伟的思想之金字塔,我们就愈赞美由高斯于 1827 年写下的朴素而简短的公式中无形地包含着多么丰富的内容.

---

* 译注:这几个字是译者加的.

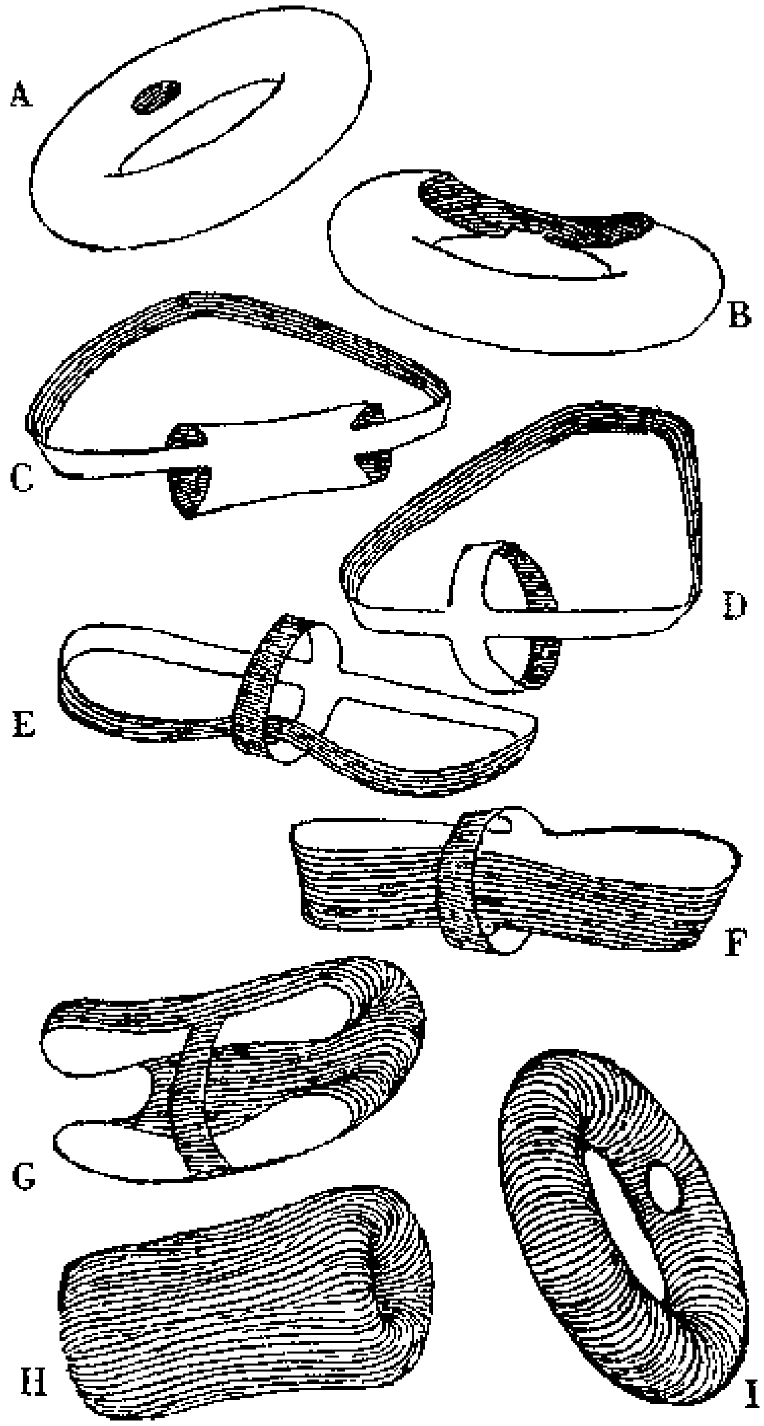
19. 拓扑学

塔克(Albert W. Tucker)和贝利(Herbert S. Bailey, Jr.),1950 年 1 月号

他杀了高贵的穆觉基维斯.
用皮制作了一双手套,
把毛的那面放在里,
把皮的那面放在外.
他为使暖的那面放在里,
而把里面皮的那面放在外;
他为使冷的那面放在外;
而把暖的那面毛的那面放在里.
这就是为什么他把毛的那面放在里,
为什么他把皮的那面放在外,
总之是翻来翻去里里外外.

——摘自威尔斯(Carolyn Wells)编《幽默诗集》

瞧啊!这位贫穷的印度人遇到了一个拓扑学问题,并且由里翻到外,由外翻到里解决了这个问题,他理应受到生理学和拓扑学两种观点的赞扬.虽然这个问题与数学之间的联系可能并不明显,但实际上是一个拓扑推理的练习,使你能预测把一双手套的里面翻到外面会把那支右手套变为左手套,同时把左手套变为右手套.内部性和外部性是现代数学最活跃分支之一的拓扑学的基本概念.



一个内胎可以被翻成里朝外，如果假设它是由弹性非常好的橡胶制成的，使其能够尽量伸缩. 在上左图中是一个内胎（A）带有一个安气阀的洞. 为了看得清楚起见把洞稍微放大了一点. 首先这个洞被极大地扩大到以致橡皮内胎变成两个条带（B，C 及 D）. 然后将两个相连的环带各作一半扭转，再把前面的过程逆回去（E，F，G，H 及 I）. 注意橡皮上的纹理，假设它有纹理，原来沿纵长方向的纹理现在变成沿横向的了.

拓扑学是讨论当大小和形状都变化时不受影响的位置性质的一门数学分支. 它的对象是曲面，扭结，网络及许多其他图形. 也许最容易来定义拓扑性质的办法是说它们是在伸缩或弯曲之下保持不变的几何性质. 拓扑学充满着显而易见的悖论和不可能性，而且可能比任何其他数学分支都更有趣.

本文中作为例子而谈到的问题可能只是引起读者的好奇心而已. 而拓扑学家们研究的新的拓扑性质使这个课题变得很有趣并且有时很奇怪而难懂，如果本文给读者留下的印象是拓扑学只不过是一大堆中国式的难解之谜，那么本文的目标就失败了. 拓扑学是数学的最基本的分支之一. 可以把它描述为后备军的数学. 其作用是为其他数学分支解决问题，即某些解是否存在，或者某些条件是否可能. 它通常并不告诉你如何去求解. 因此拓扑学在科学和技术的日常问题中还没有很多应用；然而它在实际事务中有重要的间接的影响 *，因为它是支撑那些直接应用的数学分支的结构的基本部分之一.

下面是一个典型的拓扑问题，类似于那个印度人的手套但是更为微妙：能否将一个内胎的里面翻到外面来？对于一个非拓扑学家来说，这是一个不容易的问题. 这

* 译注：本文成于半世纪前. 现在只能说拓扑学在物理科学、生命科学、……各方面的直接应用已经十分广泛，而且迅速增长.

个问题的答案是可以，并且上一页画的一系列图画可以说是"将内胎的里面翻成外面的说明书". 我们假设橡皮能随你的意拉伸，内胎上有一个洞，通常是安装气阀之用. 我们不建议读者去尝试着翻一个真的内胎；那要求做极大的拉伸. 你开始把一个指头伸到那个洞里，然后把洞扩得越来越大，直到内胎变成两条两头粘合在一起成为两个相连的环带长纸条（如图上的 D）. 将这两个环带均旋转半周；这效果正是将曲面的内部翻到外面. 再将两个橡皮带子拉伸回内胎的形状. 注意，如果你假设橡皮上有纹理，纹理方向已经改变了；如果它原来沿着内胎的纵长方向走，现在它沿着内胎的横向走了. 你已经将这个内胎翻成里朝外了. 拓扑地说其图形在所有这些扭曲后都是一样的，因为除了拉伸收缩以外什么也没干. 拓扑地说，而不是实际地说，那个内胎在每一步骤都始终是同一个内胎.

类似这种问题使拓扑学变得很有趣，并且有许许多多不同侧面的为人熟知的图例. 最著名的有麦比乌斯带，哥尼斯堡七桥和四色问题.

麦比乌斯带是拓扑学很喜欢的玩具. 1858 年德国数学家麦比乌斯（A. F. Moebius）发现如果你拿一长纸条扭转半周后将两端连结得到一环，你会发现一个似乎不可能的事——一个只有一个侧面的东西. 随你怎样翻转或涂画；你将发现它只有一个连续的表面. 一个四岁的孩子会把一个普通的纸环一面涂成蓝的另一面涂成红的，但是在一个麦比乌斯带上甚至毕加索都做不到这样的事. 进而考虑如果沿中线剪开会得到什么. 你沿着中线剪一周回到起点. 虽然你已经将纸带剪成"两半"，但它仍然是连成一片（参见 225 页之上图）. 这是所谓的"环割"，而且我们马上还要考虑它的某些迷人的变形.

另一种单侧的曲面是克莱因瓶，于 1882 年由德国大数学家 F·克莱因（Felix Klein）发明. 最容易的办法是这样来看，设想把一个内胎割开弄直成圆柱面，一端伸大面形成一个基底，另一端缩窄面成一个瓶颈；然后窄端弯扭下来推人气阀孔内，最后将它变阔与基底处的开口端粘合（参见 225 页中图）. 这可以称作一个"有孔"克莱因瓶，内胎之洞成为瓶子的开孔. 为了拓扑学的目的，通常假设实际上没有洞，因此这个单侧曲面穿过了自身. 这当然在物理上是办不到的，但是拓扑学家自由地运用这类神奇性质. 一个克莱因瓶可以想成一对麦比乌斯带将它们的边缘粘起来；225 页的下图显示一个克莱因瓶如何能分成两半并且打开来得到两个麦比乌斯带.

麦比乌斯带和克莱因瓶的这些性质可以总结成两段打油诗：

麦比乌斯法力大，
他的皮带泄天机，

沿腰一剪成两半？
会心一笑仍相连.

克莱因大师上了台，
微笑称赞你真行.
“我把两半再相连，
奉还一只我的宝瓶.”

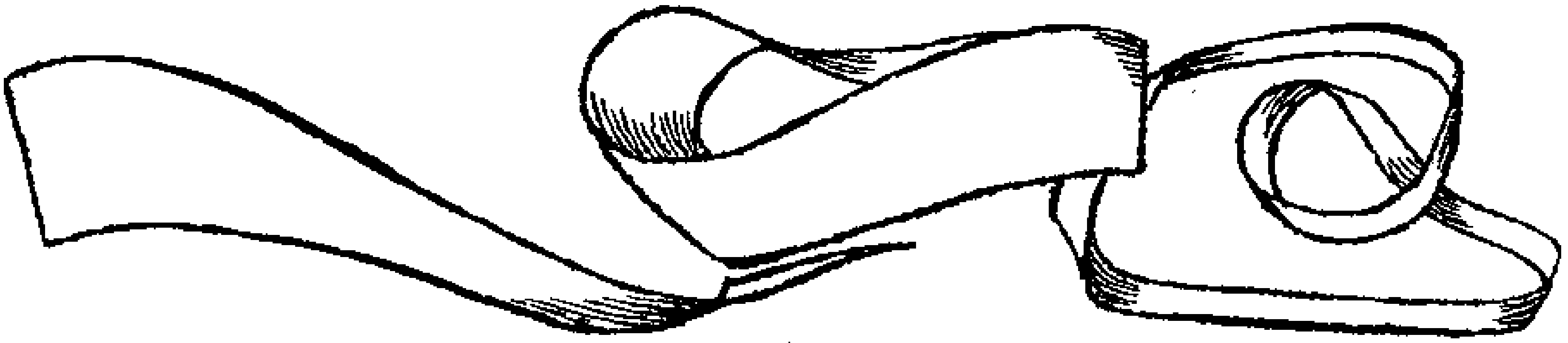
任何一个普通的如同一张纸一样的平坦的曲面都可以看作一个穿了孔的球面经过伸缩和展平到一张纸上或一个圆盘里面. 拓扑学家习惯于从如此简单的图形出发到达更为复杂的曲面，而且他们把他们在二维和三维中的发现推广到包括四维五维直到 n 维的图形上，但是这里我们只能限于简单的曲面.

因为当内胎或克莱因瓶拉伸变形太厉害时就很难识别其本来面目，所以我们希望用简单的不变量来刻画曲面的每一个拓扑型. 曲面的一个明显的不变量是边数. 现在我们只考虑有一条边的曲面. 另一个明显的不变量是侧数：单侧还是双侧. 麦比乌斯带或有孔的克莱因瓶是单侧曲面的例子；圆盘或者内胎则有两侧. 第三个明显的不变量是贝蒂数. 这是一个外行不熟悉但是数学上很重要的不变量，并且不难掌握. 它就是在一个曲面上最多可以剪几个割口而不把曲面割开时割口的数目. 割口可想像成用剪刀来剪，但要求从边上开始剪，并剪到边上结束. 这种割口称为交割. 圆盘上剪一交割口就分成两块，因此规定圆盘的贝蒂数是零. 麦比乌斯带的贝蒂数是 1；对于克莱因瓶或内胎来说贝蒂数是 2.

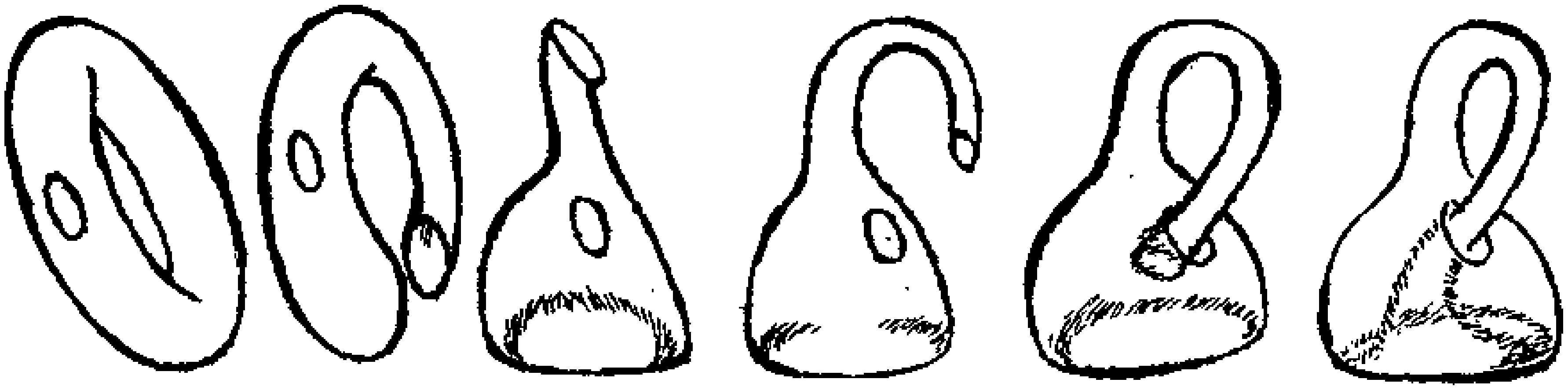
环割提供了寻求曲面贝蒂数的另一办法. 环割是在曲面上完全避开边缘从一点开始剪并结束于该点. 数一数不会把一个有一条边缘的曲面分割成两块以上(或者一个有 m 条边的曲面分割成 $m+1$ 块以上)的最大环割数，我们又一次得到曲面的贝蒂数. 交割与环割被德国数学家黎曼于 1857 年用来定义曲面的连通度. 黎曼称一个圆盘为“单连通”，一个箍或一个平环为“双连通”、等等，他的连通数总比贝蒂数多 1.

检验 226 页的左图后，你会发现每个环割与一个而且只与一个交割相交. 这种配对说明了一个称为对偶律的基本关系. 当推广到 n 维时，它就成了普林斯顿大学的莱弗西茨(S. Lefschetz)于 1927 年提出的“对偶定理”的内容，这是现代拓扑学研究的重大成就之一.

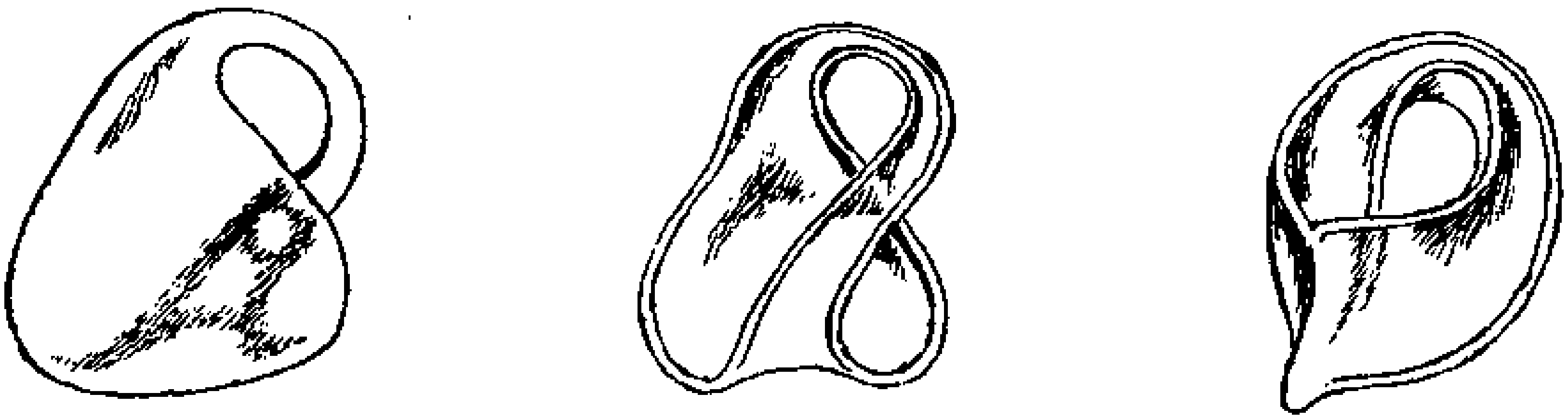
因此二维曲面的内蕴的拓扑不变量有：1)边缘数，2)侧数，3)贝蒂数. 不管这些曲面如何在三维空间中拉伸或变形，只要不撕破或焊接；这些不变量都将保持不变. 将这些内蕴不变量放在



一个麦比乌斯带可以用一个普通的纸带(左)给它扭转半周再将两端粘连来构作.所得图形(中)只有一侧而非两侧.如果用剪刀沿中线剪开,它不会像你可能期望的那样变成两片.它将变成一个双侧的有两次全扭转的带子.

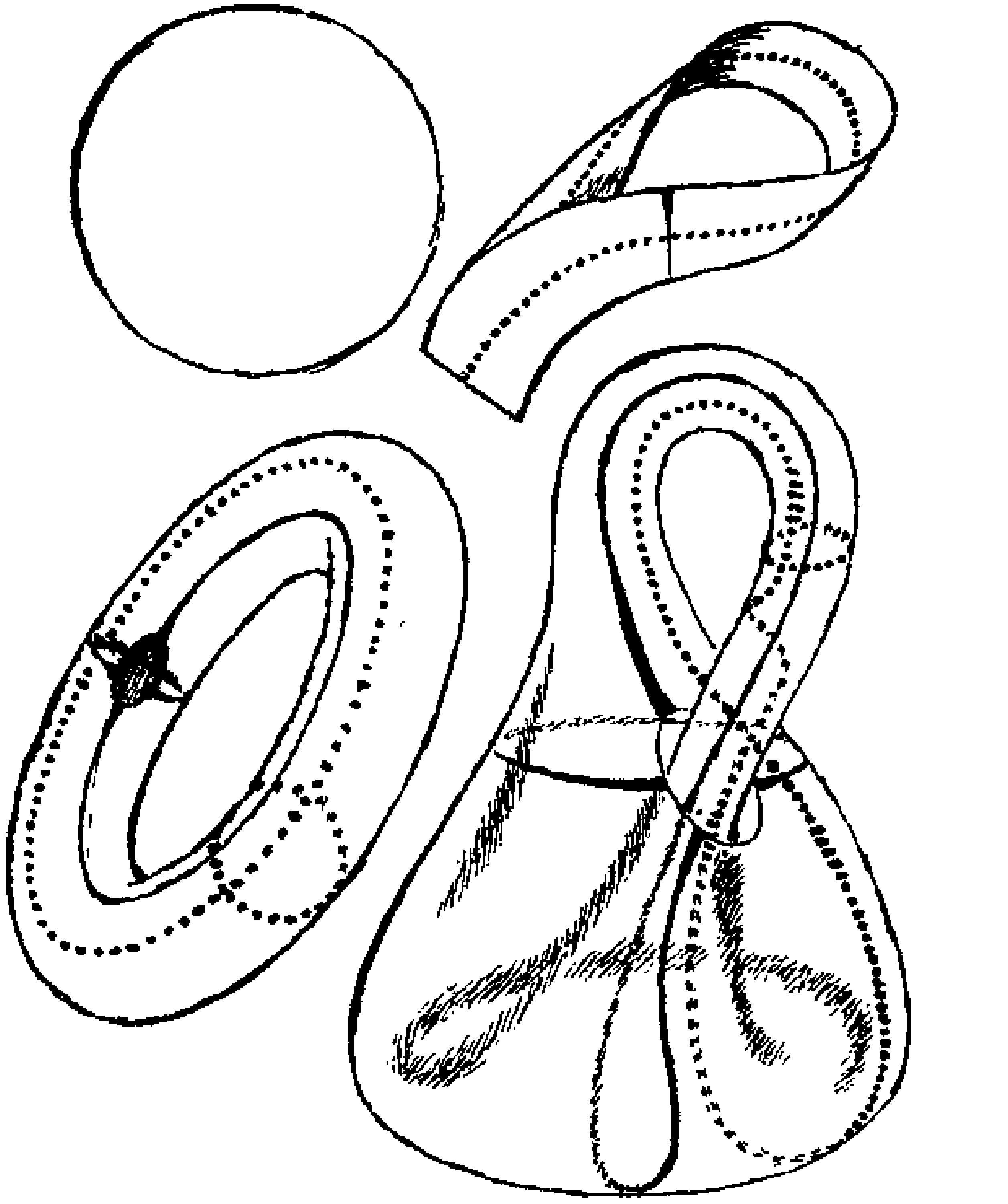


一个克莱因瓶不像麦比乌斯带那样容易构作,只能在想像之中做出来.如果假设如同第135页中内胎的橡皮那样,把玻璃拉伸和收缩事情就好办了.同麦比乌斯带一样,所得图形只有一侧.如果假设没有洞,它就没有边.右边有孔的克莱因瓶有一个孔和一条边.

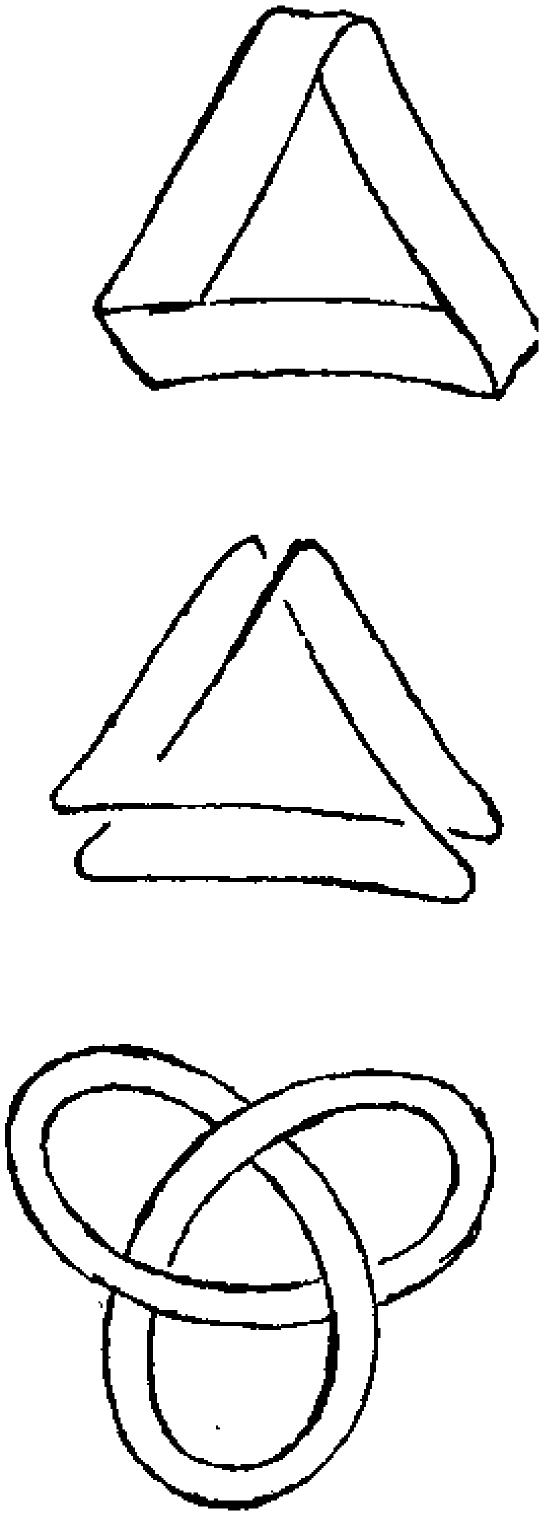


当把瓶子切成两半时便发现带子和瓶子有亲密的血缘关系.左边是一只完整的克莱因瓶.中间的图形显示了如果这个瓶被从上到下切开它的一半是什么样子.如果再假设玻璃能被拉伸和收缩,半个克莱因瓶可以形变为一个麦比乌斯带.右边的图完成了这个过程.

心上，考虑由一条纸带扭了三个半转后将两端连结而得的一个麦比乌斯带. 这样一个带只有一个边缘和一侧，并且因为只能做一个交割故贝蒂数为一. 内蕴地说，这同只扭了一个半转的通常的麦比乌斯带是一样的. 但是其区别在于放置在三维空间中的方式不同：带子的边缘打成了一个纽结，而一个通常的麦比乌斯带的边缘是一个不打结的曲线（参见 225 页之右图）.



交割（实线）从边缘开始到边缘结束. 环割（虚线）则避开边缘. 一个圆盘的贝蒂数是零（双侧，一个边缘），一个麦比乌斯带的贝蒂数是一（单侧，一个边缘），一个内胎的贝蒂数是二（双侧，一个边缘）而一个有孔的克莱因瓶的贝蒂数是二（单侧，一个边缘）.



三叶结（下）可以比照一个扭了三个半转的麦比乌斯（上）由画出它的边缘而得.

内蕴地说纽结都是相同的；它们都恰是一个环路或者一个圆周. 用适当的一组不变量来将它们分类的问题至今还未解决. 然而具有一个边缘的曲面提供了很好的方法来研究纽结. 例如，往右或往左扭三个半转的麦比乌斯带可得不同的纽结. 一个做法得右手三叶结，另一个得左手三叶结，其中任何一个都不能经拉伸或变形而得另一个. 给任何纽结配上一个只有一条边的双侧的具有最小贝蒂数的曲面使其边缘形成该纽结，则有关任一纽结的大多数已知性质可以很方便地导出——这是 1934 年由海得堡的沙爱弗(Herbert Seifert)引进的一个方法. 假若纽结的分类问题能够由一个适用于所有情形的一般原则来解决，这将是在相关的拓扑领域里取得许多进展的一条康庄大道.

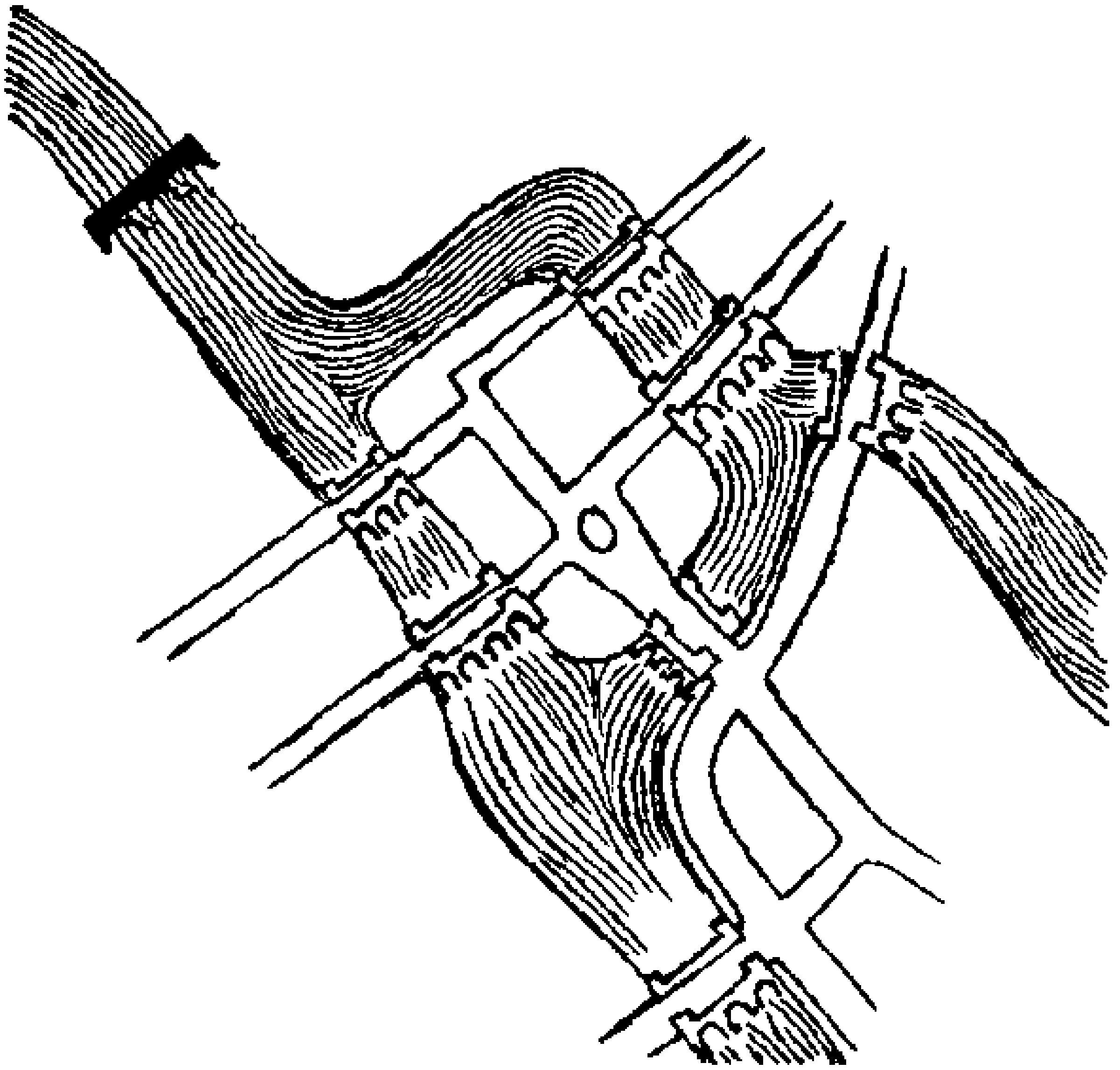
因为拓扑学允许形状上作很大的拉伸或变形，通常用一根绳子打的结拓扑学家没有兴趣. 每个这种结能够形变为一条直线. 在拓扑学里真正的纽结只是那些打不开结并且不是可解结的，因此拓扑学家可以合理地提出这样的问题："这个纽结是不是一个纽结?"拓扑学家已经知道讨论各种程度的纽结性、打结性和被扭性等等.

网络不同于纽结，它也有内在的拓扑兴趣. 哥尼斯堡桥问题是拓扑学中最古老的问题，需要研究由四个点和七条线段组成的一个特别的网络的一个内蕴性质. 哥尼斯堡这个德国城市，现在是苏联的一部分*，其中心在普雷格尔河中一个岛上. 在 17 世纪这个岛与普雷格尔河两岸各用两座桥连结，也用一座桥与邻近一岛相连，而那个邻近的岛又与每个岸用一桥相连(参见 228 页图). 哥尼斯堡的老百姓喜欢在桥上散步，于是提出了以下问题：你能否走过所有七座桥而任何一座都不能漏走或重走? 读者经过几次尝试后便可能确信那是不可能的.

在 1736 年伟大的瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler)对所有这类网络的问题找到了一般原则而解决了这个问题. 设我们将陆地换成点，同时用点之间的联线表示桥. 点被称为顶点. 一个有奇数条道路联结它的称为奇顶点；有偶数条道路联结它的称为偶顶点. 那个一般原则是：在一个连通的网络上旅行的次数必等于奇顶点数之一半. (不可能构作一个可以一次走完的网络具有奇数个奇顶点，因为每一条线都始于一顶点而终于一顶点.)若顶点均为偶的，或者若奇顶点数不大于 2，则可以用一次旅行走遍所有道路而不重复. (在 1935 年本文作者之一(塔克)实际走遍了哥尼斯堡桥而不重复任何一座，因为那时第八座桥已经造好.)

一个没有环路的连通网络被称为一个"树". 这样的网络总可以从一个顶点开始交替地添加线和顶点而构作出来. 每次一条新线都连到某个已有的顶点上，而其终点则作为一个新的顶点而引入，否则这条线的终点将是一个老顶点因而产生了一个环路. 因此一个树的顶点数等于连

* 译注：今属俄罗斯，改名为加里宁格勒.



哥尼斯堡桥是拓扑学中一个经典问题. 问题是试图步行走过连结两岛和两岸的所有七座桥而任何一座桥都不能走两次. 此问题仅当第八座桥被建成(左上)后才能解决.

线数加一. 一个不是树的连通网络可用去掉几条连线而不去掉任何顶点的做法约化为另一个树. 如果这个网络开始有 V 个顶点和 L 条线, 去掉 B 条线得那个新树, 则对于这个新树有 $V=1+(L-B)$, 所以 $B=1+L-V$. 这个 B 就是这个网络的贝蒂数. 它可以定义为从网络上能够去掉的连线的最大数使得所有顶点及余下的连线仍连成一片. 例如, 哥尼斯堡桥网络的贝蒂数是 4. 一个网络的贝蒂数和一个曲面的贝蒂数的定义有明显的相似之处当然是不足为奇的.

贝蒂数有一个长而有趣的历史, 虽然直到 1895 年它才被人这样称呼. 德国物理学家克希霍夫(G. R. Kirchhoff)在他的 1847 年的一篇引人两个著名的电路网络定律的文章中, 用了贝蒂数概念去刻画在一个网络中确定电流分布时用到的独立的环路方程的数目. 这个概念被英国物理学家麦克斯韦学得, 他在他的 1873 年出版的著名的教科书《电磁通论》中称它为"圈数". 因此, 这两位物理学家使用贝蒂数的思想要比庞加莱(Henri Poincaré)这位法国数学家于 1895 年在数学中确立它要早整整一代人. 被认为是现代拓扑学之父的庞加莱用一位意大利数学物理学家贝

蒂(Enrico Betti)的名字命名贝蒂数,因为贝蒂于 1871 年推广了黎曼的连通度数.

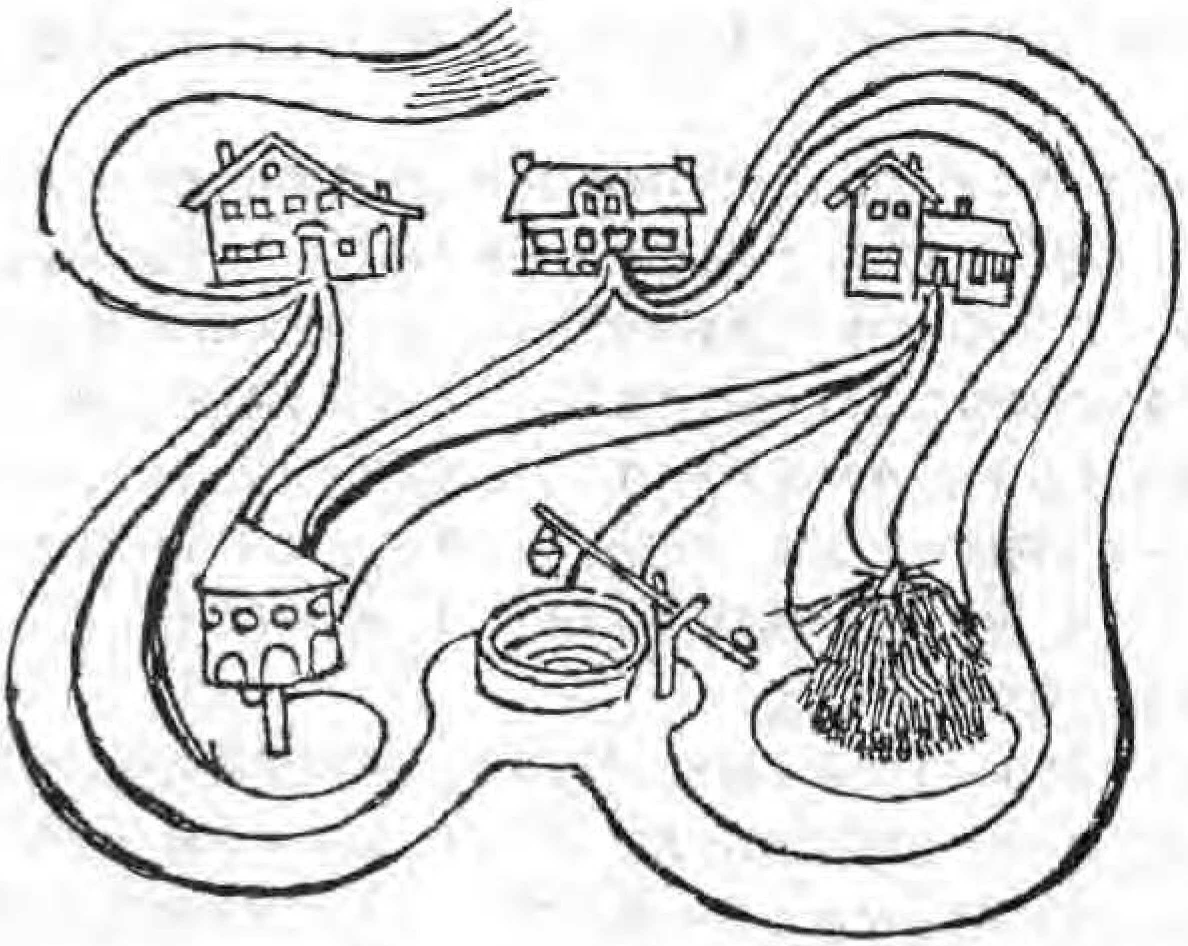
我们现在转向画在某个曲面上的网络,网络中的联线要求相交于顶点. 对于一个画在球面上的连通网络,有一个著名公式也是用解决哥尼斯堡桥的伟大的欧拉的名字命名的. 这公式就是 $V-L+A=2$. V 和 L 还是网络中的顶数和线数,A 是曲面被网络分成的区域数. 欧拉只限于研究凸曲面多面体的顶,线和面,但是当然其性质与一个球面上的相同. 因为一个多面体凸曲面能够拉伸并且磨圆而成为球形. 在球面网络的一个区域的中间穿一个孔,并将穿孔球面展平到一个圆盘内,则一个球面网络可以变成一个平面上的网络. 对于平面网络 $V-L+A=1$,因为通过穿孔,少掉了一个区域. 把此式改写成为 $A=1+L-V$,读者可以看出在一个连通平面网络中镶入的区域数等于这个网络的贝蒂数.

但是有些网络不能画在一个平面上而使它们的联线不相交于新的我们不希望要的顶点上. 考虑下述问题,由它的措辞可以想见它是很古老的:你能将三间农舍的每一间与一个鸽棚,一口水井和一个草垛用互不相交的小路联结起来吗? 稍许尝试一下你就可能相信这个问题是不能解决的(参见 230 页之上图). 波兰数学家库拉托夫斯基(Casimir Kuratowski)在 1930 年证明了六个点不能那样联结起来. 同样,五个点也不能全部互相联结起来;但是除了上述两种情形之外,每个网络都能够画在一个平面上. 不过,在一个麦比乌斯带上六个点能够全部互相联结起来,并且在一个内胎上七个点能够全部联结起来. 在三维空间当然有充分的自由使得任何网络能够不相交而画出.

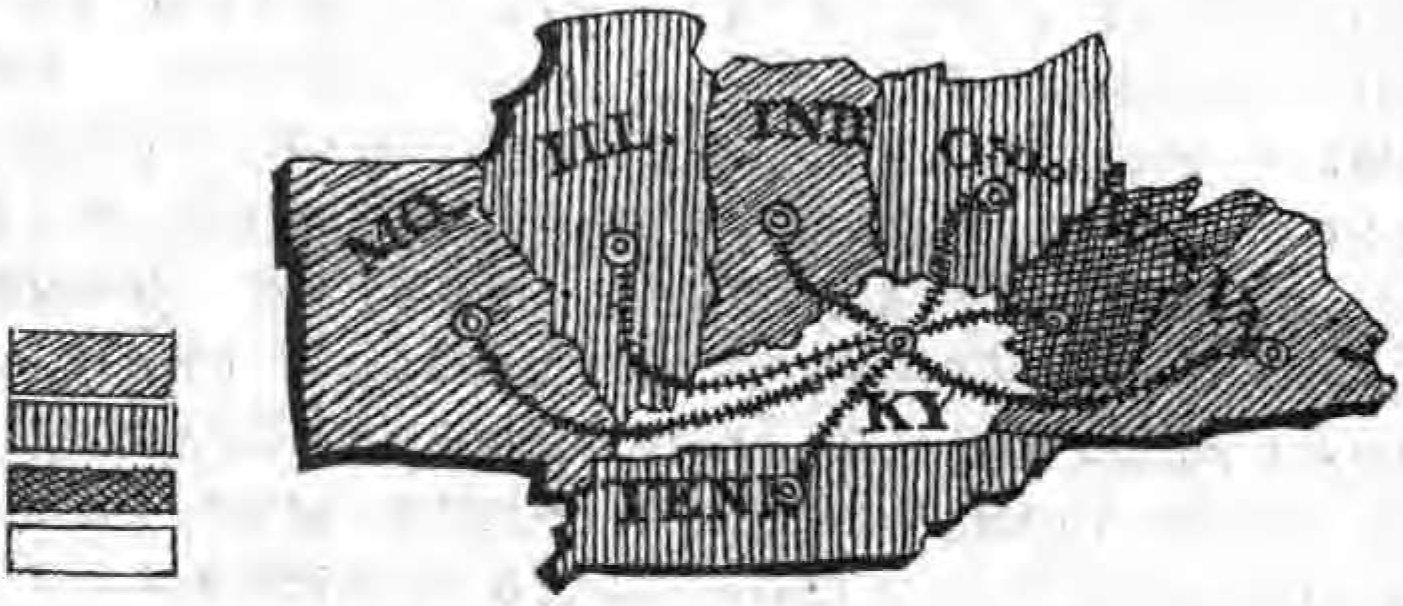
在我们离开网络课题之前必须谈谈著名的四色问题. 虽然它看上去似乎如此简单,几乎所有的人都感到他能很容易解决它. 然而还没有一个人解决了它,也还没有一个人能证明它是不可解的. 其规则是一个地图必须染成使得每个国家的颜色与其每个有共同边界的国家的颜色都不同(点接触不算有共同边界),并且要用最少数目的不同颜色. 问题是去证明或者四种颜色足够染球面上或平面上的任一地图,或者去构作某一个地图需要五种颜色. 比利时数学家德巴克(S. M. de Backer)在 1946 年证明了四种颜色对于国家总数不多于 35 个的任何一个地图是足够的,而西弗吉尼亚大学的雷诺兹(C. N. Reynolds)曾经通报我们他最近把国家的数目提高到 83,但尚无人建立一个涵盖所有可能情形的原则. 许多地图仅要求三种颜色. 美国地图在肯塔基州的边界上要求四种颜色(参见 230 页之下图). 四色问题仅针对平面或球面;对其他曲面可以提出不同的问题. *

---

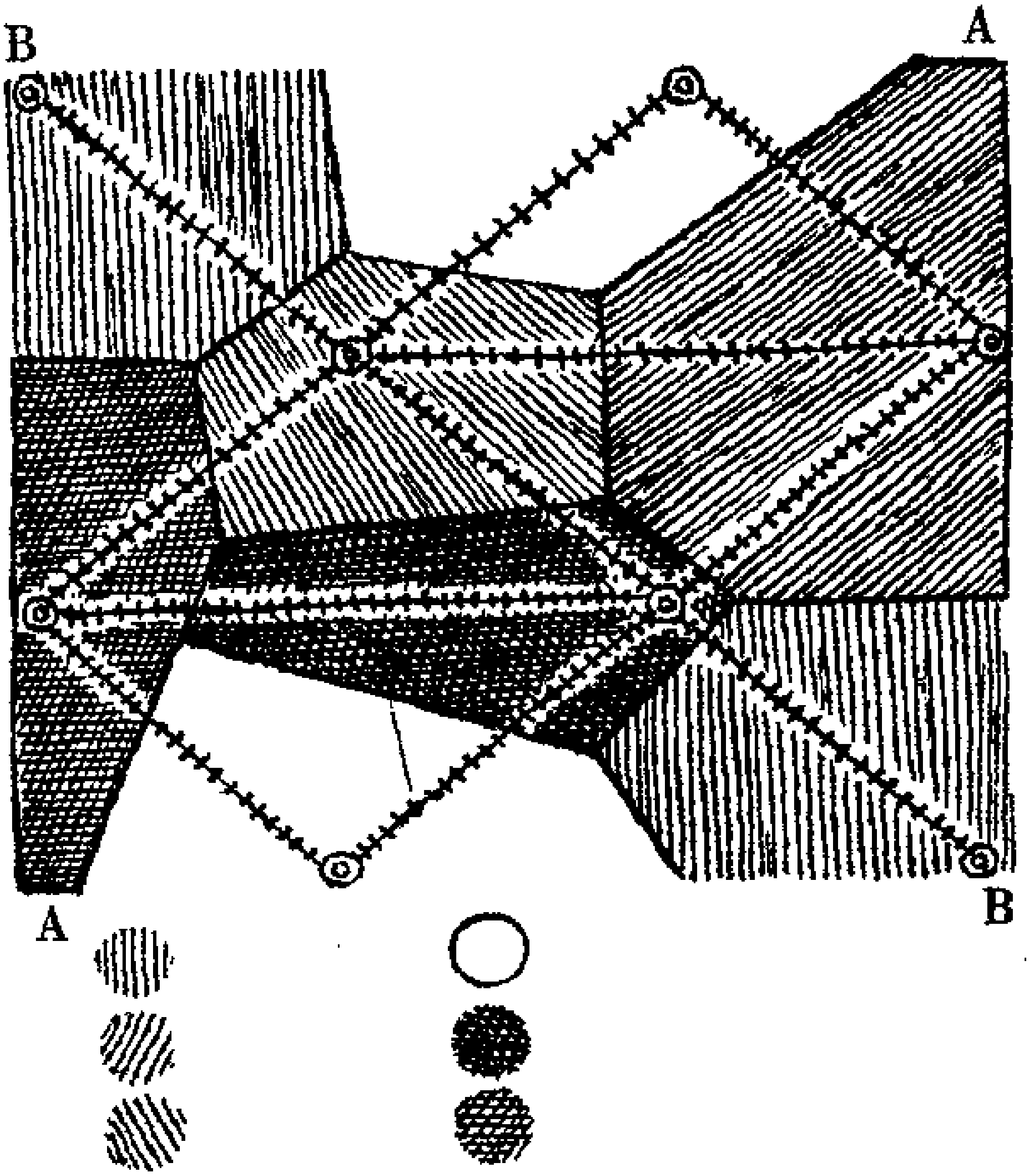
* 译注:四色问题已有了一个用计算机辅助的证明,它是由阿佩尔(K. I. Appel)和哈肯(W. Haken)于 1977 年提供的.



三农舍产生了一个颇类似于哥尼斯堡桥的问题. 现在的问题是将每一间农舍与一个鸽棚，一口水井和一个草垛用互不相交的小路连接起来. 正如图中左上方一条未完成的小路所示，这个问题无法解决.



四色的地图提出了四色问题. 四种颜色用四种纹理来表示. 问题的规则是每一州要染成与所有相邻州有不同颜色. 问题是证明或者四种颜色足够，或者找到一张地图需要五种颜色.



在一个麦比乌斯带上能够作出六色地图. 上边与下边按照 A 与 A 以及 B 与 B 相连而粘合. 其颜色都假设已浸透了纸张. 左上的首都与右下的是同一个. 上中偏右的首都与下中偏左的是同一个.

下面列出了一组关于球面的拓扑性质的有关定理. 每个定理似乎是一丁点小珍品，叙述这一个古怪事只是因为它有点古怪. 然而，这些定理是数学知识的一个重要部分的解说，它们不但有理论意义，而且对某些实际问题也很重要. * 并且虽然这里给出的讨论极为简略，我们希望它们会给读者提供对拓扑学其他方面的某种领悟.

1. 在地球上不能同时处处刮风. 在每一个瞬间在地球表面上至少有一点是无风的. 但是，除

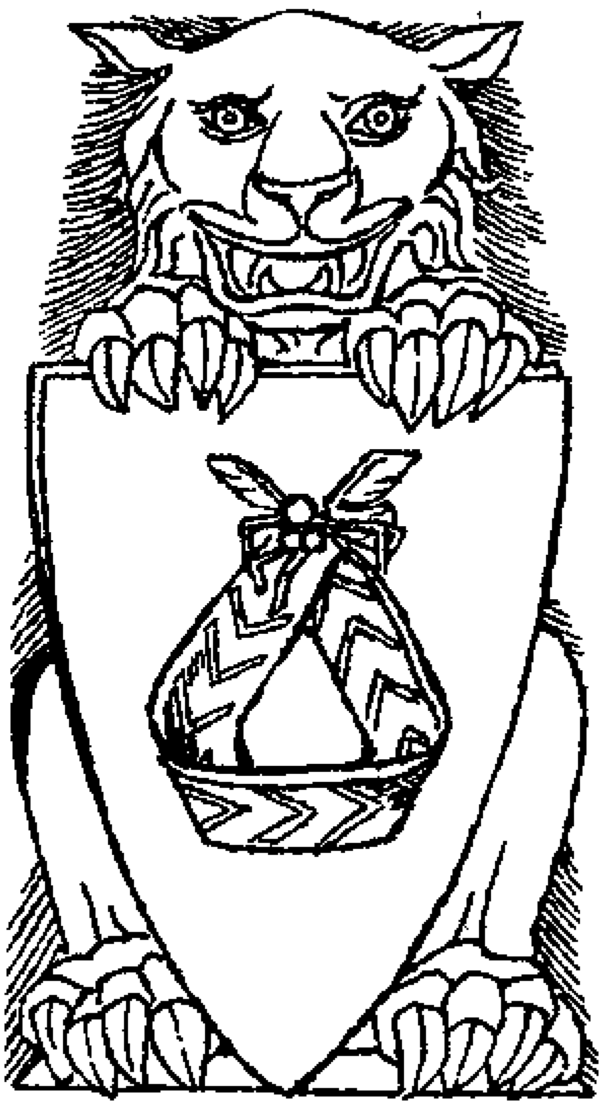
* 译注：这句话是译者加的.

一个点，比方说南极，处处都刮风是可能的.

2. 如果在某一瞬间北半球处处都刮风，则在赤道上必然按罗盘仪的每个方向都刮风. 这就是说，对于罗盘仪上任一给定方向，如说东北方向，在赤道上必有某一地点在刮着该方向的风即东北风.

3. 在同样条件下，还在赤道上必至少有一对在同一直径上的相对点，在这两点处风吹的方向恰是罗盘仪上的相反方向.

4. 在每一个给定的瞬间，在地球表面上至少有一对对径点有相同的温度和相同的湿度.



普林斯顿大学的一座壁炉旁的石狮子展示了一个麦比乌斯带，在其上有一只苍蝇能够不跨越边缘而爬遍各处.

5. 如果三个帝国瓜分了整个地球表面，包括陆地和水域，则至少有一个帝国能够自夸地宣称它是日不落帝国. 因为至少三帝国中之一在其国界之内包含有一对对径点.

当然，这些事实与其说是物理现实毋宁说是数学定理. 所说的风是理想的没有间断性的风，并且限于其表面分量，而温度和湿度都假设是连续变量.

定理 1 和定理 2 只是一个由荷兰数学家布劳威尔(L. E. J. Brouwer)于 1912 年证明的对 n 维提出的一般“不动点”定理的简单推论*. 定理 3 和定理 4 则是一个由波兰数学家波尔苏克(Karol Borsuk)和乌拉姆(S. M. Ulam)于 1933 年对 n 维情况提出的一般“对径点”定理的简单推论. 定理 5 是从由苏联数学家刘斯铁尔尼克(L. Lusternick)和施尼列尔曼(L. Schnirelmann)于 1930 年提出的一个一般的 n 维定理推出的. 如果假设有一个行星是环状的，则在其上这五个定理都不成立.

这五个定理涉及球面的如此不同的性质，很难看出它们互相之间是如何关联的. 除了第一个以外都能够用下述很简单的问题的普遍解法来解决：能不能在一个正方形中摆上扑克牌，使得任何相邻——不论是铅直方向，水平方向还是对角线方向——的两张牌都是不同颜色的，除非它们是同花的，同时使得在边行任何一双相对的牌是同色而不同花的吗？答案为否.(拓扑学家曾经向非拓扑学家挑战去解决它而且赌赢了.)为什

* 译注：参看本书第 21 章不动点定理.

么这样一个简单的"牌戏",一个甚至玩不成的牌戏,会显现出拓扑问题?为什么这个一般的定理,它说这件事情解决不了,会有助于解决许多其他问题?

为了理解这个似非而是的论断,你必须注意,从根本上讲这个问题很不同于这里讨论的大多数其他问题.其他问题涉及完整的体,区域或曲面;这个定理涉及一个模式,可以用它来逼近方块中的点要多近都可以.于是这个玩牌的问题显示了一个方块(或者圆盘,或者其他简单区域)的微观特征与宏观特征之间的相互作用.这个定理被推广到 n 维,它可用以证明某些类似的关系是否存在.因此这个玩牌的问题有非常深刻的拓扑意义.

从未听说过拓扑学一词的老百姓日常也使用许多较为简单的拓扑概念.拓扑学的基本概念是如此之基本,当我们还是小孩子的时候就学到了许多.内部性和外部性,右旋性和左旋性,环绕性和不环绕性等概念我们很小的时候就学会了.

最近这十年间应用数学家和工程师开始认识到拓扑学在解决某些类型的问题,特别非线性微分方程中的那些问题时的用处.大多数物理现象数学上可以用微分方程即有关变化率的方程来描写.过去通常假设效应是线性的,即正比于起因;因此弦的振动是假设遵循胡克定律,应力正比于应变,并且在计算放大器之增益时真空管之电流是假设正比于电网中之电压的.做出线性的假设是因为非线性微分方程的计算极端困难,甚至是不可能的话.自然界中"线性问题"即令说有,也是极罕见的;并且对于许多现代应用而言,例如在电子学和超音速空气动力学中的某些问题,线性的假设纯粹是误入歧途.

拓扑学正应用于证明某些非线性微分方程的哪些类型的解是可能的.答案是定性的而非定量的.拓扑学可以告诉一个工程师什么样的一般类型的电路能够满足他的要求,但不告诉他这个电路元件的数值;这些将用另外的方法去决定.然而,如果没有拓扑学的帮助,这位工程师可能在寻求所需要的一般类型的电路时就会失败.

拓扑学作为数学的一个分支是年轻的.虽然拓扑学的较为简单的概念每位儿童由经验就学会了,但它的高度复杂的发展还只有一个世纪,并且其最活跃的发展是从庞加莱的贡献以来的近五十年间.拓扑学的许多定理还未充分与数学的其他分支联系起来.许多外表看似简单的问题仍有待解决.但是拓扑学正在迅速向前迈进,而且拓扑学家满怀信心,在下一个五十年间的成就将会同 20 世纪的前半世纪的发展一样的重要.

20.

哥尼斯堡桥

欧拉(Leonhard Euler),

纽曼(James R. Newman)编辑,1953 年 7 月号

最卓越的瑞士科学家欧拉(Leonhard Euler)是 18 世纪的一位天才数学家,他在几乎所有方面丰富了数学,并且他的能力至少与他的天才同样著名.法国天文学家和物理学家阿拉哥(François Arago)写道,"欧拉计算起来丝毫不费力气,就像人们在呼吸,或者就像老鹰在风中翱翔".人们说欧拉"在第一次和第二次催他吃饭之间的半个小时能赶写完一篇论文".根据数学史学家贝尔(Eric Temple Bell)的说法,他"常常怀抱着一个婴儿写作他的论文,同时稍大一点的孩子们在他周围嬉戏着*",而欧拉的孩子多达 13 个.他在 28 岁时花了三天就解决了一个很难的天文问题,而天文学家原以为他将花上几个月的劳动.这个惊人的伟绩是如此过分地消耗了他的视力使他一只眼睛失明并且最终变为全盲.然而他的残疾既没有减少他的数学成就的数量也没有降低质量.据估计,当他的全集编辑完成时,他的作品将充满 60 至 80 大四开本卷.

下面发表的论文是欧拉本人的有关他的最重要成就之一的叙述:他关于著名的哥尼斯堡桥问题的解答.这个问题是称为拓扑学的数学分支的一个古典练习(参见塔克和贝利的文章"拓扑学",本书第 19 章).拓扑学是变形的几何学;它研究一个对象在拉伸,扭转,弯曲或其他尺寸和形状变化下保持不变的性质.哥尼斯堡之谜是拓扑学中的一个所谓网络问题.

在哥尼斯堡城(哲学家康德(Immanuel Kant)出生于此)18 世纪时有七座桥跨在普列格尔河

---

* 译注:译文引自 E. T. Bell 著《数学精英》(*Men of Mathematics*),徐源译,1991 年商务印书馆出版.

上. 它们将河中两个岛与两岸相互连结. 城中居民长期来自娱的一个问题是：是否可能在一次连续的散步中跨过这七座桥而既不遗漏也不重复任何一座？当这道难题受到欧拉注意时，他认识到其中隐藏着一个重要的科学原理. 他集中自己的注意力于发掘这个原理并很快提出了他的简单而机智的解答. 他提供了一个数学证明，而某些居民则是满足于通过反复试验的办法证明这是不可能的. 他同时找到一个法则解答了不论有多少座桥的一般问题.

哥尼斯堡之谜与人们熟悉的一笔画有关，所谓一笔画就试着在纸上描一个给定的图，而既不让铅笔提起又不让它重描. 哥尼斯堡图式在 236 页之左图用图论的方式给出. 检验会说明用铅笔一笔画这个图式是不可能的. 但是如果有八座桥，其图式如右图，那么这就可以用一笔画.

欧拉的论文给出了这个原理的一个漂亮的解释，并且提供了一个极佳的例子，说明拓扑学问题看似简单其实不然.

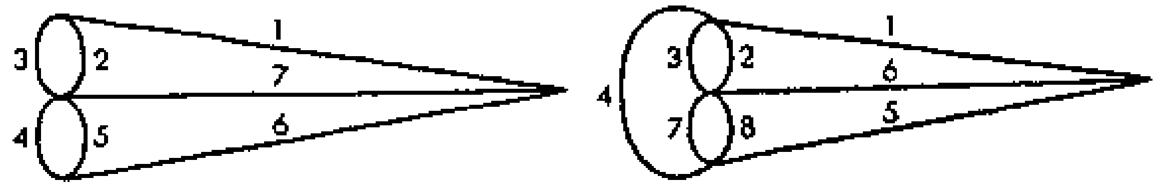
——纽曼(James R. Newman)

*　　*　　*

关于尺度的几何学分支以往曾被人们热心地研究过，但是还有另外一个分支至今几乎尚无人知晓；莱布尼兹最先说起它，称它为“位置几何”(geometria situs). 这个几何分支讨论的只是依赖于位置的关系；它不考虑尺度大小，也不涉及量的计算. 但是至今尚未给出属于这个位置几何的问题的令人满意的定义，也没有给出用来解决它们的方法. 最近公布了一个问题，它看来肯定属于几何，按其设计它不要求确定尺度大小，也不能用定量计算予以解决；从而我毫不迟疑地把它归为位置几何，特别因为其解决仅要求考虑位置，计算已无用武之地了. 在本文中我将叙述我发现的解决这类型问题的方法，这类型问题可作为位置几何的一个例子.

这个问题据我了解是为人所熟知的，陈述如下：在普鲁士哥尼斯堡城有一个岛 A，称为奈霍夫岛(Kneiphof)，一条称为普雷格尔(Pregel)的河的两条支流绕它流过. 那里有七座桥，*a*，*b*，*c*，*d*，*e*，*f* 和 *g* 跨过两支流(参见 238 页上图). 问题是一个人能否计划一次步行，使得每一座桥他都将越过一次而且仅仅一次. 我听说有些人否认这种可能性，另外的人则有些怀疑，但没有一个人主张那是实际可能的. 基于以上所述，我为自己提出了下述非常普遍的问题：让该河及其支流具有任意形状，并有任意多座桥，确定是否可能做到越过每座桥正好一次.

哥尼斯堡七桥这个特别问题可以解决如下：仔细列出所有可能的道路，然后检验以确认其中何者，如果存在的话，符合要求. 然而，这个解决的方法实在是太乏味了并且也太难了，因为其可能的组合之数很大，而且当在另外的问题中涉及更多的桥时它将根本无法应用了. 因此我放弃它并寻求另外一个范围受到限制的方法；即这个方法只告诉我们是否有可能发现一个满足所



右图能被一笔画；左图则不能.

描述的条件的旅行；我相信这样的方法会较简单.

我的整个方法基于以下我用来表示越过桥梁的合适的和方便的方法，在其中我用大写字母 A,B,C,D 记被河流分割开的不同的陆地区域. 于是当一个人从地区 A 越过桥 a 或 b 走到地区 B 时，我用字母 AB 来记这个跨越，其中头一个字母表示由之走出的地区，第二个表示当越过桥后到达的地区. 如果这位旅行者再从 B 过桥 f 进入 D，此跨越用字母 BD 表示；若先后进行两次跨越 AB 和 BD，我简记作三个字母 ABD，因为中间字母 B 既表示第一次跨越到达地区也表示第二次跨越走出的地区.

类似地，如果这位旅行者继续从 D 越过桥 g 到达 C，我记三次相继的跨越为四个字母 $ABCD$. 越过四座桥将表作五个字母. 如果这位旅行者越过任意数目的桥，其旅行将用数目比桥数多一个的字母来表示. 例如，表示越过七座桥需用八个字母.

用这个方法我无需注意用到了哪些桥；这就是说，如果从一个地区到另一个地区能够采用好几座桥，那么只要它们通向欲去的地区，用哪座桥都没有区别. 因此如果能够设计出越过哥尼斯堡诸桥的一条路线使得每座桥被越过一次而且只有一次，我们就能用八个字母来描写这条路线，并且在这个字母序列中 AB(或 BA)这个组合必须出现两次，因为有两座桥 a 和 b 联结地区 A 和 B. 同样组合 AC 亦将出现两次，同时组合 AD,BD 和 CD 将各出现一次.

我们的问题现在变成能否从四个字母 A,B,C 和 D 组成一个八个字母序列使其中所有上述组合出现的次数符合要求. 然而，在试图努力去寻求这样一个安排之前，我们最好先考虑一下它的存在性在理论上是否可能. 因为如果能够证明这样的安排事实上是不可能的，那么花力气去寻求它便是白费劲. 于是我找到了一个法则，对于这一个问题或类似的问题，它将很容易地决定所要求的字母排列能否实现.

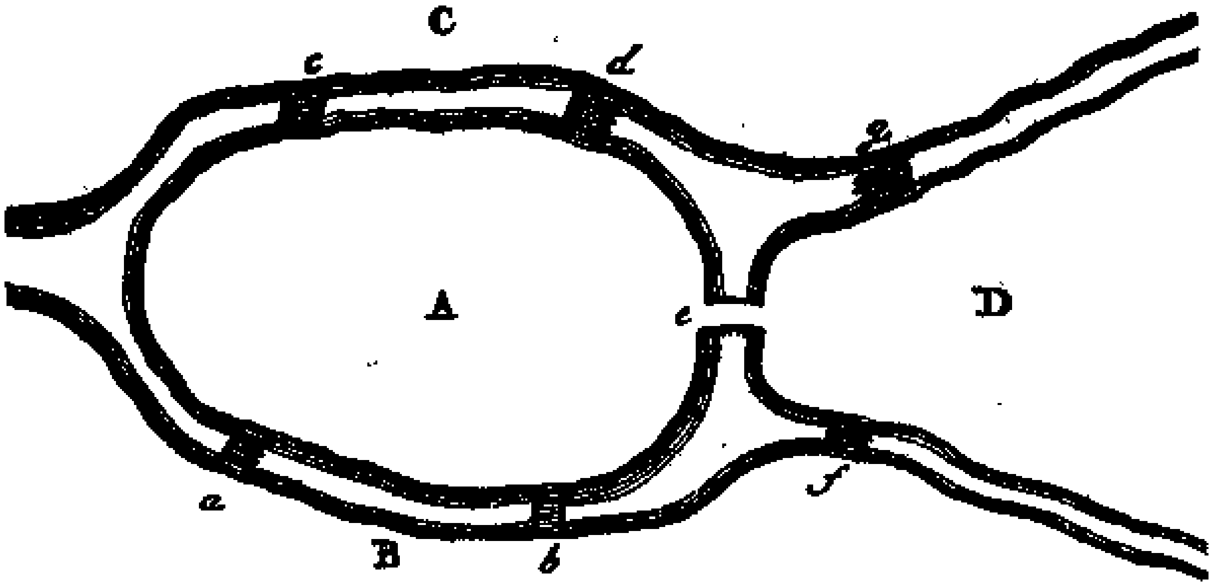
为了求得这样的法则，我取一个单独的区域 A，而设有任意多座桥 a,b,c,d 等等都通向它(238 页中图). 在这些桥中我先只考虑 a. 如果这位旅行者越过这座桥，他必然或者越过之前在 A 中或者越过之后在 A 中，因此根据上面的标记法字母 A 将恰巧出现一次. 如果有三座桥通向 A 并且这位旅行者越过了所有这三座，则字母 A 在他的旅程的表示中出现两次. 如果有五座桥通向 A，则越过所有桥的旅程的表示中字母 A 出现三次. 如果桥数是奇数，加上 1，再将其和除以

欧拉 1707 年生于瑞士巴塞尔；1783 年死于彼得格勒.

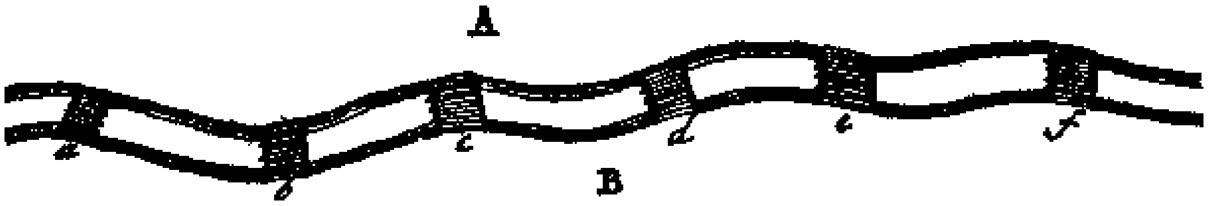
2，这个商表示字母 A 出现的次数.

让我们现在回到哥尼斯堡问题(238 页上图). 因为有五座桥通向岛 A，字母 A 必然在描写旅

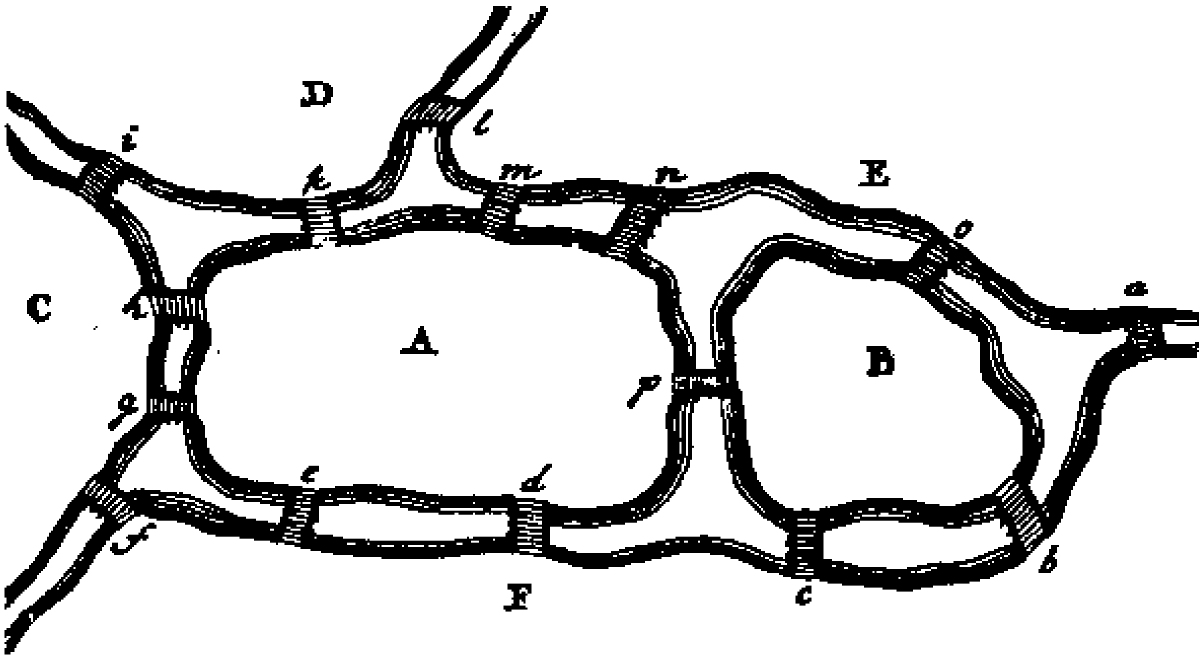
行路线的表示式中出现三次. 字母 B 必出现两次，因为三座桥通向 B；同样 D 和 C 必各出现两次. 这就是说，表示越过七座桥的字母序列必含有 A 三次，B，C 和 D 各两次. 但这是不可能的，因为需要的字母数是 9 而序列只有八个字母. 因此显而易见，按所要求的规则越过哥尼斯堡的七座桥不能实现.



哥尼斯堡的七座桥跨在普雷格尔河上.



欧拉运用了一个较为容易的情形来阐明他的原则.



虽然哥尼斯堡的旅行不可能，但这一个旅行是可能的.

应用这个方法，通向一个特定区域的桥数不论有多少个，只要为奇数，我们总能确定能否有一个正好越过每座桥一次的旅行. 如果桥数加 1 等于每单个字母必须出现的次数之和，则这种路线必存在. 另一方面，如果这个和大于桥数加 1，如在我们的例子中那样，则想要的路线不可能构作出来. 我给出的这个法则用通向 A 的桥数来确定字母 A 在路线表示中出现的次数与这些桥是否都从同一区域 B 通过来，或者从好几个区域通过来无关. 因为我只考虑区域 A，并试图确定 A 必须出现几次.

当通向 A 的桥数是偶数时，我们必须考虑旅行路线是否从 A 开始. 例如，假设有两座桥通向 A 并且路线从 A 出发，则字母 A 将出现两次——第一次表示越过一座桥离开 A 而第二次表示越过另一座桥而回到 A. 然而，如果这位旅行者从另外一个区域开始他的旅行，字母 A 将只出现一次，因为按我的描写方法，A 的单独出现既表示进入也表示离开 A.

假设在我们的情形有四座桥通向 A，而且路线从 A 开始. 字母 A 将在整个路线的表示中出现三次. 而如果旅行从另外一个地区开始，则 A 将只出现两次. 当有六座桥通向 A 时，如果 A 是起点，字母 A 将出现四次，否则只三次. 一般地，如果通向 A 的桥数是偶数，字母 A 出现的次数当出发区域不是 A 时是桥数的一半，而当路线从 A 出发时是一半加一.

每条路线当然必须从某个区域出发. 于是从通向每个区域的桥数我确定出对应的字母将在整个路线的表示式中出现的次数如下：当桥数为奇时我将它加 1 再除以 2；当桥数为偶时我直接将它除以 2. 然后，如果将这些数加起来等于实际桥数加 1，这种旅行可以完成，虽然它必须从一个有奇数个桥连通的区域出发. 但是，如果其和比桥数加 1 要少 1，则当出发点是一个有偶数个桥连通的区域，这种旅行是可以实现的，因为在这种情形总和还得再增加 1.

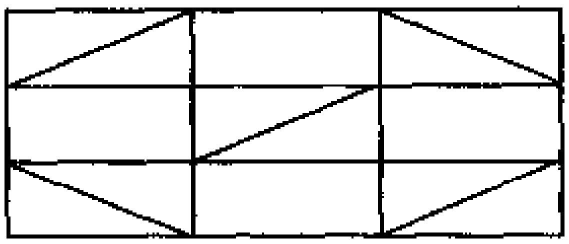
我的用以确定在任何一个给定的河与桥的系统中是否可能越过每座桥恰为一次的做法如下：首先我把每个被水互相隔开的单个地区标作 A,B,C 等等. 其次，我取桥的总数，再加 1，将所得之数写在纸的顶端. 第三，在这个数之下我写上一列字母 A,B,C 等等，并对着每个字母写下通向该特定地区的桥数. 第四，我给每个对着偶数的字母标上一个星号. 第五，在第三列中我对着每个偶数写下那个数的一半，并且对着每个奇数写下那个数加 1 所得和的一半. 第六，我将最后一列数相加. 如果其和是等于顶端之数或比它少 1，我便断言所要求的旅行能够完成. 但是必须注意，当这个和比顶端之数少 1 时，这个旅行路线必须从有星号的地区出发，而当这两个数相等时，则必须从一个没有星号的地区出发.

对于哥尼斯堡问题我做出的表如下：

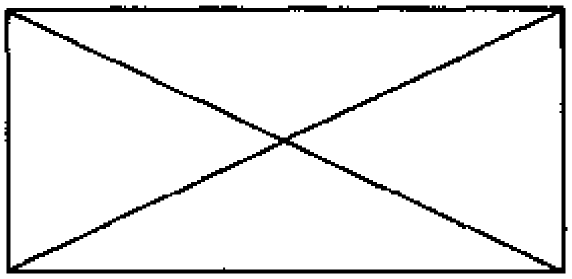
桥数为 7，得 8(=7+1)

A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

最后一列加起来大于 8，因此所要求的旅行不能实现.



此图能只用一笔画.



此图要用两笔画.

让我们讨论一个例子，它有两个岛被四条河的水所环绕(238 页之下图). 有 15 座桥，记作 a,b,c,d 等等，跨在环绕两岛的水上和几条河上. 问题是能否安排一次旅行通过所有的桥，但是不重复通过其中任意一座. 我首先将被水隔离的地区记作字母 A,B,C,D,E,F——共有六个. 其次，我将桥数(15)加 1 并将此数(16)写在最上方. 第三，我写下字母 A,B,C 等等成为一列，并对着每个字母写下连结这个地区的桥数，例如，A 有八座桥，B 有四座桥等等. 第四，我给每个对着偶数的字母标上一个星号. 第五，在第三列中若对应数是偶数我写下其一半，若对应数为奇数，则加上 1 再取其和的一半. 第六，将第三列的各数相加而得其和为 16. 因此得：

		16
A^*	8	4
B^*	4	2
C^*	4	2
D	3	2
E	5	3
F^*	6	3
		16

第三列之和与最上面的数相等，因此得知如果从没有星号的地区 D 或 E 出发，这种旅行可以实现. 下面的表示式给出了一个这样的路线：

$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD.$

这里我用夹在大写字母之间的小写字母指示出越过哪座桥.

运用这个方法甚至在相当复杂的情形我们也能够容易地判断按顺序地一次走过所有桥是否可能. 但是,现在我想给出另外一个简单得多的方法,它是从上面的方法加上几句预备性的话便很容易推得. 首先,我注意到第二列中各数之和必为实际桥数的两倍. 理由是将通向不同的地区的桥列入表中时每座桥被计算了两次,它所联结的两个地区中的每一个都被计算了一次.

从这个观察可见第二列中各数之和应为偶数,因为其一半表示实际的桥数. 因此,如果与 A,B,C 等等字母对着的数中有奇数,则它们中必有偶数个是奇的. 例如在哥尼斯堡问题中,对着 A,B,C,D 的所有四个数都是奇的,而在刚刚给出的例子中只有两个数是奇的,即对着 D 和 E 的.

因为对着 A,B,C 等等的数的和是桥数的两倍,显然如果在后一例子中给这个和加上 2 然后除以 2,结果将等于写在顶上面的数. 当所有第二列数均为偶数时,则每个数的一半都写在第三列中,这一列数的和将比最上面的数少一. 在这情形下总可能通过所有的桥. 因为不论从哪个地区出发旅行,总有偶数座桥连通着它,这正是我们所需要的…….

此外,当只有两个对着字母的数是奇面其余为偶时,只要从连通着奇数座桥的一个地区出发所要求的路线就是可能的. 我们取每个偶数的一半,并同时取奇数加 1 以后的一半,正如我们的做法要求的;所有这些半数之和于是将比桥的总数多 1,因此等于写在顶上端的那个数. 但是,第二列的数中(当有比 2 大的偶数个)是奇数时,显然第三列中各数之和将大于顶上端的数,从而所要求的旅行是不可能的.

因此对于可能出现的任意图形,确定一次通过所有的桥是否可能的最容易的办法是应用下述法则:

如果有多于两个地区被奇数座桥所联结,就找不到满足条件的路线.

然而如果只有两个地区被奇数座桥所联结,只要从这两个地区之一出发,所要求的旅行便能够完成.

最后,如果没有地区被奇数座桥所联结,则不论从何处出发,所要求的旅行都能够实现.

这些法则完全解决了最初提出的问题.

当我们已经确定这样的一条路线的确存在以后,剩下的问题是如何求得它. 为此有下述法则:无论何时,只要可能,我们就在心里将任何两个联结相同的两个地区的桥剔除;这通常会减少桥的数目. 然后,我们不难进而探索通过其余的桥的符合要求的路线. 一旦我们求到了它,当把原先剔除的桥复原时,这条路线的样式将不会受到严重的影响,这只要稍微想一想就会明白. 因此我认为我不需要对寻求路线本身再多说什么了.

21.

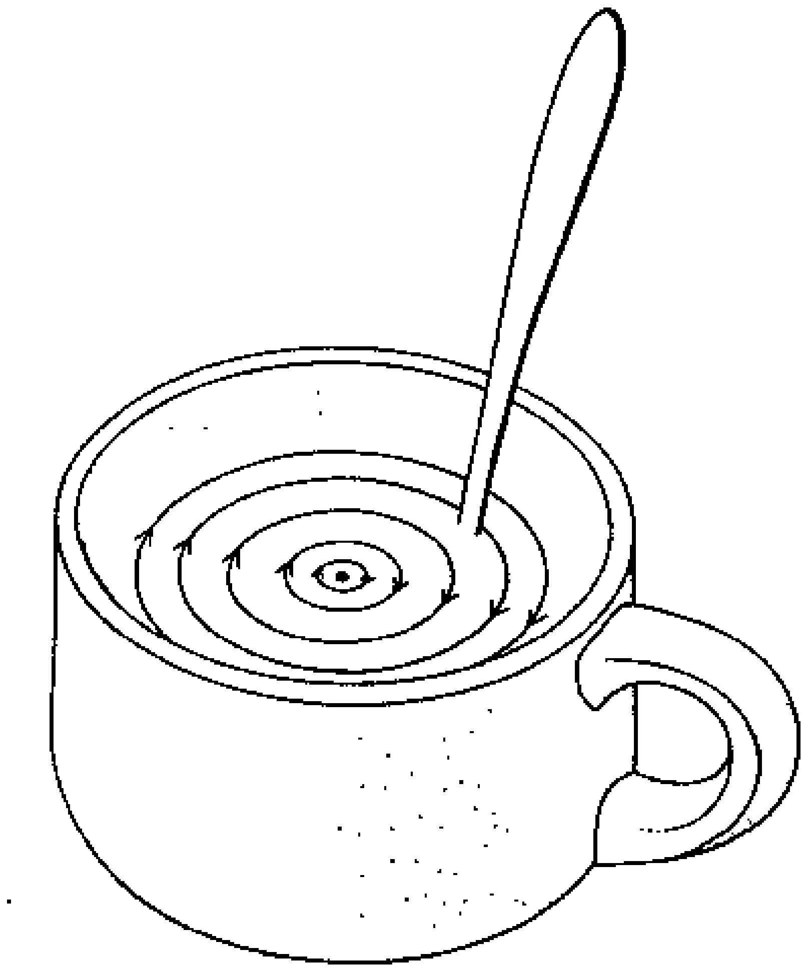
不动点定理

辛布洛特(Marvin Shinbrot),1966 年 1 月号

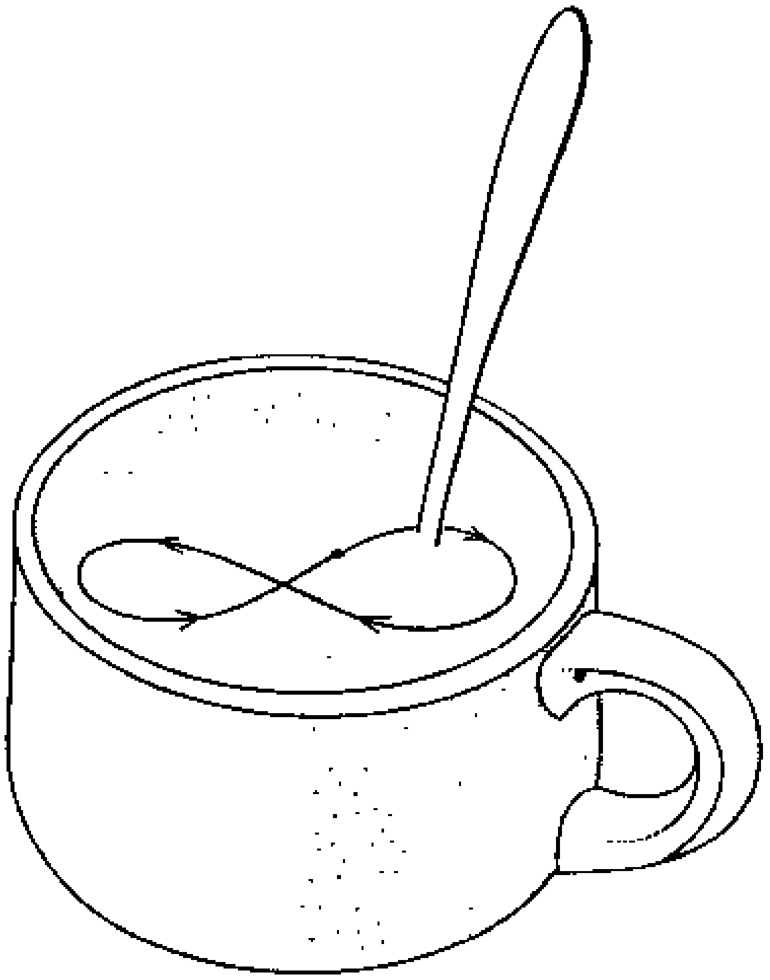
如果你在一条橡皮带子上标上一系列的点然后将它拉伸,这些点出现的顺序不会改变.这是一个直观上可以接受的拓扑结论:拓扑学是研究当几何图形被弯曲,拉伸,扭转或其他连续形变后保持不变的性质.另一类拓扑事实就没有这么显然了:它们的正确性直观地看上去难以服人.不动点定理就属于这一类引人入胜的事实.关于不动点定理的结果讨论的是这样的点,当它们位于其上的曲面经过形变后,它们正好在原来的位置再现出来.

用一个例子来引出它们.假使我们搅动一杯咖啡,用任何一种办法搅并且搅多长时间都可以,但是慢一点使得表面不破碎.(正如烹饪书中所说"搅而不溅".)根据一个最简单的不动点定理,当我们已经完成搅动,而且液体的表面已经停止运动后,在咖啡液面上至少有一个点将回到它的初始位置上!这样的一个点被称为一个不动点.在液体只顺着圆周打漩这个最简单的情形下,表面正中心的粒子将成为一个不动点.通常搅过的咖啡的运动是很复杂的,每个粒子都疑似被移动到表面的任何位置.相关的不动点定理首先由荷兰数学家布劳威尔(L. E. Brouwer)证明,它不曾指出哪个点保持不动,而只指出必然存在至少一点是不动的.

考虑布劳威尔定理的另一个应用.如果本书的这一页被撕下来,揉皱了,并被任意折叠(但不撕破),然后放回书中使得它的任何部分都不超出这一页边缘的原来位置,则揉皱了的书页上至少有一点将正好放回到它的原来位置上.这个由布劳威尔定理所保证的事实令人震惊的程度对于许多人远远超过认定咖啡表面有一个不动点.然而,对于数学家来说这是更显然的,因为揉皱一页书是一个比搅咖啡更为简单的变形;纸不能被拉伸,而咖啡表面的两点间之距离则很容易改变.



轻搅一杯咖啡使其表面的薄膜不破裂，这表示了一个几何曲面的连续形变. 这里的咖啡被搅得使其表面正中央的那个粒子不移动.

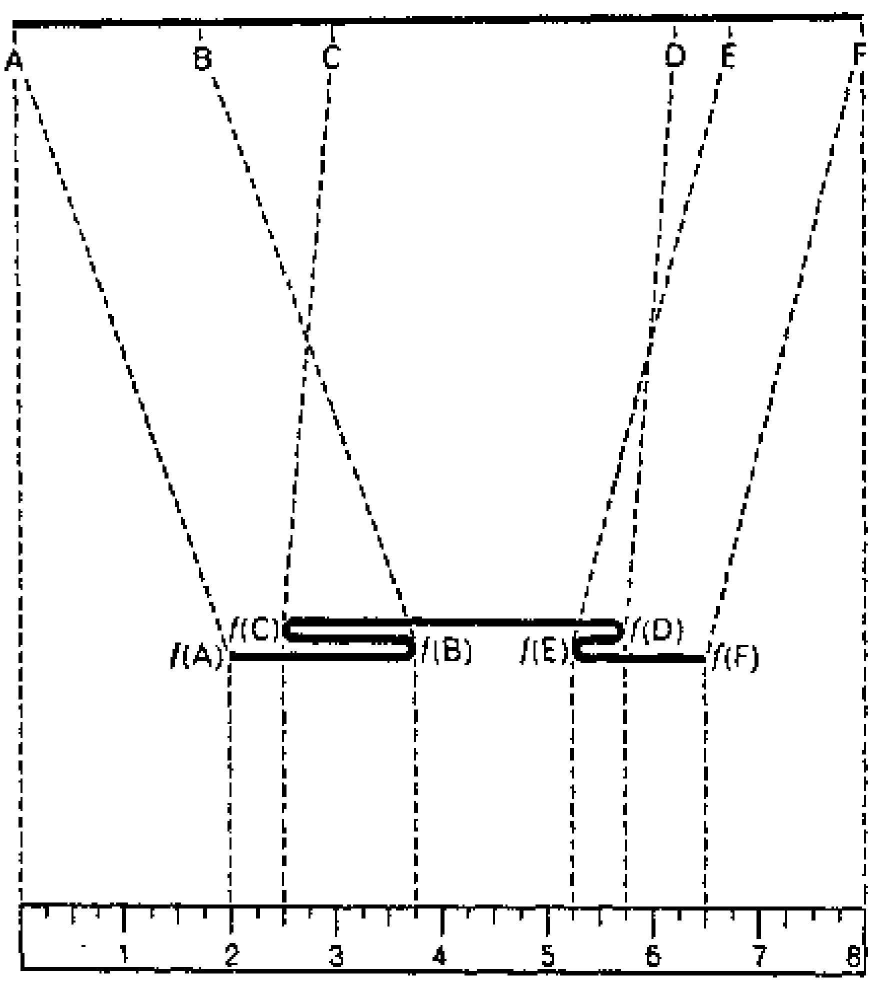


不动点定理说，不管咖啡表面是如何被连续形变，表面上总有一点位于它最初的位置上. 这个定理不论什么时候都不能说出是哪个点不动.

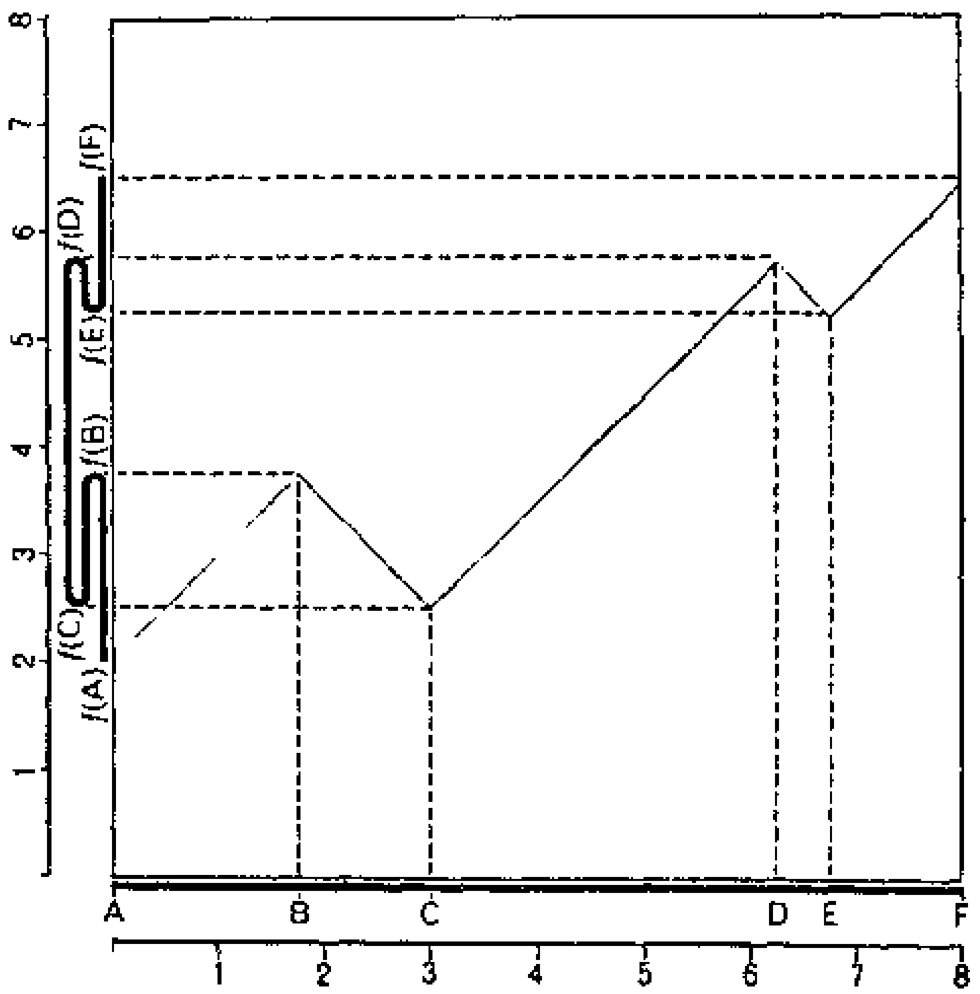
为了理解如何作不动点定理的证明，最简单的不是去观察作为咖啡表面或者书页的一个二维曲面，而是去观察比如作为一段弦的一个一维曲线. 假如我们将一根弦拉满长度使它成为一段直线并把它放在桌子上. 然后我们把这根弦折叠任意多次，但要求在这条直线弦段原来的范围内移动它. 现在可以断言，这根弦上有一个点已经回到这个操作之前它的原来位置，因此是一个不动点. 这就是布劳威尔定理的一维形式.

此定理证明如下：将原来的弦和折叠后的弦都表为图中的曲线，比较这两条曲线然后证明它们相交于某一点(参见 244 及 245 页的插图). 开始我们测量一下原来的直弦. 我们称左端点为零，并给弦上每点用从左端点到它的距离以英寸标注. 如果这段弦有八英寸长，我们可以称最右之点为 8. 同样在折叠后的弦上每一点用新的位置从该弦原来的左端点到它的距离标注. 如果一个原为离左端 4 英寸的点在形变后已经移到离左端 3 英寸，它的新位置迳直标注为 3.

用这个办法我们定义了一个函数，可以记作 $f(x)$. 在弦上任一点处这个函数的值就是表示这个点已经移到的位置的那个数. 因此，如果点 4 移到了点 3，f 在 4 之值就是 3；用记号来写就是 $f(4)=3$. 要说某个点不被移动，即某个点是不动点，正好是方程式 $f(x)=x$ 有一个解的一个



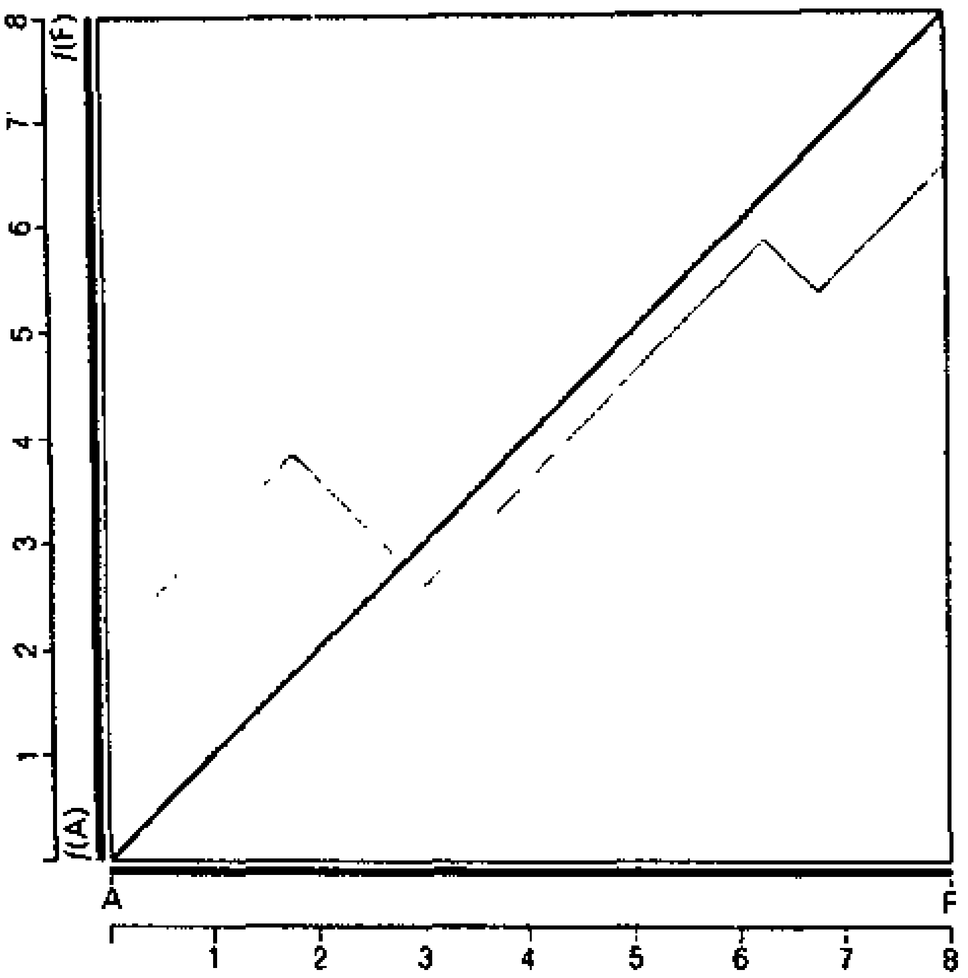
折叠一根弦是一个一维曲线的一个连续形变. 图的上方是一根八英寸长的弦,假设它的点当弦被折叠后的新的位置如图的中间所示,例如点 A 移动成点 $f(A)$. 不动点定理说,在折叠弦上必有某个点 $f(P)$ 按图的下方的尺子从左端量起与直弦上的 P 点量得的值是一样的.



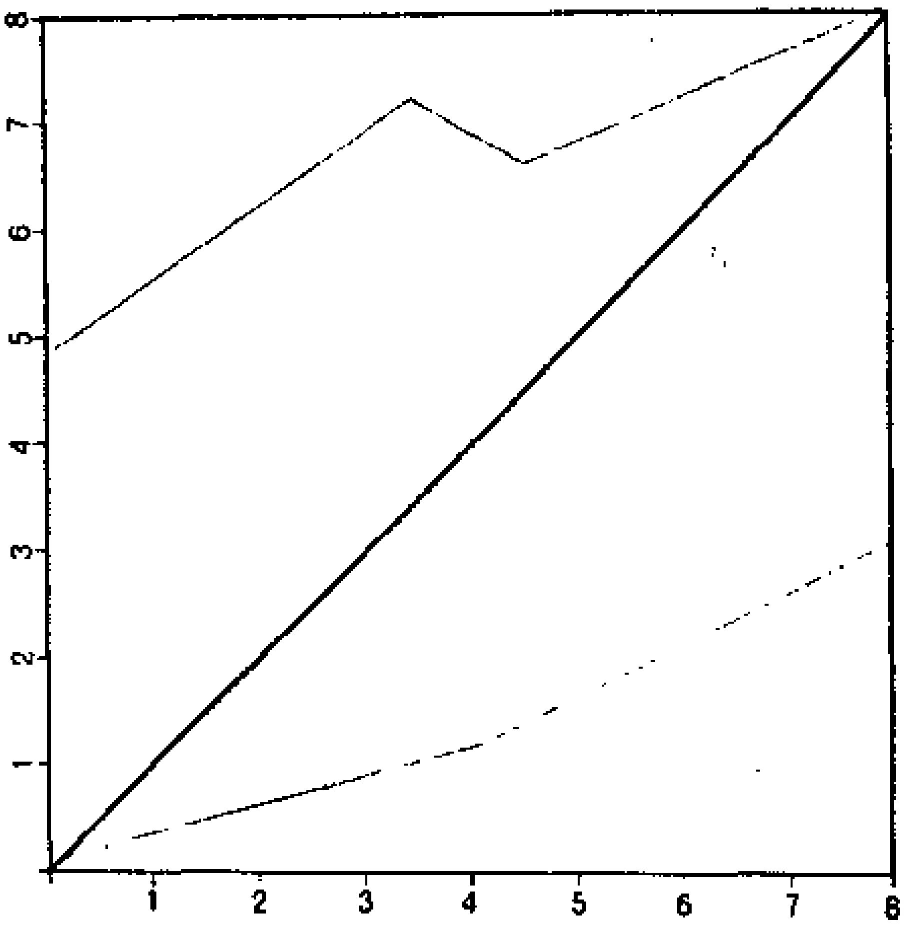
图中左边折叠弦是用图里的折线来描写的. 水平轴用英寸表示一点从弦的原来位置左端算起的距离. 铅垂轴表示折叠弦的一点到弦的原来位置的左端点的距离. 因此点 C 有水平坐标 3 和铅直坐标 2.5.

几何说法.

现在我们构作大家熟知的笛卡儿平面和函数 $f(x)$ 的图形. 在此平面中水平轴表示该弦在原来位置时每点从左端到它的距离,而铅垂轴表示该弦在折叠后每点从左端到它的距离. 在图上从 4 移到 3 这件事可以用平面上的一个点来标注,它在水平轴上坐标为 4 而在铅垂轴上坐标为 3. 当折叠弦上所有点都用这个办法标明后,联结所有这些点的那条曲线就是折叠这条弦这件物理事实的数学表示. 这条曲线可能极端复杂,但是它有两条很好并且很重要的性质. 它完全位于笛卡儿平面的一个象限之内;事实上,它位于以水平轴 0 到 8 为其底的正方形之内. 这是由这样一个事实所保证的:变形后的弦不会移到原来的 8 英寸线段之外;因此描写这个形变的函数 $f(x)$ 能够既不会是负的,也不会大于 8. 此外,这条曲线是连续的;因为这条弦在形变过程中并不断开,所以描写这个形变的曲线上没有间断. 我们将指出,该曲线的这两条性质足以保证这条弦有一个不动点.



根据相同的数学约定，描写原来的八英寸长的直弦的是水平轴从 0 到 8 上建立的正方形中联结左下角到右上角的对角线．此对角线与描写折叠弦之曲线的交点给出了一个不动点．



不动点定理之证明基于下面的事实，每一条描写折叠弦的曲线，若折叠弦没与原位置两端之一对齐，必然跨过描写直弦的对角线．两个特殊情形是弦的曲线以最右（上）点为不动点及以最左（下）点为不动点．这个定理是荷兰数学家布劳威尔提出的．

我们现在知道如何把折叠的弦在图上表示为一条曲线；我们现在必须证明，如果那条原始的未形变的弦也表示成为一条曲线，这两条曲线必然相交．这不难证明．假设我们拾起这段直弦再放回原处，仍然保持它为直的．虽然它未曾改变形状，我们仍然可以认为它做了一个形变，即“不变”也看成形变．我们可以标明对应于此形变的函数．如果我们将形变后的弦之左端与老的对齐，弦上一点的“新的”坐标即从左端量起的距离，仍应与该点老的坐标相同，这样我们得到距离两个坐标轴等距离的点——有坐标(1,1)的点，有坐标(2,2)的点，等等．当我们连结这些点时，事实上我们画出了以水平轴 0 到 8 为其底的正方形的对角线．

现在回忆表示折叠弦的那条曲线．根据定义它必然起始于 0(我们的正方形的左侧边)并且结束于 8(右侧边)．它也必然在铅垂轴上位于 0 和 8 之间并不能有间断．从这个正方形的一侧到另一侧，这条曲线将跨越或者至少将触及对角线．表示折叠弦的那条曲线不跨越对角线的唯一

办法是它起始于正方形的左下角或者结束于正方形的右上角. 然而，第一种情形表明点 0 是一个不动点而第二种情形点 8 是一个不动点. 因此在所有情形这两条曲线必相交于某个点，所以在形变后的弦上存在不动点. 甚至当我们不用弦而采用如橡皮一类的弹性材料，只要形变后不破损也不超出未形变前所占的位置，则结论仍然正确. 用橡皮时的区别仅仅是在于表示拉伸后的曲线不必由折线组成而可能有曲线形状，而折叠弦的表示必为一条折线.

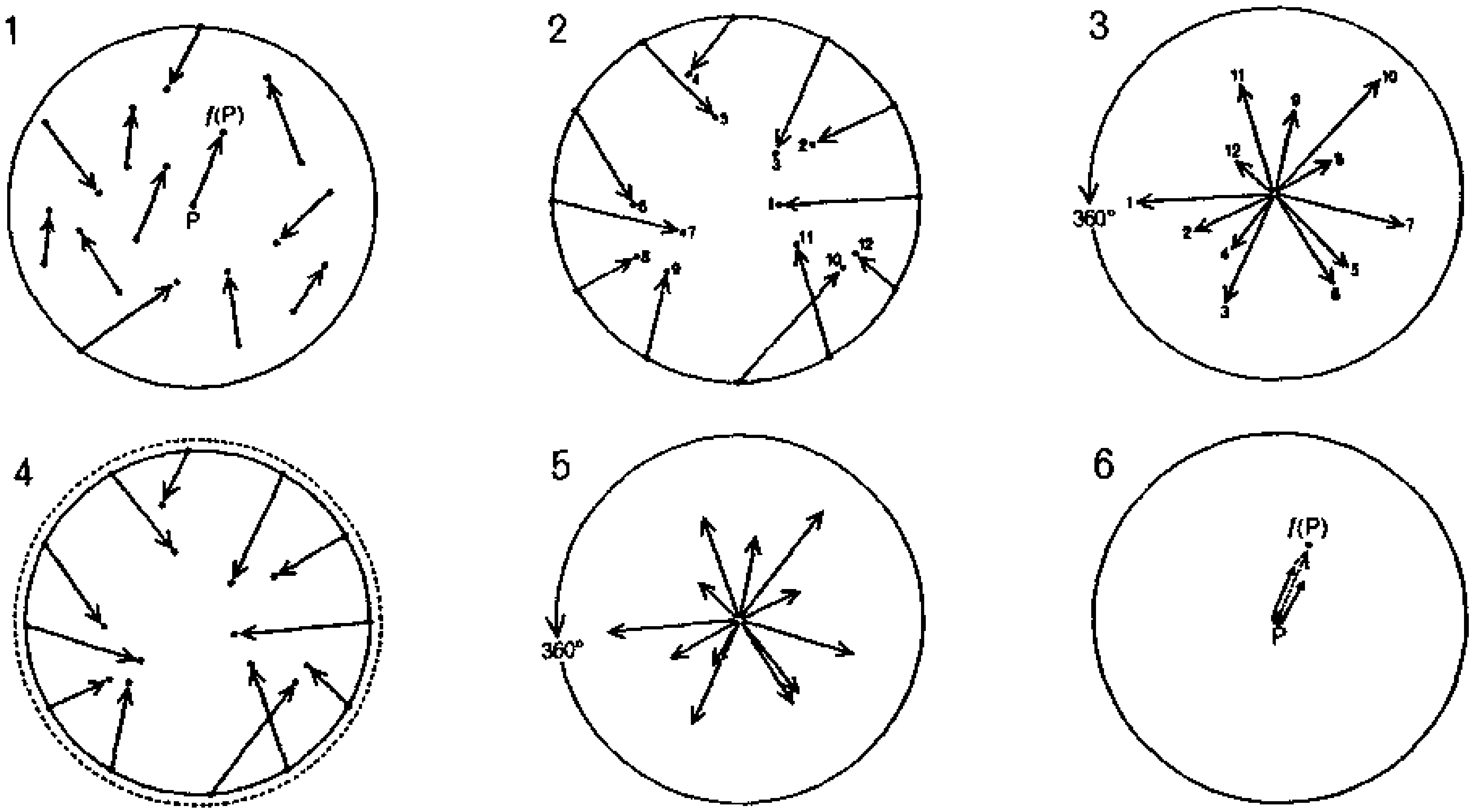
布劳威尔定理应用于二维曲面仍然成立. 如果我们不用一杯咖啡的表面而考虑一个橡皮的弹性圆盘. 我们可以将这个橡皮圆盘用不同的方法拉压和折叠，只要确保圆盘不撕破并且始终位于原来的圆周之内，就一定至少有一个不动点. 二维的布劳威尔定理的证明是很优美的. 我们首先考虑一个圆盘，并假设定理不成立，形变后没有一个点保持不动，然后能够证明这个假设是不能成立的. 其证明(它不仅对圆盘成立而且对如同一张纸一样的矩形也成立)的步骤概括地图示在 247 页图中.

布劳威尔定理不能应用于形状不合要求的区域. 例如，一个无限区域可以没有不动点，那怕是一维的. 一条无限长的线段能够这样移动使得没有哪一点保持不动：我们只需把线段上每一点往右移一英寸. 因为线段上每个点都被从原来位置上移动了一英寸，所以不存在不动点. 因此我们得知，欲使一个区域形变后恒有不动点，它必须有界. 它还必须满足某些有关形状的其他条件，其中一个条件数学家称之为凸性. 一个区域被定义为凸的，如果作直线段联结该区域中任何两点，这样的直线段中没有一点落在该区域之外(参见第 248 页之图).

我上面讲的应用于一维线段和二维曲面的布劳威尔不动点定理事实上可以应用于任意有限维的曲面. 然而，如果曲面是无限维的，此定理便不成立. 幸运的是确有适用于无限维情形的几个不动点定理. 我们说“幸运”，因为你们将会看到，使人惊奇的是不动点定理中最令人感到兴趣的，恰好是无限维的情形. 为了理解为什么必须考虑无限维情况，让我们考虑牛顿的著名的第二运动定律，它说力等于质量与加速度之乘积($F=ma$). 当应用这条定律时，大多数情形力是一个物体的位置的一个函数，给出该物体的加速度后，其位置恒可应用诸如积分一类的微积分技术找到. 因此牛顿公式可以看作关于位置 x 一般形式为 $f(x)=x$ 的方程，其中 x 表示该物体的位置而该已知函数* f 被力、质量及初始的位置以及速度所确定. 这类问题的任何一个解当然是一个时间的函数. 由此可知，我们试图寻求是否存在一个时间的函数满足这个方程. $f(x)$ 可以看作将时间的函数变作新的时间的函数的一个变换，正如搅咖啡可以看作圆盘中的点到新的点的

---

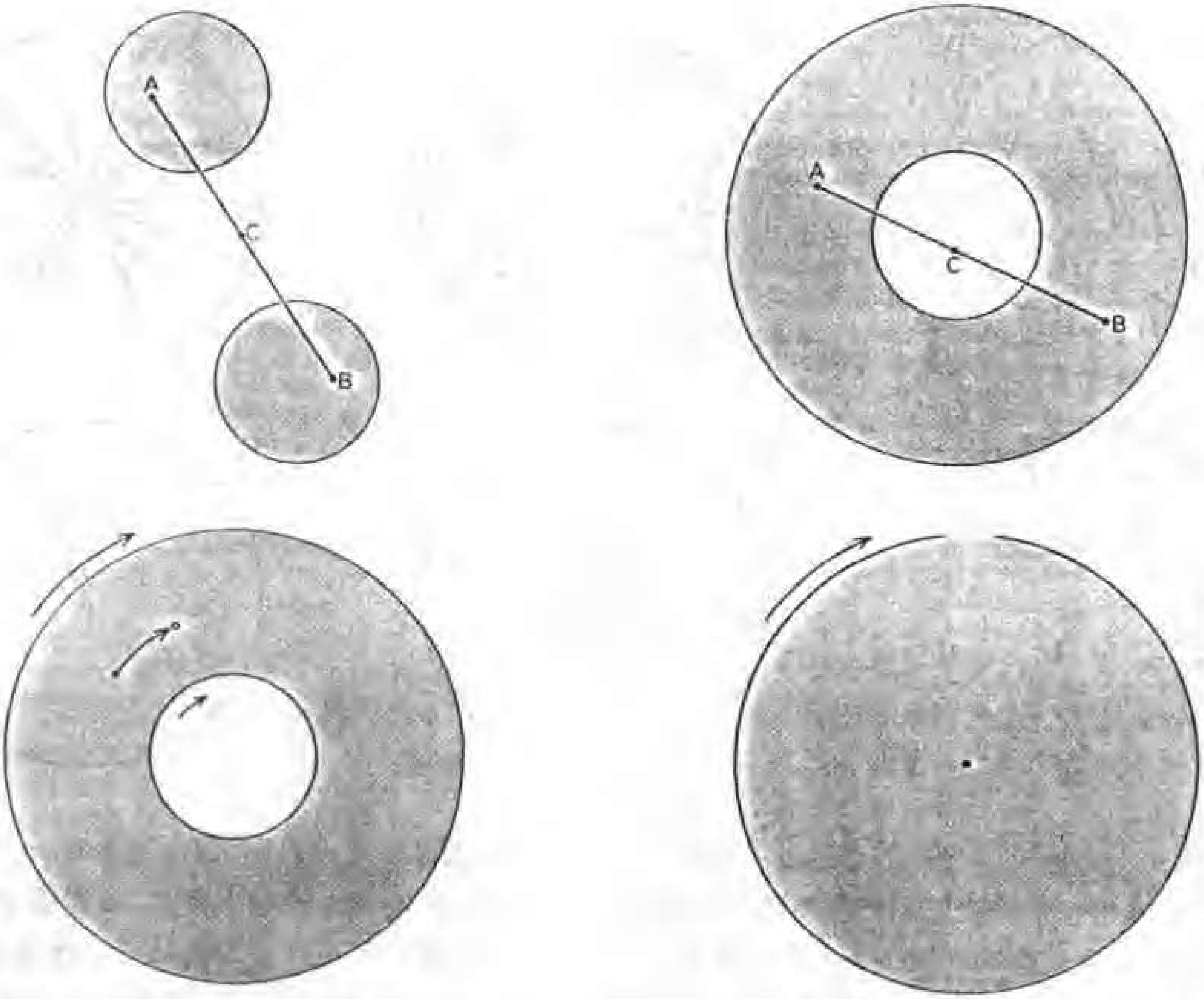
* 译注：用比较准确的语言，应该说是已知算子，因为它一般确非函数.



圆盘一类的二维曲面的布劳威尔定理的证明一开始假设与定理相反，形变后没有一个点保持不动．从每一个点出发到它移动后的点作一箭头(1)．因为没有点被移出圆盘，从边缘上的点出发的所有箭头必朝向圆周之内(2)．把这些箭头在(3)中重新画成从圆周内的一点出发的．于是，这些箭头(称为变换向量)沿着圆周转了整个一周 360 度．接着如果我们沿着一个比原来的稍小一点的同心圆周上的点跟踪其运动(4)，由这些箭头所产生的转数由连续形变的性质仍保持为 1(5)．这必然对所有同心圆周都成立，因为变换向量的旋转周数是一个连续函数．但是当我们考虑一个很小的圆周时，在圆周上的所有箭头将指向大抵相同的方向(6)，因而其转周数不是 1 而是零．这个矛盾证明了没有不动点的假设是站不住脚的．

变换一样．从而问题变成：由 $f(x)$表示的变换是否有不动点？这样的依赖于时间的函数必须看作一个无限维空间中的“点”(因为这里讲的 x 表示一个物体而不只是一个点的位置，而是位置作为时间 t 的函数．函数一般不能用有限维空间中之点来表示，因此是无限维空间中的点)*．问题是要弄清楚这种包含着未知函数的方程是否有某种指定类型的解，为此我们要求不动点定理甚至对无限维的曲面仍成立．

* 译注：这一段话是译者加的．



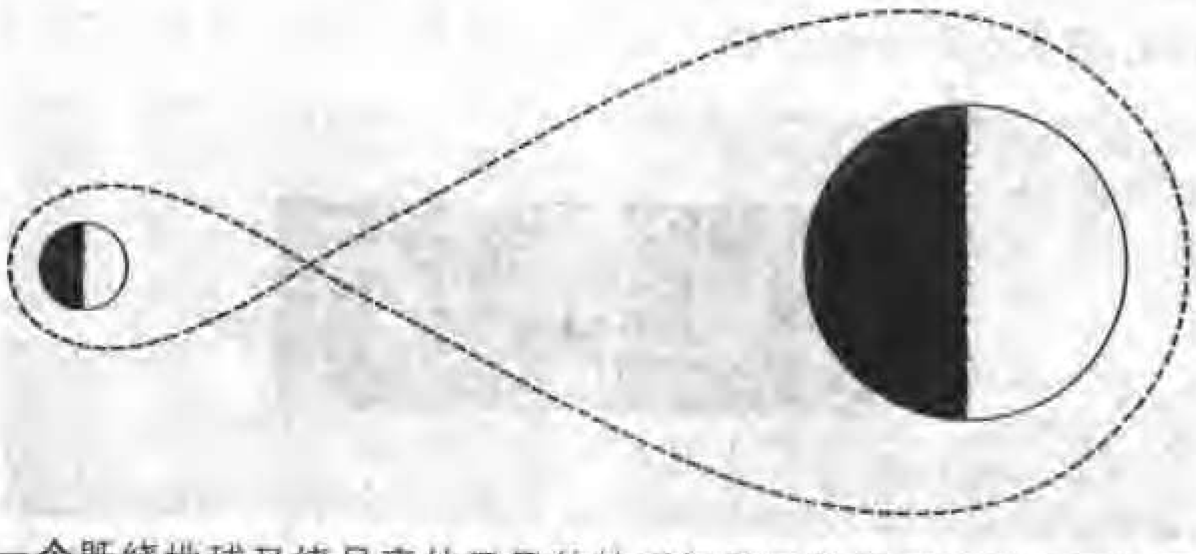
凸性是保证在一个区域不动点定理成立必须满足的两个条件之一(另一条件是有界性). 一个区域是凸的,如果连结它的任何两点的线段上的点都含于此区域内. 左边的两个圆盘并不是一个凸区域:如果你交换它们的位置,所得的区域的变换是没有不动点的. 右上图是一个环域,它也不是凸的. 环域的旋转使每个点都移动. 右下的圆盘是凸的.

这种轨道的方程也可以用其他方法来求解;事实上,通常情况下可以用一些不直接涉及不动点定理的方法来解它们. 不过,在我们所知道的方法中最有威力的是直接与无限维不动点定理有关的方法. 因此,许多物理问题只有用到了不动点定理的解法,这毫不令人惊奇. 流体的问题经常属于这种类型. 考虑一条溪流的河床,其底部周期性地上升下降如正弦曲线(见 250 页中图). 有没有可能当水流过这种河床底的时候水流表面展现出如同底部类似的一般的周期性,或者每一种水流必然是非周期性的? 答案说,表面可以是周期性的. 这提出了一个进一步的问题:能否表面的最高点和最低点正好位于河床底部的最高点和最低点的上方,或者它们往上游或者

往下游移动了一点？不久前证明了，可以有这样的水流其表面的最高点正好位于底部的最高点上方. 为了证明它，除了高超的不动点定理以外没有别的办法，而它对于所论及的简单曲面例如一个平面又不容易想像.

不过，有一个不动点定理能够很容易在有限维空间描述，并且在无限维情形仍保持正确. 我们来描述这个定理是如何应用于平面的，平面当然是一个二维曲面. 设 P 和 Q 表示平面上的点. 如果平面由拉伸，扭曲和折叠部分或全体而形变，这两个点 P 和 Q 被变换为由形变过程所决定的两个新的点，因而是 P 和 Q 的函数. 我们记此函数为 f，因此，P 变成点 $f(P)$ 而 Q 变成点 $f(Q)$. 如果，变换后的两点 $f(P)$ 和 $f(Q)$ 之间的距离总是严格地小于原来两点 P 和 Q 之间的距离的一个真分数*，则此变换称为一个压缩. 有一个不动点定理说，每个压缩必有一个不动点；换言之，在任何压缩作用之后必然有一个点位于原来的位置上.

这个定理的证明不难想像（参见 250 页之下图）. 当发生一个压缩时，原来平面上任意点 P_1 变到一个新位置 P_2. 而我们刚记作 P_2 的那个点则占据着原来由另一个点 P_3 占据的位置. P_3 这个点则占据了原来由一个点 P_4 占据的位置；等等. 因为我们知道所考虑的变换是一个压缩，P_2 与 P_3 之间的距离必小于 P_1 与 P_2 之间的距离的一个真分数. 类似的，P_4 与 P_3 之间的距离小于 P_3 与 P_2 之间的距离的一个真分数，等等. 我们得一个点列 $P_1, P_2, P_3, \cdots$，互相间越来越近. 它蕴涵着这个序列必有一个极限，这就是说所有这些点越来越接近平面上某一点. 这个极限点是该

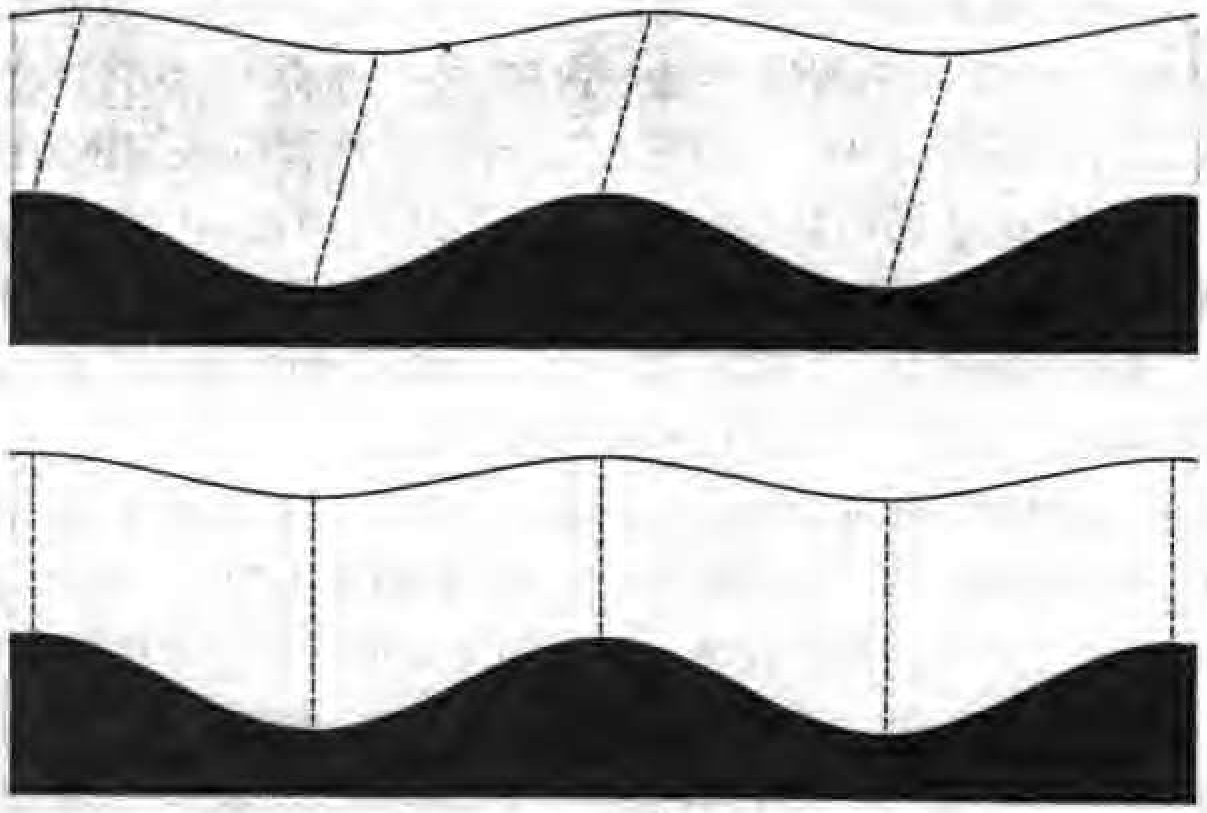


一个既绕地球又绕月亮的卫星的轨道问题是数学家应用无限维的曲面的不动点定理的典型问题. 在任何轨道方程中时间因素使问题成为无限维，致使像布劳威尔定理这类简单定理不适用了.

* 译注："一个真分数"几个字是译者加的. 下同.

变换的一个不动点.

我们已经陈述了压缩的定理,并且概述了对于一个平面变换其证明的思想. 在上面的推理中维数概念并未用上. 由此可知该定理应用于其"点"为时间的函数组成的无限维空间仍然成立.



在河床底部周期性上升和下降的河中某种水流的可能性只能用不动点定理来证明. 直到不久以前还不知道水流是否能够按照底部相同的周期上升和下降. 如今已经证明那种水流是可能的,而且水面的高点和低点能够直接位于底部的高点和低点之上方.

一个曲面的压缩必然产生一个点保持它在压缩之前所占据之位置. 较大的矩形表示原来的曲面,它是一张绷紧的橡皮膜;深颜色的较小的矩形表示这张薄膜松回到它的松弛位置. 我们考虑靠近原来的矩形左上角的点 P. 压缩后它的位置我们记作 P_1. 原来在 P_1 处的点移到新的位置 P_2. 原来在 P_2 处的点移到 P_3,等等. P_2 与 P_3 之间的线段比 P_1 与 P_2 之间的线段小. 事实上 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ 形成一个序列趋向一个极限:不动点.

每个压缩不仅有一个不动点；而且它只有一个不动点. 其证明很简单. 设 P 和 Q 是压缩 $f(P)$ 的两个不同的不动点. 如果事情是这样，我们应当有 $P=f(P)$ 和 $Q=f(Q)$. 现在考虑 P 与 Q 之间的距离. 因为这两个都是不动点，它们之间的距离应当是与 $f(P)$ 和 $f(Q)$ 之间的距离一样. 但是，根据压缩的定义，$f(P)$ 和 $f(Q)$ 之间的距离必须严格地小于 P 和 Q 之间的距离的一个真分数. 这就是说 P 和 Q 之间的距离小于它自身，这是一个矛盾. 这个矛盾证明了最初的假设 P 和 Q 是两个不同的不动点是站不住脚的，从而证明了只能有一个不动点.

每个压缩有一不动点这一事实常常用来证明微分方程（牛顿第二运动定律 $F=ma$ 是其中一个例子）有解. 并且如我们已经见到，这种方程可以只有一个解. 这建议人们关于压缩不动点定理的一个很实际的一个推论：在任一力学系统中，无论它是月亮和地球，或者一个摆动的摆，该系统的运动是完全被其初始位移和速度所决定.

这方面伟大的法国数学家和天文学家拉普拉斯（Pierre Simon de Laplace）贡献极多. 在他的论文《关于概率论的哲学探讨》中拉普拉斯以此作为下面议论之基础："在某一瞬间设有一个有智慧的存在物，它能理解使自然界由之而生机勃勃的所有的力，又能知道构成这个自然界的一切存在物的情况——这个智慧又是如此广阔无垠而能对所有这些数据进行分析，并把宇宙中最大的物体的运动和最轻的原子的运动包容于同一个公式之中；对于它，没有任何事物是不确定的，将来，同过去一样，将呈现在它的眼睛里."* 有关于决定论的教义大概不存在更为确定的叙述了. 它一个多世纪来似乎不可辩驳地屹立着，直到热力学和量子力学的出现才与它发生矛盾.

这一场有关不动点定理的讨论阐述了数学的一个特征现象. 一个纯粹几何的观念——一个平面或一条直线的一个变换的不动点的概念——通过类比推广，可应用于力学和流体力学的问题，并且最后应用于决命论的哲学问题. 虽然想要坚持说哲学的所有要点都基于数学，这是很难的，但是的确现代数学，如我们所描述的涉及几何，代数与分析观念的互相作用，确实可供哲学之用.

---

* 译注：参看本书第 6 章，拉普拉斯传.

22.

机 会

艾也尔(A. J. Ayer),1965 年 10 月号

"机会"一词通常有不同的用法.在本文中我想做的事情之一就是把它们整理清楚.这些用法中的大部分中,不说是全部,"机会"是"概率"的同义词.因此以下的说法,如:用一对没有假的骰子抛出两个六点的机会是三十六分之一;又如说某一个未出生的婴孩将会是个男孩的机会是比一般情况稍微多一点;又如说现在就使英国与共同市场*联合,机会很少.所有这些说法都可以认为是表示概率的判断.

然而应当注意,上述例子的每一个各阐述了各种不同的概率判断.头一个例子是通常所谓的先验的概率判断:它关系到机会的数学计算.第二个例子是统计判断:它估算某种性质分布在一个给定类的成员中的实现频数.第三个例子,因为还没有一个好一点的表述法,我把它称为可信性的判断:它给我们对某个命题的真实性或者对某个特殊事件的发生的信心的程度的估计.

虽然这些概率判断的每一种都可以正确地说成是对机会的计算,但是头一个类型的判断与机会的概念是最为密切地联系着的.因此,人们所知晓的机会对策的特色是:其结果本质上是与先验概率一致的.从而我们的第一个问题是试图弄清楚,确切地说,这句话意味着什么.

机会的计算

谈及这个问题时,应当记住最重要的一点是:机会的演算是纯粹数学的一个分支.因此它提

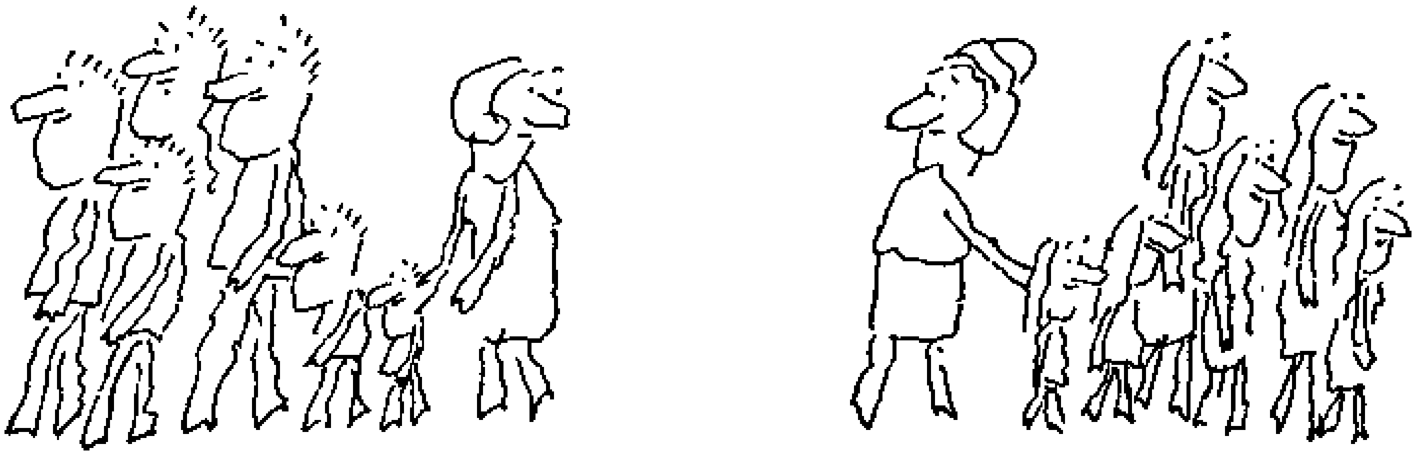
---

* 译注:即指现在的欧盟.

出的命题必须是正确的. 这一点有时会变得使人费解，因为下述陈述如"用一个没有偏向的硬币抛出正面的机会是一半"有不止一种解释. 一个无偏向的硬币(或者一个没有假的骰子)可以用物理学的术语定义为一个用如何如何的金属材料构制出来，并具有重心在如何的位置上. 在那种情况下，这些陈述都是统计的；它们的真实性依赖于用适合这些物理约定的硬币或骰子所得结果的实际频数.

然而，通常人们理解的一个没有假的骰子或者一个没有偏向的硬币那就是一个能得到与先验概率相一致的结果的骰子或硬币. 当我们的例子这样解释时，它们便成为初等算术的陈述了. 预先假设了一个硬币有两面，并且当它被抛掷后，落下时两面中有一面朝上，我们说它是一个无偏向的硬币，就是指正反面出现的机会是公平的，就是说都是二分之一.

不是所有的有关机会的计算都如此简单，但是原则是相同的. 例如，当说到用一枚无偏向的硬币连续三次抛掷完全为正面向上的赔率为七对一，那是说两个数 1 和 2 的所有可能的有序三元组——如 121，211，212 等等——中 111 只是八个中之一. 如果我们推广这一点，并且说连续 n 次抛掷完全为正面向上的赔率为 2^n-1 对 1，我们说的是数 1 和 2 的所有有序 n 数组中，n 个 1 构成的序列是 2^n 个可能中的一个.



不存在这种意义下的计算机会的法则，而此法则能指示在某个情况下事件出现的样式.

现在，当 n 增加时显然数值 $1:2^n$ 在减少. 我们通常说的：在一个长过程连续得正面或反面或者在一个长过程的轮盘赌中老是得红或黑是非常不可能的，就是这个意思. 如果在任何给定的一次中不论某个结果在初始时出现的分数是多少，n 次连续获得这结果的机会必为此分数的 n 次方. 这里恒假定前后各次是相互独立的. 这又是一个简单的算术命题. 唯一的经验假设是：轮盘赌事实上是一个机会博弈——换句话说，可以构作和操作一个对象，如轮盘赌的轮子，使得机会的计算近似地满足这样的结果.

应用此计算于这种类型的赌博时必须特别注意每一轮赌博是互相独立的假设. 否则，你会发现你落入了著名的蒙特卡罗佯谬. 在这个例子中下面的说法就是这个佯谬：即认为，若第一次抛硬

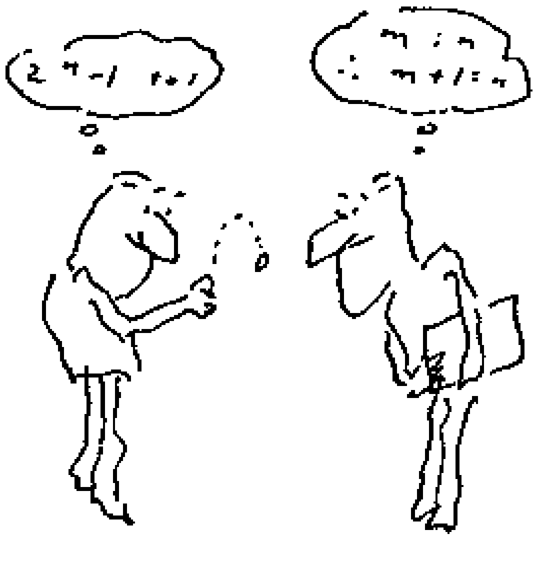
币得到正面或者轮盘赌中出现红色，则下一轮中反面或黑色出现的可能性会增大．如我们刚刚看到的，用一个无偏向的硬币连续抛出 n 次正面或者在轮盘赌中 n 次出现红色的机会当 n 很大时都是很小的；例如，连续抛 10 个正面的赔率大于一千对一．赌徒们时常爱作如下的推断：如果 n 按这个标准是一个大数，并且正面已相继发生 $n-1$ 次，则第 n 次它不再发生的机会也必然会大些．因此，一位轮盘赌者当他已经看到红色相继发生九次后将多半投注黑色．这就是蒙特卡罗佯谬．

然而，这个推理是荒谬的．方才说在一个长过程中得红色是几乎不可能的，这个计算是基于这样的前提：轮盘的每一次旋转是独立于其他各次旋转的，因此出现红色的概率——或者，在硬币的情形出现正面的概率——在每一次都是相同的，而不论前一次旋转或抛掷是什么结果．甚至假设抛掷一个无偏向硬币一百万次已经得到每次都是正面，其赔率已是天文数字，而下一次抛掷得到反面的机会仍然不过是一半．

许多人难于接受这个结论，因为他们没有认识到，这种机会的估算就是估算各种抽象的可能性．说一百万次连续掷得正面的赔率为天文数字只是说，如果我们列出所有可能的百万项正面和反面序列，那个由一百万次正面组成的序列只是从一个天文大数字的不同的序列中选出的一个．说在第一百万零一次时得反面的机会不会大于 1∶2恰恰是说在这一次，正反面各方仍然各占一半．

你会遭到反对说，如果我们设身处地把自己当成一名赌徒，他必须押注，那就不会是如此清醒地认识到蒙特卡罗佯谬是荒谬的．如果他抛掷的硬币是无偏向的，从而按定义它出现反面与它出现正面的可能是一样的．因此，如果在抛币系列的某个阶段硬币的两面之一长期的出现破坏了均衡，则另一面必将出现得更为频繁，以恢复均衡．确实，一个赌徒会合理地追随的过程应当是注意两个面曾经出现的相对频数，并且支持落后的一面赶上去．

有关这个看法的答案是：它的确会是正确的方针，如果这位赌徒有根据做以下的假设，存在着某个有限的抛掷次数，一个他能原则上规定的次数，在这个次数之内正反两面出现次数将达到相等．然而，假设的这个命题既不能从机会的计算也不能从硬币是无偏向的事实中推导出来．如果那位赌徒能够知道硬币按这里讨论的意义是无偏向的，那么他将知道当这个抛掷系列充分地延续下去的话，正反面的相对频数的任何失衡都将被纠正．不过，只要对他继续抛币最终的次数不设置界限，那么，关于应当如何押注的办法，他就得不出结论．他只能说，如果已有的正反面的比为 $m:n$，则下一次掷币后的结果将会是 $m+1:n$ 或者 $m:n+1$．不论 m 和 n 这两个数是什么，也不管其中之一超过另一个有多少，只有这两个抽象的可能性存在．就机会的计算而言他没有理由在这两个可能性中一定



赔率是基于理想硬币．

要选择哪一个.

用一个例子可以把这一点弄得较为清楚：从通常的一叠纸牌中抽出纸牌来. 因为红牌数与黑牌数相等而且有限，若一张牌被抽出而不再放回时，显然当红色牌已经被抽出得比较多时，则下一张牌为黑色的机会较大. 如果，换个做法，抽出的牌放回去，那么这正像是每次都是重新开始抽取，因此不管红色牌已经被抽出了多少次，下一张被抽出的牌为黑色或红色的机会仍然是一半. 蒙特卡罗佯谬于是可以说成是把每次抽取后再放回去的牌戏当成为不再放回去的牌戏.

但是必须记住，用这种方式谈论机会，并不说的是将会实际发生什么；它不是做一个可信性的判断. 若轮盘赌者在实际施行时观察到红色出现的数目远比黑色频繁时，他可能做出结论，认为轮盘有偏向或者赌桌上收钱人已经用了某种不公平的转盘办法. 因此，他明智的做法是认为每次赌红更好.

不论他采取何种观点，他必须信赖某些经验假设. 或者他假设在轮盘上没有作假(所谓没有作假就是其操作满足机会的计算)，或者他假设轮盘是有偏向的，二者一样是经验的假设. 这些假设是经验的因为它们都是涉及某些物理对象的实际性态. 问题是，是否可能制出某个特别的轮盘，硬币，骰子，纸牌，或者任何别的什么东西，并且可以这样操作，使得如果若干种同等可能的不同情况中的任何一个出现的频繁程度一定与另外任何一种出现的频繁程度一样. 这样，当结果表明发生了特别的情况——意思是硬币的一面，骰子的一面，纸牌的某些数组或某些分布是特别优先——这便是一个预兆，或许预兆这个偏向将继续下去，或许预兆应将它纠正. 这不是一个抽象数学的问题，而是事实问题.

与概率之偏离可能会改变.

真正的情况是，如果理论上游戏时间不受限制，则它是公平的这个假定是无法反驳的. 不论发现了多么大的偏离，仍然可以相信它们将在以后被纠正——或者至少是，在充分长的时间以后，这种偏离会得到纠正. 尽管坚持这个假设没有任何逻辑上的不相容性，但到了一定时刻这个假设会变得不再可信了.

计算的应用

到现在为止应当清楚的是，对于事实问题，机会的计算推导不出来任何结论. 不存在这种意义下的机会的法则，使得按这种法则可以直接得出某些事件的模式. 关于机会计算法则的命题

本身是数学的真理. 我们从这些命题可以得到的是:如果我们设想有关某个性质的分布有某比率成立,则我们必可得出,对另外的比率也有某种结论成立. 如果一对骰子中的每一个都有六个面,并且每个骰子的各面分别刻上一到六,并且在每一情形当骰子抛掷一次时每一面出现的频繁程度与另外任何一面一样,则抛掷两个骰子出现数字之和是八为的情况只占 36 种情况中之五种情形. 换句话说,两个骰子抛掷一次总共得八点的赔率小于七比一.

然而,这个说法会引起误解,因为所论的命题仅是关于数的一个命题. 在概率论的解释中提及骰子,硬币,纸牌或者轮盘是完全偶然的. 这些对象只不过是模型,它们的功能只是乔装打扮起来具体解释数学理论. 说它们只是模型的证据在于,它们完全不能影响自己打算解释的命题. 问题是它们是否符合于理论,而不是理论是否符合于它们.

假使有某人怀疑在抛一对骰子时得八点之赔率会大于七比一,并且决定用试验来测定这个问题. 进而假设他发现,抛掷数千次后的结果记录他这一对骰子得八点的次数之比为五分之一. 他究竟证明了什么? 可能至多证明了他的骰子有偏向;充其量说明这次抛掷骰子不是以前所认为的那样的机会事件,而与概率论没有任何关系.

机会的计算的命题不能用经验来检验,由这一事实当然并不能得出结论,说它们没有实际的应用. 为了能够成功地应用它们,我们要求的是要证实事件的一组可能的状态满足下面条件:(1)它们的数目有限,(2)它们相互排斥,(3)它们在逻辑上相等,我将在下面解释这句话的意义. (4)它们出现的频数至少近似地相等. 当所有这些条件满足时,则事件的每一状态可以说成是等可能的.

我们说的所论事件的状态必需在逻辑上相等,意思是每一状态必须与任何另一状态在同一水平上作为一个整体来处理. 这个处理不排除它们都是复杂事件,即指它们可以由许多可能情况组成. 如果这一组事件中的任一件被表示成这类子可能性的不交之并,我们不允许把这些子可能性自身也当作该组事件之一. 否则我们将发现我们会陷入矛盾之中.

举例来说,有些作者曾经认为,当我们没有证据证实或反对一个给定的命题时,我们就有权假定它是对或者是错具有同等的可能性. 于是,假设我正在做从一个口袋里摸出弹珠的游戏,并且按这个原则,我认为第一次摸出将会是蓝色的这件事是成败机会各半. 如果这样去打赌,则这是一个愚蠢的假设. 但是只要我把非蓝作为与蓝是同一个水平上的单一颜色来看,这样假设并不会引起矛盾. 然而,如果我按自然的做法将非蓝分解成为其他颜色的不交并,例如分成红色、绿色、黑色等几个子情况,并且仍然按推理之平等性,认为第一次摸出将会是黑色的是成败各半,红色的也是成败各半,绿色的还是成败各半,等等,这样我便陷入了矛盾. 如果存在超过两种以上的可能性,它们的每一个是否实现都成败各半是不可能的. 这又是一个简单的算术问题. 一不等于多于两个一半之和.

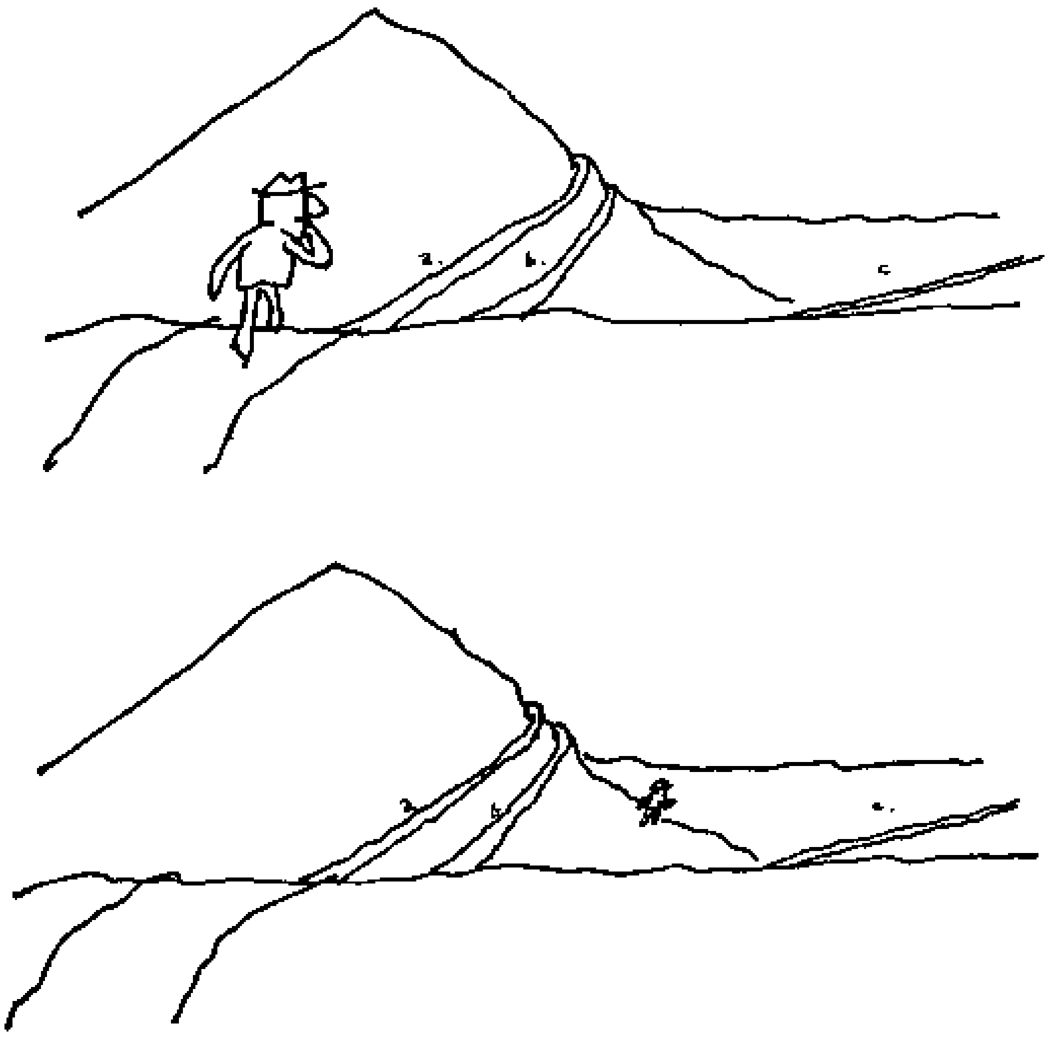
为避免这一类的矛盾，我们必须在一开始就决定哪些可能性将被认作是逻辑上相等的，并且此后一贯地坚持这个决定. 正如加州大学洛杉矶分校的卡尔纳普(Rudolf Carnap)在他的《概率论的逻辑基础》一书中所证明的，能够在纯粹语意学的基础上作出各种情况是否成败各半的决定. 我们就能够构作一个语言，它具有有限个原始的述语并能谈论有限个个体；然后我们能够在或多或少任意的方式下决定，哪一些由这些事态能够描述的状态可被认为是等可能的，并且我们能够如此地选择我们的逻辑运算使得在我们所选择的议论的空间里，能够在此基础上对这些可能状态的概率进行计算. 然而这个程序应用太窄；此外，没有理由去假设我们有关等概率的判断将与任何实际发生的事情相吻合.

在另一方面，如果我们遵循一个较为宽松的做法，依赖于一些特设的估计似乎公正地把某些事态认为是等可能的，这样我们又会走到这样的情形：某些看起来同样合理的决定，将导致相矛盾的结果. 我从伦敦大学学院瓦特灵(J. L. Watling)的一篇文章中借来一个简单的例子. 假设"我们跟着一个人沿着一条路来到一个地方，在那里道路分成三条，两条小路登上山坡，一条进入山谷". 我们已经看不见那个人了，也只知道他选择了三条小路中的一条，其他一概不知. 我们将如何估计这人会选择位于山谷中小路的概率？如果我们遵循经典的做法，对等可能性事件规定相等的概率，并且如果我们认定那人选择三条小路中任意一条是等可能的，我们将必然得出他选择山谷中小路的机会是三分之一的结论. 但是我们同样可以认定他将走下山谷或者走上山坡为相等可能，那么在这情况下将会推得他选择山谷小路的机会是二分之一. 这些结论是相互不相容的，但是由于缺乏进一步的信息，两者之间你无法取舍(见 258 页图).

瓦特灵用这个事例来证明概率论的"经典解释"是不相容的. 我则宁愿说在这类情形中"经典解释"是不可操作的. 机会的计算本身不应是不相容的. 只要我们有一个相容的规则来决定事物的哪些状态算作是等可能的，其计算就能够相容地应用. 然而，如果希望这种应用对我们有些用处，例如用来帮助我们对于实际发生什么事件打一个赌，我们就不能允许只依赖于一个任意的决定来指定最初的概率. 在上述例子中，如果我们只知道那人将在三条小路中选择一条，我们就无权假设他在三条小路中选择任何一条是等可能的或者他选择下谷或上山是等可能的. 在我们能够做出任何这类假设之前，我们必须获得进一步的知识，而不只是依靠其中第一个概率是$\frac{1}{2}$而第二个概率是$\frac{1}{3}$这种乏味的算术事实. 我们需要某些实际的信息，诸如该人的习性，以期为机会的计算提供在现实中的立足点. 一般来说，我们不能假设事物的任何两个状态是等可能的，除非我们有理由相信它们以相等的频数发生. 但是纯粹数学不能告诉我们任何有关实际频数的情况，语意学也不能. 我们必须依赖实验的证据.

这个论争的结局是：当我们想要应用机会的计算时，我们对于概率的判断性质已经发生了

变化：它们变成统计的判断了. 正如我们已经看到的，说一个真实硬币在三次连续抛掷中每次都得正面的机会是八分之一，这只是一个数学真理的生动说法，但是说这个判断也可以适用于我手中的那个硬币，则是做出了一个实验的陈述. 如果它被抛掷了相当多次，并将其结果按三个一组来表示，我们会发现序列正——正——正的出现，平均来说八次中有一次. 这其实是下述更一般的假设的推论，在充分多次抛掷此硬币的过程中，在一个给定抛掷次数之下，同样长度但互不相同的可能的序列，出现的频数平均来说是一样的.



那个人将选择三条小路之一的概率是多少?

然而，我们这里面临着的困难是，除非对试验次数设置了界限，而且在这个界限内等可能性确能实现，否则支持这样一个假设的实验证据必然是不完全的. 甚至即令设置了一个界限，而且我们原则上可以把这个界限之内的试验一一做完以便作出关于概率的判断，除非完成了这一切，这种判断才对我们有某些兴趣. 但若我们已经知道一个给定的事件已经发生或者没有发生，我们就不必揣测它的机会了. 搜集统计数据的要点是将已有的数据外推.

样本和类

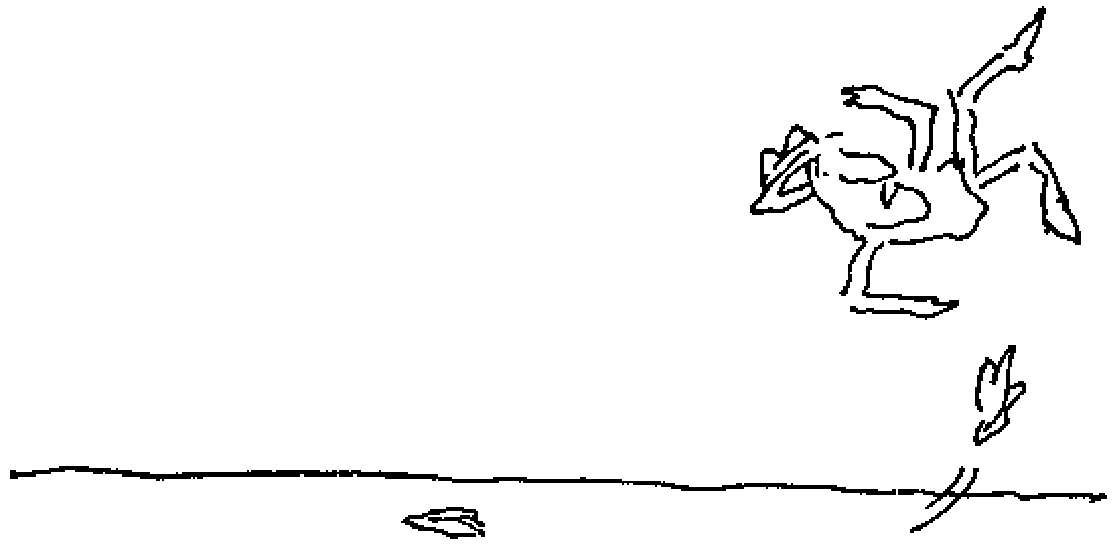
换一个说法，我们通常审查的只是我们感兴趣的事件的一个总类中的一个样本；如果我们发现我们所探查的性质按某个比例分布在这个样本的所有成员中，我们推测它将以同样的比例分布在另外一个样本甚至遍及整个这个类的所有成员上. 不可否认的是，如果我们去抛掷我们的硬币 50 次，并且发现正面出现的比率为三比二，我们不应该自以为是地认为这是一个典型的样本. 由于缺乏物理证据说明该硬币是有偏向的，我们可以期望如果抛掷的过程继续下去，正反两面出现的频数将会恢复平衡. 但是这个期望的理由是我们受到我们下述知识的影响：与这一枚物理上相似的硬币抛掷以后出现正面与出现反面几乎一样频繁. 在这种想法之下我们会被引向更为宽广的统

计领域，但是我们仍然找不到证据．事实上我们应当从有关正面和反面分布的一个普遍假设出发来做出推论，这个假设则是早已从我们有关相当大的样本中它们的分布的知识导出的．

问题是如此的一个过程怎么能够是合理的．通常的答案是从一个样本的特性推断此样本取自的整个类或其所有成员的特性．由大数定律（假设该样本是充分大的），这在逻辑上是合理的．我不打算给出这个定律的数学陈述和证明，这些可在标准的教科书中找到．它告诉我们，如果某个类的成员中具有某种性质 P 的比例为 $m:n$，并且我们从这个类中选取给定的大小的所有可能的样本，必然会出现这样的情况：大多数样本中，性质 P 在其成员中分布的比例也位于 $m:n$ 的邻近．此外，当样本的大小增加时，围绕 $m:n$ 的集中程度也增加．结果如果样本变得充分大，P 在所有样本之中实际出现的频数将与母类中它出现的频数相差到可以忽略的地步．

表示这个事实的一个通常的办法是说，很可能是这样的，在一个给定的类中，一个性质的分布差不多精确地反映在从该类抽取的任何一个大的样本中；并且因为如果 A 匹配 B 则必然 B 匹配 A 也正确，从而如果一个性质在一个大样本（A）中的分布是按如何的一个比例，则它以近似相同的比例分布在该样本由之抽取的类（B）的成员中，这也是很可能的．大数定律就是因为这个熟悉的推理型式而被认为是得到了证明．

然而，需要指出通常被忽视的一点．当在这个意义下说，若某事情在一个大样本中为正确是



相信他会违反概率的信念可能被弄错了．

高度可能的，则此事在母类中也是正确的. 概率论的这个推断属于我们的三种类型的第一种. 这不是可信性的推断，而只是有关逻辑可能性的分布的推断. 事实上这个论断所说的只是：在所论及的大小的所有可能的样本中，与母类的情况大约相同的样本数目远远大于那些不相同的样本数目. 由此推出，如果我们的样本关于某个性质而言，与它所由抽取的那个类中严重地不实，它便是高度地不典型的. 我们所能推断出的仅此而已. 甚至于说这个样本是不典型的也不意味着它偏离实际抽取的样本中的大多数，而只意味着它偏离绝大多数可能的样本. 从大数定律中能得到的推论最多不过如此.

但是，是否取自自然界的样本真正可能是不典型的？这个问题的麻烦在于它偷偷地带入了可信性的推断，而这种推断尚未有任何根据. 如果我们关于宇宙的构成做出适当的假设，我们可能是为自己提出了一些前提，由这些前提可以演绎出：我们的样本是公正的. 然而，这些前提自身还需要被验证，而除了诉诸我们的经验以外我不知道如何验证法. 因此，正如休谟（David Hume，1711—1776，苏格兰哲学家）已经看到的那样，我们陷入一个循环论证之中，因为在诉诸经验时，就已用到了我们企图去验证的那些假设. 我非常倾向于认为这个循环论证是不可避免的，但是把这个讨论深入下去将把我们带到归纳问题之核心，这里我不想来深入探讨.

正确的使用

上面，我曾尝试说明，虽然大数定律自身没有什么不妥，但它对于从概率进行逆向的推导所提供的支持——即一个大样本不会严重偏离其母类这种推理——其实并不如通常认为的那样可靠，而要不确定得多. 然而，有一类情况在其中这个类型的推理可以完全可靠地应用. 这类情况是：我们在其中所论及的类是有限的并且其未经检验的部分相对而言是非常小的. 假设我们知道在一个给定的地区内和一段时期内的出生总数，但是我们有关性别的统计是很不完全的. 于是，设缺乏信息的类所占比例比较小，比如说小于百分之三. 在这个例子中，不论在我们的样本中男性新生儿之比例是多少，我们可以相信在整个类中其比例不会与它相差很多，这是因为不存在足够的未被检验的例子足以造成严重的差异. 即令假设所有未被检验的新生儿均为男性或均为女性，我们也可以划定了一个很窄的范围，而有关整个类的正确答案必位于其中.

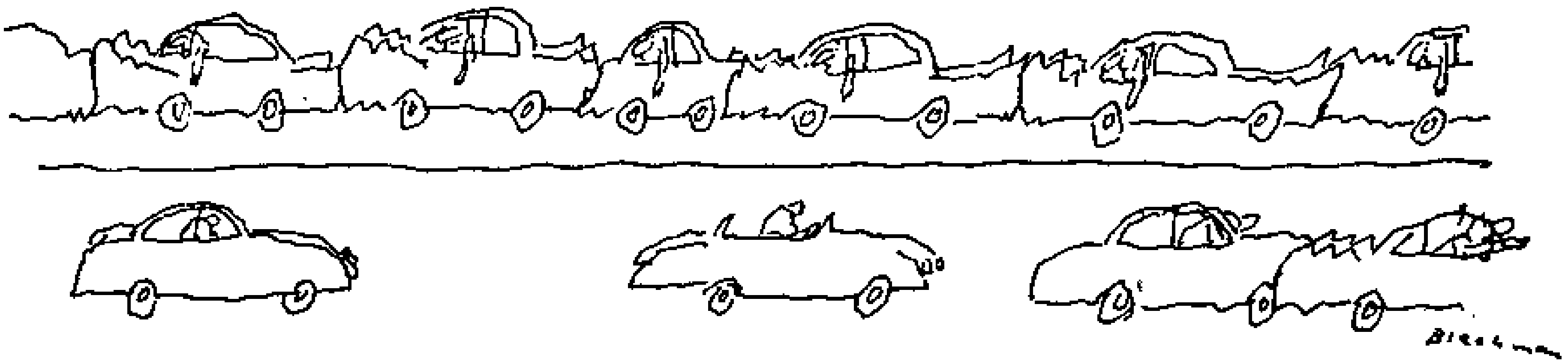
然而，我们现在发现，正是这个结论的安全性使这个结论本身几乎毫无意义了. 它告诉我们的并不比我们已经知道的多. 将要当父亲的某人希望知道他的孩子较可能是男孩或是女孩，即令已知新生或生下不久的孩子中男孩比例大于百分之五十，他从这个统计信息中什么结论也得不到. 他所得到的只能是：至今为止的数据已达到的程度，不会对他的孩子到底是男是女的最终

百分比造成明显的改变. 他不仅不能推演出任何有关自己孩子的性别——因为概率判断在频数意义下,谈论的是类而不是个体——而且也不能推演出任何有关至今尚未检验的子类中男性新生儿的频数,他自己的孩子就属于这个子类.

事实上,已经发现新生儿中男性与女性之比相当定常. 因此如果统计已经说明当年到那时为止已经出生的孩子女性较多,那位未来的父亲如果知道正常情况下男孩的比例会多一点时,他会更倾向于期望他的孩子将是一个男孩. 这就是相信人们通常说的平均值定律的结果. 但如果他确实这样想,他很可能会失望. 一般都没有认识到,平均值定律只能演绎地使用. 就是说:如果在一个有限的事件系列中有关某个性质的分布方式,我们已经知道其最终的百分数将是什么,并且如果我们也知道在此系列的已经经历过的一部分中,该性质出现的百分数是什么,则我们能够算出将继续出现的实例之百分数.

然而,这种情况带来的结果是,仅当有建立得很好的统计定律作为依据时平均值定律才能完全可靠地应用. 也许我们可以根据孟德尔的遗传定律来确认,如果一个隐性特征在某个植物或动物家族的给定的一代中已曾出现,则所论及的这种特性将会成为显性的,并在同一代中将由家族的其余成员表现出来. 从另一方面说,如果有人争辩说,因为在当年汽车事故总数已经升到前几年的平均值,所以他可以随心所欲地鲁莽地开车,因为平均值定律将保证他的安全,那他一定是一个傻子(见下图). 他是傻子的理由是,不仅我们并不知道汽车事故的发生服从某个稳定的统计定律,而且大部分这种事故虽然在某种程度上可归结为共同的原因,但它们都是相互独立的. 你的邻居中最近已经发生过一批事故这个事实并不会降低今天再发生一次这种事故的可能性——当然,如果知道了这些事故已经使得人们开车时更加小心了,则当别论. 当然,发生另一个事故的可能性并不会由于平均值定律而减少.

相同的推理也适用于未来的父亲这个例子,尽管出生统计数字有很大的稳定性. 无论什么因素会决定他孩子的性别,没有理由相信和他没有血缘关系而只是出生在同年的其他小孩的性别与他的这个孩子的性别有任何关系. 由此可见,如果女性出生已有一个不寻常的优势,他应当



事故数目的上升并不意味着以后事故将会降下来以保持统计平均值不变.

做出的推断并不是:他的孩子更可能将是一个男孩;而是:由于多方面的原因,这一年性别的通常平衡已经被打破.

关于机会的若干问题

我们已经看到,为了应用机会的计算,要求有一个逻辑上等可能性的事件的一个有限集合,它们会在长过程中以相等的频数实现. 正是因为我们假设至少在玩硬币,骰子,纸牌或轮盘赌游戏时这些条件被大体满足,我们将它们称之为机会博弈. 反过来,如果我们来玩这些游戏之一,并发现在一个特别的例子中,不同的可能性决不以任何类似于相等频数的出现,这时,我们可以确定其结果不能被归为是机会. 于是我们来寻求某些其他的解释.

这个过程不仅在赌博游戏中起作用. 经常当我们说一个统计结果有重要意义时,那是说它并不是一种机会,因为它与先验概率不吻合. 有关这一点的一个好的例证是为了证实特异功能的存在而设的一个试验(见 263 页插图). 一个典型的试验可以这样做:用一组用标上了 1 到 5 的数的纸牌,再取另一组五张纸牌分别标上狮子、大象、鹈鹕、斑马和长颈鹿. 两副牌都洗过;试验者从标数的纸牌中抽出一张牌,然后他按抽得的数字去从标动物的那副牌中抽出对应的那张牌. 这个过程重复 100 次,每次之后纸牌都要放回去并重新洗过. 每一次我们都请他说说从那副标了动物的牌中会抽出哪个动物来.

假设他只是靠猜测,就能平均每 100 次猜对 20 次. 然而,某些时候一个人相当经常地能猜成多至 28 次. 而这个结果又很不可能被认为是统计上重要的. 这时,人们就会推断此人的成功不能归之于机会,而认为他具有特异功能. (我们承认,谈特异功能并不是给出那人的表演一种解释,而仅仅是宣称:需要一个解释. 但这与我们现在的讨论无关. 我们唯一关心的事情是:说某件事情并不是按机会发生的,这句话的意义是什么,又蕴含了什么.)

让我们更仔细地考查一下这个案例. 如果那个人没有超凡入神的预测能力,为什么他还能在 100 次中抽中 20 次? 答案是如果我们把从这副牌中抽取 100 次的每个可能的序列都列出来以及又把猜 100 次的每个可能的结果也列出来,则两个选择相一致的情形,即猜对了的情形,比例是每 100 中占 20. 说猜对 28 次是很不可能只是说在 100 次可能的抽取和可能的猜测,两个序列的总体中,两者相同者竟然达到 28 次之多,这样的比例是很小的.

值得注意的是这两个计算都是先验的. 它们与逻辑可能性的分布有关,而根本不是从研究实际发生的事物后导出的. 那么为什么期望实际猜测与实际抽取相匹配之比例应与一切猜测与一切抽取相匹配之比例相同是没有意义的——只是一种期望而已? 为什么又认为相匹配之比

例离出了 8 个百分点就是很不寻常的事呢？为什么实际相符之比例与可能相符之比例有偏离，比之二者彼此一致更值得注意呢？我们必须假设的是：这一类猜纸牌的游戏的自然规律是每一可能的组合在这两个序列中以相等的频数出现．我们有什么理由对任何试验都事先做出了如此的假设？我实在看不出有什么理由．

如果关于此事我是正确的，我们也不能因此就假设，只当与先验频数有偏离才有待解释．与它一致也必须说明．事实上，在很多情形似乎人们已见到了这种必要性．如果一个硬币，一个骰子或者一个轮盘赌得到“不可能”的结果，而特别偏袒骰子的某一面或轮盘的某一区域而牺牲其余的，我们的确会假设有某些物理的偏差在起作用：这个硬币是附了重的；其重心移位了．同样，我们认为当那些事物正常运行时也有待物理解释．为使骰子和轮盘运转时，在一个相当长的过程中，每个数字出现的频数与其他数字一样，这也是一个很不平凡的技艺．它是有物理的理由的，正与下述情况有物理的理由一样．此情况即一个数或一组数出现的频数较之其他的要多得多．如果我们把机会与设计相对立，或者说一个机会事件就是一个我们没有指定原因的事件，则这些操作服从机会的法则也并非偶然的，即并非根据机会．

于是，在诉诸经验之前，我们没有理由期望抛掷硬币或扔骰子的结果符合于先验的概率，也没有理由期望二者偏离．我们之所以认

抽取纸牌时表面看来像是特异功能，其实可能与另外的因素有关．

为在这种意义下，高度不可能的结果需要特殊的说明，其理由是：它们按照经验是反常的. 重要的不是偏离了先验的频数而是偏离了已被经验肯定起来了的频数. 当一个骰子偏离时我们特别感兴趣，是因为按经验我们发现大多数骰子的行为是正常的.

我相信这也可应用于其他情形，在其中我基于纯粹统计学而断言如何如何的一个事件是不能归之于机会的. 假设有一天不管我走到哪里我总碰到同一个陌生人. 我很可以断定说这不是一个机会的事情，那个人想必是跟踪我. 但是我关于这事的论断的理由，并不在于我们如此频繁相遇是先验地不可能的. 当然，我可以推理如下. 先设我们两人都在某个限定的区域内活动，我可以设想这个区域被分成有限个相等的正方块，像一个象棋盘，再设我们两人中的每一位在当天的每一时刻以同样的可能性出现在这些正方块之某一块中. 于是结论说我们并非按照机会相遇我的理由是，在我们每个人特别爱走的可能路线之中，那些在几个地方相交因此我们可能碰见的路线的数目仅占一个很小的比例. 而我们竟然见面了，可见并非仅由于机会. * 不过，对我来说不仅我不需要用这个推理来得到我的结论；而且它赖以立足的前提，即棋盘等等，还是完全悬而未决的. 如果假设我们两人在每一时刻以同样的可能性出现在这些方块的任一之中，这只是说这些方块是平等的一个说法，而这种说法也只是按假设是如此然而却并不一定有道理. 如果它意味着经过一段时间发现我们在任一方块中与在任何另一方块中一样频繁，则除非有经验证据，我没有理由接受它. 然而如果我断言这些会面并非由机会而发生，我将需要这样的理由：经验向我证明了当两个人独立地住在一个有许多不同的工作和娱乐场所的大城市里，他们各自做他们自己的事，这样他们在同一时刻出现于同一地点的机会是相当小的，所以我们的见面并非由于机会，即并非偶然. 这儿又一次需要特别解释的不是与先验的频数之偏离而是与经验建立的频数之偏离.

在我看来，这又是同我应当解释的猜纸牌试验的办法一样. 没有理由先于经验而相信任何猜测序列符合任何抽牌序列的程度会反映或者不反映逻辑可能性的分布. 先验已知的是，每张纸牌被抽出的可能性是五分之一，并且每个猜测也是五分之一的可能性，但是由此根本推断不出将实际出现的符合数是什么. 我们必须由实验才能发现某些洗牌和抽牌方法的确导致抽出每张牌与抽出其他的牌的频繁程度一样. 我们也必须经由实验才能发现人们的猜测是均匀分布的；或者如果这不对，比如由于心理学的缘故而在许多例子中可能并不如此，则他们倾向于偏好的选择也不会使得符合数高于平均值. 从这些经验前提，关于按照机会将发生的事的标准结论可用数学方法推导出来.

但是如果结果显示出严重的偏离，值得怀疑的是经验前提中的这一个或那一个的真实性.

---

* 译注：这句话是译者加的.

有关具有特异功能的人的引人注目之处，只是他在猜牌时能经常比普通人做得更好. 至于他能做得“比机会更好”，这个事实自身并未得到证明.

宇宙的存在是否只是一种机会？这个问题的讨论中普遍存在着类似的混乱. 的确，这个问题在机会的先验计算的意义下究竟意味着什么，并不是一望即知的. 然而，若是可以假设在宇宙中有有限多个终极的粒子，而它们在其中运作的空间也是有限的，我就假设可以说宇宙的现存状态是非常偶然的，意即现存的粒子分布方式只是许多可能分布之一，而这个“许多”；又是多得无法想像的. 当然，在这个意义下，粒子的其他分布方法也是同样极其偶然的. 但是还可以这样来论证，即粒子现存的分布比之其他分布更为不可能. 因为它离先验的平均值偏差更大.

也可以换一个方法来讨论，如果我们能够用某种必定是相当任意的方式列出一些简单性质的有限的表，而这些简单性质是任意的事物合乎逻辑地可能具有的，我们可以在下述意义上说宇宙的现存的状态是很偶然的，即这些性质被发现的现存的组合方式之数目只占可能组合方式总数中一个很小的部分. 然而，除非我们有理由相信某种与实际存在的宇宙不相同的宇宙构造是更为先验可能的，在这两种情形下都不会有有意义的结果. 但是会有什么理由使你有这样的信念呢？又能给先验更可能性赋以什么意义呢？

关于机会的种种错误观念十分根深蒂固.（图中乞丐身上挂的牌子上写的是：“蒙特卡罗佯谬的受害者”.）

充其量我们能说，给定基本粒子的数目和空间的有限性，或者给定基本性质的数目和它们的可能组合的范围，粒子在其中分布更为平均，或者性质的组合更有多样的可能的宇宙之数目大于另外一类宇宙之数目，那类宇宙与我们实际宇宙比较，粒子分布不太平均，或者性质的组合没有那么多的多样性. 但是，在这特定意义下，是否应当认为有一个比我们实际存在的宇宙更可指望的更为可能的宇宙？答案是，根本没有任何理由来做这类假设. 先验概率的概念只与逻辑可能性的计数有关. 这些逻辑可能性是被均衡地实现或不均衡地被实现，哪一种可能有多大，只能依据我们的经验来估计. 然而关于不是我们自己的宇宙，我们不可能具有经验.

可能值得再提一下一个事实，说我们的宇宙在我方才定义的意义下可说是不可能的，这对于宇宙是根据某种设计生成的传统论据根本什么好处也没有. 为了给这个传统论据增加点分量，首先应当证明我们有很好的理由相信首先宇宙是一个目的论的亦即有目的的系统. 其次，还得证明它是那样一类的目的论的系统，它已经被我们的经验所证明通常是自觉地计划出来的结果. 我认为非常显然，这两条实际都不成立.

机会，意向和缘由

当我们说某件事是根据机会发生的，现在我们可以多少确切地把这句话的各种涵意列举如下，其中主要的有五个：

1. 机会事件可以是这样的，它是某个系列中的一个成员，它在我们曾经说明过的方式下遵从机会的先验计算.（值得注意的是，这并不是说该事件是无缘由的，甚至也不是说它不是有目的的. 抛掷一枚硬币或一个骰子的结果通常都是无目的的，但是所有这些结果的系列作为一个整体遵从先验的计算则常是某种设计的结果.）这个做法的一个推论是，若我们曾经发现某个类型的事件发生的频数遵从先验计算，而一旦我们再遇上严重偏离时，如比在猜纸牌试验中遇到的，我们就倾向于说这个偏离不能归之于机会.

2. 在另一方面，有这样的情形，在其中我们说一个事件是根据机会而发生的，其理由或理由之一恰是这个事件偏离了已建立的频数. 例如，当我们谈到生物学的偶然变异，就指的这个意思. 在历史事件中当我们把原因看得无足轻重时也会出现类似的说法. “因缺一个钉子而丢了马掌，因缺一个马掌而损失了马，因缺一匹马而失去了骑士，因缺这位骑士而丢了这场战斗，因丢了这场战斗而失去了这个王国，所有这一切都因为缺少一个马掌钉”. 我们说，由于我们通常不会因为没有正常地做某些平凡到诸如掉了一枚马掌钉的事情而招致深远的后果而失去王国，所以这是一场灾祸. 还可注意，在如此的一个时刻丢了一枚钉子是很难于预测的，虽然不能说它没有原因.

3. 当我们谈到由人类或者由一些可当作有目的操作者的动物引起的事件时，我们说一个事件是根据机会而发生的，这常常意味着它不按操作者的意向或者在某些情形也不按其他任何人的意向而发生. 这个意义下“按机会”是与“按意向”相对立的. 这仍然并不意味着这些事件是没有原因的，不如说这意味着它们是有原因的.

4. 说到事件配置，当它们的顺序不是有意安排的，并且虽然我们能单个地来考虑它们，但当我们尚未建立起任何能将它们联在一起的规律性的命题时，我们说它们是机会事件配置. 将这种配置归因为机会是常有的事，特别当某些特有兴趣的事情随之发生或者当该配置通常是精心设计的结果时. 于是，如果我在假日出游并且在旅途中不断地与朋友们不期而遇，我为如此的巧合而惊讶，虽然事实上这并不比我与任何其他的人相遇更多地是一种巧合. 然而，当我发现如果这种相遇成为过分频繁时，我可能开始怀疑它们并不是按机会而发生. 一般说来，谈到事件是按机会凑到一起并不是说它们并非多少有些规律地联系在一起，也不是说永远不会发现联系它们的规律. 而只是说在我们已接受的信念的体系中还没有这种规律.

5. 在统计推广的情形，归入这个推广的单个事件中，有一些显示所论的性质，另一些则不显示，这时也可以说是机会的问题. 因此，在论及遗传学规律时我们能够相信在第三代里面每 n 个个体之中正好有一个显示隐性特征，但是它们中哪一个会显示这却是一个机会的问题. 在微观物理学中我们可以接受这样的推广，n 个电子中有 m 个将在一段时间内从一个轨道变到另一个轨道，但其中哪些会变，哪些不变却被认为是一个机会问题. 机会的这种用法只是意味着一部分事件与其余的不同，而其因果规律尚未被发现.

实际上这种事件是不是在一种更强的意义下的机会的产物？也许不仅是我们尚未能将它们包括于因果规律之下，而且的确没有因果规律统治它们？这不是一个容易回答的问题. 部分原因是由于不清楚究竟有什么事例可以算作这种机会事件的例子. 一个困难是，如果我们的假设的复杂程度不加限制，则只要我们涉及的是一组封闭起来的事件，我们总能找到某些满足这些假设的推广. 然而，可以认为这种推广并不是规律，除非它们可应用这个组之外的事件，而事实上在某些领域中有可能我们不能成功地做这种外推. 如果这导致我们得出结论说，所讨论的现象确是如此的，即这种推广的企图是不会成功的，我们有理由这样来表示我们的结论，说这些现象包含着不可消除的机会因素.

有人认为在量子物理中已经达到这一地步，然而这仍是有争论的事情. 说在这个领域中决定论已被破坏的基础是：在经典物理学中成立的决定论要求，至少在原则上，在宇宙中可能探知所有粒子在任一给定瞬间的位置和动量. 这是一个微观粒子所不满足的条件. 然而，还有争论说，这个推理逻辑上不排斥它们与某些决定论的模式吻合. 尽管如此，这种模式尚未被发现. 除非它被发现，则物理的基本规律并非因果性的而是统计的这个观点将坚守阵地.

我想还在另一个重要意义下机会能被世界所接受. 即使在一个因果规律已妥善建立的领域，符合因果律仍常有一定的宽松性. 出现被认为能验证这种因果规律的现象只覆盖一定的事物层面. 若该现象是定量子，实际记录之值可能围绕着该规律预先给出的值分布着. 这些小的偏离并不重要；它们被归之为观测误差.

然而，"观测误差"是这里的一个艺术术语. 除了存在偏离之外通常没有理由假定会产生任何误差. 现在，我认为可能是符合的宽松性不能完全消除；换言之，自然界在被模写时其精度是有限的. 如果事情确是这样，就可以说，超出这个限度之外的任何东西仍然还是在机会的掌握之中.

当然这不能被证明. 无论设置了什么限度，都没有先验的理由来假设它将不会被超出. 相信在这个绝对意义下的机会的人能真正做的不外乎是提出一项挑战. 他针对世界的某些特征，否认任何人能去证明它们完全被因果规律所控制到一切细节为止. 然而，不管他能得意多久，还会在多种"机会"意义下有这样的机会，他的挑战将最终会得到应战.

23.

概率论

韦弗尔(Warren Weaver),1950 年 1 月号

概率乃生命之真实响导.

——西塞罗(Cicero,106--43BC)《自然界》

三个多世纪以前,一些赌徒问伟大的意大利科学家伽利略(Galileo),为什么一次扔三个骰子所得和为 10 要比和为 9 来得频繁得多. 另一位赌徒德米尔骑士(Chevalier de Mere)于 1654 年问法国数学家和哲学家帕斯卡(Pascal)为什么在扔两个骰子 24 次时把钱下注在至少有一次出现双六点是没好处的. 德米尔的这个问题实际上开创了概率论的数学理论,而结局当时还不可见到.

概率论现已经成长得远远压倒它在赌窟中的不名誉的起源,但它的基本概念仍能容易地用某些熟知的赌博的语言来叙述.

当你掷一枚骰子——一枚精心制做的,因此有理由相信其六面中之一向上是与任何其他一面向上同样可能——赌徒把这说成,对任一指定之数赔率为五比一. 数学家则定义其概率为六分之一. 如果我们现在问:掷两枚骰子得到一个 3 和一个 4 的概率是多少? 为了方便起见,我们把一枚骰子做成白的,另一枚做成红的. 白骰子上六个结果之任意一个可以配上红骰子上六个结果之任意一个,现总共有 36 个办法把这两枚骰子抛下,所有的配合都同等可能. 颜色的区别使得下面的事情变得清楚,一个红 3 和一个白 4 是与一个白 3 和一个红 4 不同的一次抛掷. 抛掷出一个 3 和一个 4——这是我们满意的情形,其数目为 2 —与同等可能的情形的总数 36 之比值,即其概率是 2/36 或 1/18.

掷两枚骰子得和为 7 的概率是多少？一位有经验的赌徒知道 7 是一个“六式点”，这是他用来说一共有六个满意的情形的说法（6 与 1，1 与 6，3 与 4，4 与 3，5 与 2，2 与 5）. 所以抛掷两枚骰子得和为 7 的概率是 6/36 或 1/6.

一般来说，任一事件的概率是定义为由事件的满意情形数除以同等可能的情形的总数. 一个不可能事件（无满意的情形）的概率显然是 0，而一个必然事件（所有情形均满意）的概率是 1. 在其他情形其概率是介于 0 与 1 之间的某个数.

逻辑上谨慎的读者可能已经注意到这个概率的定义中的一个使人困惑的方面. 因为它说到了“同等可能”的事件，此定义可以说是狗咬自己的尾巴打圈，就是说，用概率的术语来定义概率. 这个困难，它引起大量技术性的讨论，可用下述两种办法之一来处理. *

当人们论及纯粹的数学的概率论时，“同等可能的情形”是一个公认未定义的概念，类似于几何学中理论上的“点”和“线”. 并且有这样的情形，诸如男性与女性的统计，其中通常有关“同等可能的情形”的概念是人为的，因而必需推广这个概念. 这个关于同等可能的情形虽是未定义的概念，但在此基础上却可以建立一个逻辑上相容的理论，正如欧氏几何是从理论上的点和线发展起来的. 人只有通过经验才能决定任何实际的事件是否符合于理论. 当然，经验的回应是，这个理论事实上的确有着有用的应用.

避免这个进退两难的另一个办法说明如下，用一个特定的骰子抛掷得 4，我们定义其概率为，在本质上一致的条件下，作充分长序列的抛掷，看其中得 4 的抛掷所占的实际分数. 这个“频数定义”导致所谓的统计概率.

在概率的数学定义基础上，已经发展起一个广阔而且迷人的理论. 我们这里只能提示可解决的问题的范围与趣味. 在一场选举中的两个竞争的候选人最终分别获得 m 和 n 张选票，m 大于 n. 他们都正坐在他们的收音机旁收听计票. 最终获胜者始终保持得票领先的概率是多少？答案是 $(m-n)/(m+n)$. 一位商店老板平均每周卖出某商品 10 件. 每个星期一他应该存货多少，才能使顾客因买不到货物而失望的机会缩减到 1/20？答案是 15. 把一支牙签扔到一朵花上，花的窄瓣宽度与牙签长度一样. 牙签落在一个裂缝上在所有情形中占多少？答案是 $2/\pi$，其中 π 是熟知的常数，我们在中学几何课中都遇见过. 一个酒店位于一位顾客的家东 10 个街区北 7 个街区. 如果他醉成这样，以至在每个拐角处他继续直走或右转或左转是纯粹碰机会，他最终回到家

---

* 译注：上一篇艾也尔著“机会”一文从哲学角度对“机会”（亦即偶然、机遇……）的概念作了详尽的分析.

的概率是多少？这是在物理学上有重要应用的非常一般的“随机游动”问题的一个平凡情形；随机游动，举例来说，可以应用于布朗运动，即悬浮于液体中的很小的粒子由于液体的运动着的分子的偶然碰撞而引起的运动. 这个问题首先被爱因斯坦顺带地解决了，当时他才 26 岁.

机会有许多定律. 我们必须避免哲学上的一些难题，如为什么机会看上去似乎是一切秩序和规律性的反义，却能够最终用定律的术语来描写. 让我们考虑大数定律，它在整个概率论中起着中心作用.

大数定律已经被人们用很严格的办法对于非常一般的情形得到证明. 事情的精髓可以用一个简单情形来解释. 假设某人用一枚对称的硬币做了很大一个数目的抛掷，并记录下正面和反面出现的次数. 大数定律的一方面——比较为人所熟知的一面——说，抛掷充分多次后我们能够使正面出现次数与抛掷总数之比和预测值 1/2 之差小于你所希望的，大数定律说这件事能如你期望的那样可能. 例如你要想使比值和 1/2 之差小于 1/100 000，并且如果你要想有 99% 的把握(即概率＝0.99)，要达到这个目标，则有一个完全确定的并且无疑是一个很大的抛掷数目，抛掷到这么多次就能满足你的要求. 应当注意，并不存在某一个抛掷的数目，不论多么大，会实际保证正面出现的分数离 1/2 小到 1/100 000. 这个定律只是以一个很精确的方法说，当试验的数目变得越来越大时，便有越来越强的倾向使得其结果在比率的意义下与其概率预测相符.

概率论的这一部分，总是被那些谈论“平均定律”并且说概率会在长过程中能自己“跑出来”. 这些人含糊过去，而没有真正理解. 那些人有时会误解的地方有两点.

头一点是与大数定律的鲜为人知的另一方面有关系的. 同一个定律既告诉我们成功的比率当试验次数增加时趋向于越来越好地符合成功的概率，这一个定律也告诉我们，当我们增加试验次数时，其成功的绝对数趋向于越来越偏离所期望的数. 例如，假设一枚硬币抛掷 100 次得 40 次正面，而继续抛掷到 1 000 次时得 450 次正面. 正面对总抛掷之比率从百分之 40 变成百分之 45，从而趋向于接近百分之五十或 1/2 这一概率期望值. 但是在 100 次抛掷中正面的绝对数 40 与理论期望数 50 相差只有 10，而在 1 000 次抛掷中正面的绝对数 450 与期望数 500 相差 50，是前面的五倍. 于是比率在改善，而其绝对数则已经变坏了.

第二点经常被误解的是：任意一次抛掷相关于以前抛掷所得结果是独立的. 如果正面已经连续出现若干次，许多人倾向于认为“平均值定律”会使下一次抛掷反面出现要比正面更可能*. 若认为硬币是一枚没有缺点的对称的，事情肯定不是这样. 即使在一个非常长的连续不断的正

* 译注：见“机会”一文中的蒙特卡罗佯谬.

面出现之后，一个无缺陷的硬币在下次抛掷中正面和反面的出现仍然是精确地等可能的. 实际上，大数定律的上述这个鲜为人知的方面使事情成为这样，当我们继续抛掷时，越来越长的不间断的正面或者反面的序列会发生. 虽然同一定律的为人熟知的方面向我们保证，尽管有这样大的绝对数偏差，正面与反面之比率是越来越趋向于 1.

所有这些注记当然适用于任一独立试验的序列. 概率理论也已经很有成效地被应用于相关试验的序列——即应用于诸如医药，遗传等等所产生的事例，其中过去的事件的确影响现在的概率，这种研究被称为原因概率.

假设我们有一只盖起来的盒子，关于它我们只知道它装了很多很多的小彩球. 假设不往盒子里面瞧，我们抓出一把并且发现我们拿到的球中三分之一是白的，三分之二是红的. 关于盒子里的混合物我们能做出一个概率的陈述吗？

这个示意性质的问题，听上去很形式而且平凡，却与通过试验以获得关于自然界的知识的过程的真正本质是密切相关的. 可以说，自然界是一个大的盖着的盒子，其内容起初是未知的. 我们从盒子中取出样本，即我们做试验. 可由此得出什么样的结论，它们是如何得出的，它们有多么可靠？

这是一个在概率论中和在相关的统计领域中已经引起了相当长期的争论的主题. 上面陈述的有关彩球的问题事实上是一个不适当的问题. 应用于此处的概率论定理（它被称作贝叶斯(Bayes)定理，它首先由一位牧师发现）弄清楚了样本的试验证据如何能推断出一个看法，而改变早先已知的有关盒中的内容的看法；但是该定理之应用要求你在试验之前就有一个看法. 你不能够仅仅由试验的结果就作一个各式各样混合比例的概率的结论. 如果多次重复的试验不断给出相同的结果为三分之一白色和三分之二红色，则当然证据越来越压倒以前所持有的相反的见解而不论它的性质是什么.

轮盘赌的下注可能出现多种违反概率论的情况. 在蒙特卡罗有一回连续出现 32 次红色. 这个概率是 $(1/2)^{32}$，或者大约四十亿分之一.

近年来发展了一种研究这类一般类型情况的新方法，在其中人们希望从试验证据中提取所有的合理的推断. 虽然除非你具有或者假设一些先有的见解，贝叶斯定理就不能应用. 现已发现其他的与统计理论有关而不是纯粹概率论的方法足以提取出最有用的结论.

概率的意义是什么？下面这个例子的意思究竟是什么？例如对一位病人说："如果你决定申请这项外科手术，你将获救并痊愈的概率是 0.72."显然，这位病人只会去做一次试验，即一次手术，而且试验要么成功要么失败. 数目 0.72 对他来说有什么有用的意义？

对这个问题，以及实质上对任一涉及一个概率的解释的问题，其答案是："如果有很大数量的像你一样的个体，并且在你现在的情况下申请这个手术，他们中每 100 人里面大约 72 位将获救并且恢复健康. 个体的总数越大，比率将越接近百分之 72."

这个答案初看上去似乎有点人为造作和令人失望. 它隐含地包含着某些完全不现实的条件. 需要一个复杂的直观的方法来将此陈述转变成有助于决策. 然而不管怎么说，经验证明这种陈述仍是很有用的.

一个理论可以按照它是否与实际经验相符合而被称为正确或者错误. 在这种意义下，概率理论究竟能否被证明为正确或者错误？

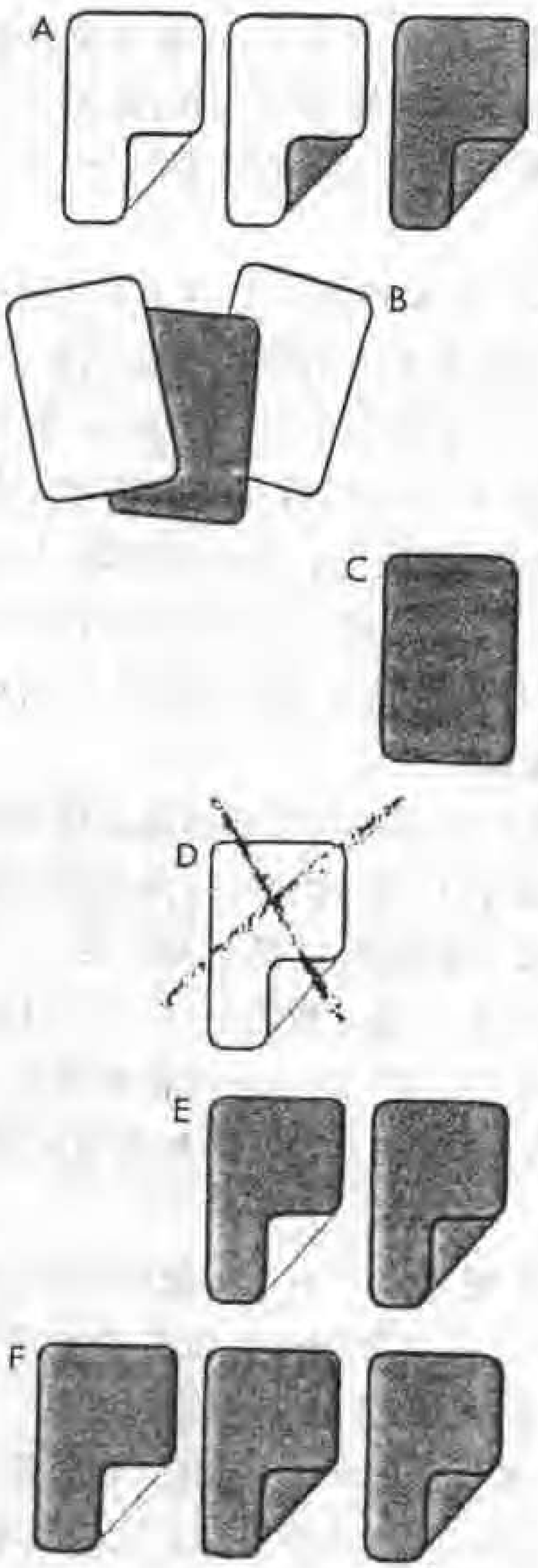
在严格的意义下其回答是否. 如果你抛掷一枚硬币，你期望获得大约一半的正面. 但是如果你抛掷 100 次得到的不是预期的 50 次而是 75 次正面，你并没有推翻概率论：概率理论能够容易地计算出在 100 次抛掷中得到 75 次正面的机会. 如果那个概率被写作 $1/N$，于是你可期望如果你抛掷 100 枚硬币 N 次，在 N 次中大约一次你将实际得到 75 个正面. 因此，假设你现在抛掷 100 枚硬币 N 次，并且假设你不是如你期望的那样只有一两次得到 75 个正面，而是比如说 25 次！现在是否概率论被推翻了？

还是没有. 因为现在已经发生的这个事件虽然极为罕见，但仍是一个其概率可以计算的事件，虽然其概率是非常地小，但它不是零. 于是人们继续再做一个新的试验，它由多次重复前面的试验所组成. 并且甚至如果奇迹不断出现，从概率论的观点看，这些都不是不可能的奇迹.

因此，在一种严格的意义下概率论不能被证明是正确或者错误. 但是事实上这是一个纯粹的虚幻的困难. 虽然概率论不能被严格地证明是正确或者错误，但它能够被证明是有用的. 经验的事实说明它是起作用的.

有着两个不同的——或者至少表面上不同的——类型的问题概率论对它们有用. 对于第一种类型的问题应用概率理论并非因为我们深信我们必须用它，而是因为它是非常方便的. 对于第二种类型的问题，概率理论看上去似乎甚至理论上也是不可避免的. 然而，我们将看到这两种情形之间虽然在实际价值上确有差别，但实际上这种差别只是一个错觉.

第一种类型所讨论的可以看作是决定论性的情形，但是它是如此复杂，其结果就所有实际目的而言都是不可预测的. 在这种情形中，我们发现最后的结果常以一种非常敏感的方式依赖于一个很大数目的原因的作用. 许多这种原因可以使得结果的特性在某种程度上变得不清楚，



三牌戏，古时候称为三箱问题，是概率容易使人上当的一个例子. 共有三张牌，一张牌两面白；第二张一面白另一面红；第三张两面红(A). 发牌者在一个帽子里洗牌(B)，取出一张平放在桌面上. 这张牌上面是红的(C). 发牌者现在说："显然这不是那张两面皆白的牌(D). 它必是红白或红红(E). 愿意一比一地赌另一面是红的，因为输赢各半". 这对别人来说是不利的赌博. 实际上有三种可能的情形(F). 其一是另一面为白. 其余两种是红红牌之一面或者另一面. 因此下一面为红的机会是2对1.

或使详细研究成为不可行，但是至少还可以想像，如果值得的话，科学能够逐个分析每一个原因并从而达到一个理论，它能够预示和解释将发生什么. 在那种情况下，说其主要的最终结果"依赖于机会"，其实只是我们的一种方便说法，即是说，其本身之复杂使得实际上不可能做出分析，但是也正是这种复杂性保证了能够通过概率论的定律来描写一种大体上的行为.

抛掷一枚硬币可能也是这种情形的最简单而且最熟悉的例子. 为什么一枚硬币落下时是正

面或反面似乎没有什么重要的神秘原因. 这枚硬币在桌上的精确位置,运动和旋转的速度由手指头给定,空气的阻力,等等. 一个人可以说出他为了计算所需知道的一切,根据熟知的动力学定律来确定这枚硬币落下后会是正面或反面. 但是这样一项研究会是非常复杂,并且会要求非常精确而广泛的定量的信息.

在严肃的日常生活中有许多这一类的情况,我们运用概率理论于其中并不是因为清楚地知道"机会"在其中起着某种含糊不清而且神秘的作用,而是首先因为情况是如此复杂,如此费解地被如此众多的微小因素所作用,以致企图详细分析它是麻烦到令人不敢问津. 保险公司的经验,不断地打电话以及由此而来的对电话交换装备的需要,当人们希望评估许多对象的质量或者许多个体的意见时所用的抽样技术,常用的测量误差理论,流行病学中的问题,气体的动力学理论——所有这些实例都是由于其中原因太多太复杂,并且(或者)了解太贫乏以至不允许做出完全的决定性的理论. 所以我们用概率论来处理它们. 但是在所有这些情形我们将同意庞加莱(Poincaré)的说法,机会"仅是关于我们的无知程度的度量".

第二种类型的概率问题初看上去似乎很不相同. 现在大多数科学家相信自然界某些最基础的事物本质上不可避免地是概率的. 例如在现代量子理论中,它成了我们关于原子的知识的基础. 企图计算某个电子在某个瞬间将会在那里看来不仅不可能而且根本无意义. 一个人能够做的是例如通过薛定谔(Schrödinger)波方程推算出一个概率位置函数的值. 一个人不能预报这个电子将在何处,你只能计算它将在或将不在某给定地方的概率. 而且任何企图设想一个实验来指出该电子正好在何处,这样来消除这个概率的含糊性,已证明是一个必然失败的实验,它会破坏了提出原来问题的条件.

应当指出,还是有一些科学家不接受概率论在原子现象中的不可避免的作用. 最著名的当然是爱因斯坦(Einstein),他曾用颇具个性的方式说过:"我不会相信上帝在同世界玩骰子". 但是还应当指出,伟大的天才的爱因斯坦在这一点上是属于一个很小的少数派.

以这种不可回避的方式与概率论相关联的问题是属于最根本的一类问题的. 量子理论和统计力学,它们合起来成物理宇宙的基本理论的一个很大的部分,本质上是建立在概率论之上的. 控制着生命世界的遗传的基因重组是服从概率论的定律的. 在人类生活中起着如此巨大和如此明显作用的通讯,其过程之内部特征最近被发现在本质上也是概率论的. 永远流向未来的时间概念也被证明依赖于熵的变化,因而是基于概率论的观念的. 推断与证据的整个理论,以及事实上一般的知识,都回归到概率论.

我们现在可以看到,如果我们希望逻辑上很精确,这两个类型的概率问题不像我们最初假设的那样的不相同. 难道可以精确地想像一枚硬币的下落是复杂的但是确定性的,而一个电子

的位置却是本质上不可确定的吗？显然不是.从一个整体的和实际的观点来看，毫无疑问，以很细心的实际测量为基础，再加上动力学理论的全部解析方法，人们可以颇为成功地处理硬币抛掷问题.然而，下面这个说法也对，这枚硬币是由基本粒子做成的，而基本粒子的位置和运动从当今科学观点看来，只能在概率论的意义下理解.因此，我们可以把当初在两种类型情形之间的区别说得更仔细，我们说第二种类型的问题，无论取多大的尺度，本质上都是不确定的，而第一种类型只论及大尺度现象，把它们看成决定性的现象是很有用的，虽然这些大尺度的现象归根结蒂依赖于小尺度的概率性的现象.

科学(例如数学)讨论有关理论的一些命题，这些命题在逻辑上是精确的，但是“真理”的概念并不适用于它们；科学(例如物理学)也讨论关于自然界的一些命题，而这些命题不能在一种严格意义下被认为是真实的，而充其量只被认为是高度可能的.更为令人吃惊的是，当一个人讨论科学时，他不可能确信无疑而只在当他在论及信仰时，仅在这时，他才真正能确信无疑.

此外，有理由说概率论在科学中几乎扮演着信仰在人类活动的其他领域中所扮演的角色.因为，在很多很多情况下，当科学完全不可能回答“这个命题是真实的吗?”这个问题时，概率论却给出了一个基础，来判断该命题在多大情况上可能是真的.这就是概率论，它在许多重要的情况下使得一个人能够解决由巴特勒(Samuel Butler)所指出的悖论式的两难命题：“人生是从不充分的前题中提取充分的结论的那种艺术”.

24. 概率论

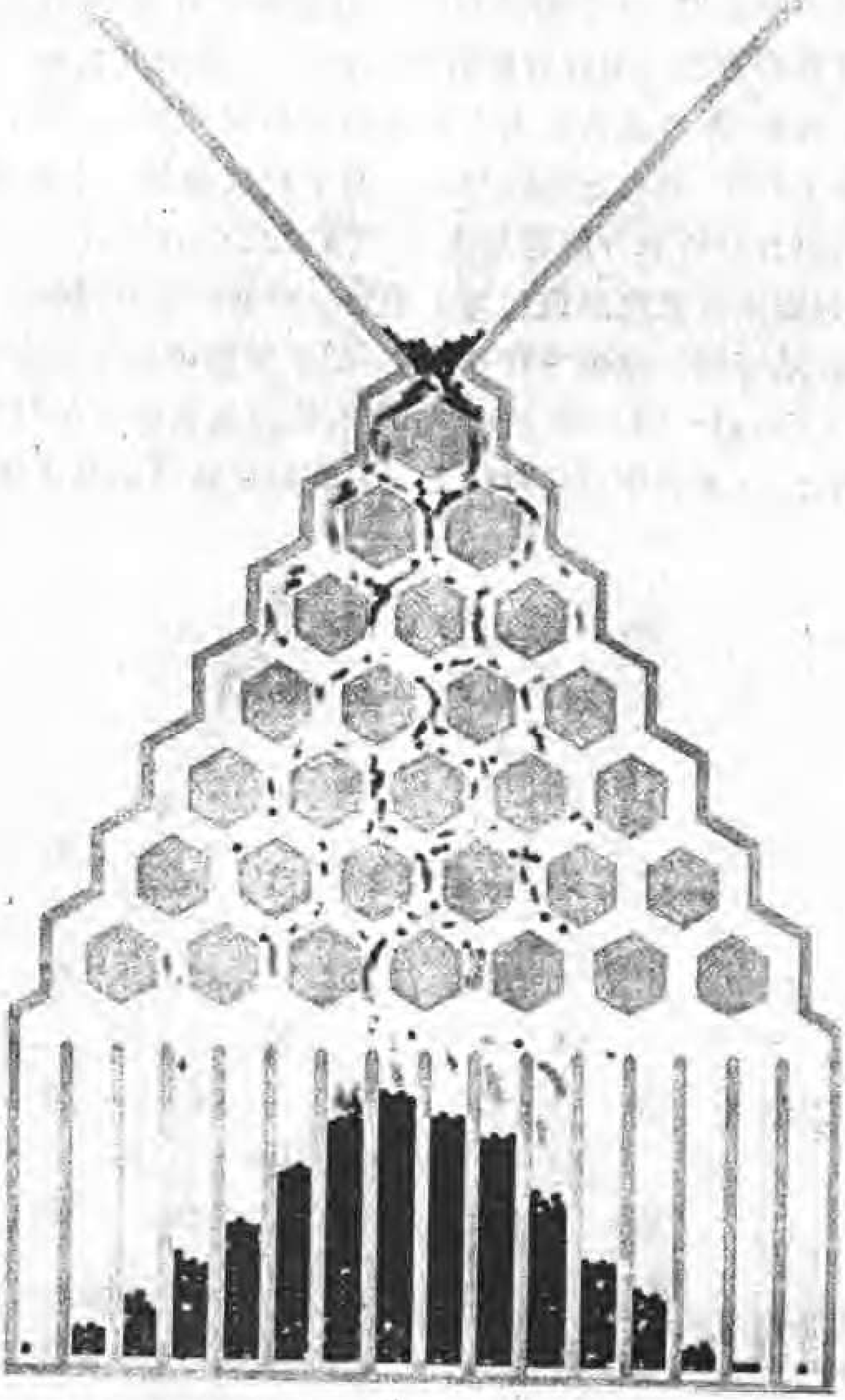
卡茨(Mark Kac),1964 年 9 月号

一位秘书已经打好了 10 封信并写好了 10 个信封. 如果她现在完全随机地(不看地址)将信放入信封,那么每一封信放进错误的信封里的概率是多少? 读者知道后可能会吃惊,其概率是大于三分之一:更明确地说,它大体上是 1/2.718 28…. (这个著名的数 2.718 28…,或者 e,是自然对数的底,被证明是概率论中一个重要的数,我们将会看到它再而三地出现.)

用来解这个问题的方法称为组合分析. 组合分析中一个古老而较为人所知的例子是:从 52 张的一副纸牌中抽出五张牌同花的概率是多少? 当然,组合分析有着较之估计扑克牌手的机会,或者回答有关心不在焉的秘书们的臆想的行为的可笑的问题,更为深刻并且更为实际的应用. 它已经成为一门极其有用的数学分支. 但是它的原则可以最好不过地用简单的例子来解释. 让我们仔细展开扑克牌问题,从而我们能够觉察它的某些概率性的含义.

拉普拉斯(Pierre Simon de Laplace(1749—1827))定义概率为 $p=n/N$,他用这个办法将整个概率论建立在组合分析之上. 上述公式说,一个事件的概率是该事件能够被实现的途径之数目(n)比上全部可能的事件总数目(N)之比率,但需假设所有可能的事件是等可能的——这是一个重要的限制条件. 一手五张牌同花的概率从而是所有可能的五张同花的数目与所有可能的五张一手的总数目之比率. 组合分析的问题是计算这两个数目.

让我们从一个比较简单的情况开始,其中涉及较易掌握的数目. 给了四个对象 A,B,C,D 的一个集合,从它们能够做成多少个由两个对象组成的子集或组合? 容易用简单的配对和数(shǔ)数(shù)来回答它:大小为 2 的可能的组合共有六个,AB,AC,AD,BC,BD,CD. 然而,当



这里展示的是概率论演示器，它自动地产生一个近似于钟形的"正态"分布，或称高斯分布．小黑球从贮箱滚入上口经过一个由六边形组成的阻碍阵收集于底部的容器中．在每一阻碍前，理论上讲有一半的概率使小球将走向右侧并且一半将走向左侧．因此小球倾向于按照帕斯卡三角的比例来分布(见下页插图)．在此照片中通过阻碍阵的小球因下落运动而模糊不清．这些小球未能产生完整的分布曲线，因为有些还正在通过渠道运动．这个仪器由加尔通爵士(Sir Francis Galton)首先构作而称为加尔通板．此处展示的式样是按照科学材料中心的一个设计做的，专利名称为"Hexstart"．

我们进而讨论较大数目的对象时，这个做法很快变得完全不可能了.我们必须找到捷径——即不用实际数数而进行计算的方法.(组合分析有时被称为“不数数的数数”.)

假设我增加第五个对象，并考虑从这五个对象可以形成多少个对子.显然新的对象 E 为可能的配对总数恰好增加了四个，因为它可以与另外四个对象的每一个组合.所以其总数是 $6+4$ 或 10 个可能的配对.用组合分析的方便符号来记，我们有 $C(5,2)=C(4,2)+C(4,1)$. C 表示组合数，而括号中的数分别表示对象之总数和每个子集中对象的数目.例如，$C(5,2)$ 意思是五个对象每次取两个的组合数.基于同一原则为计算从 10 个对象能做成多少个含四个对象的组合，我们可以写下 $C(10,4)=C(9,4)+C(9,3)$，然后继续约化到越来越小的数目，直到我们最后用简单的加法计算出答案为止.在实践中在这种情形我们实际地做的是从下往上来构作各个 C(这样做记录比较容易).

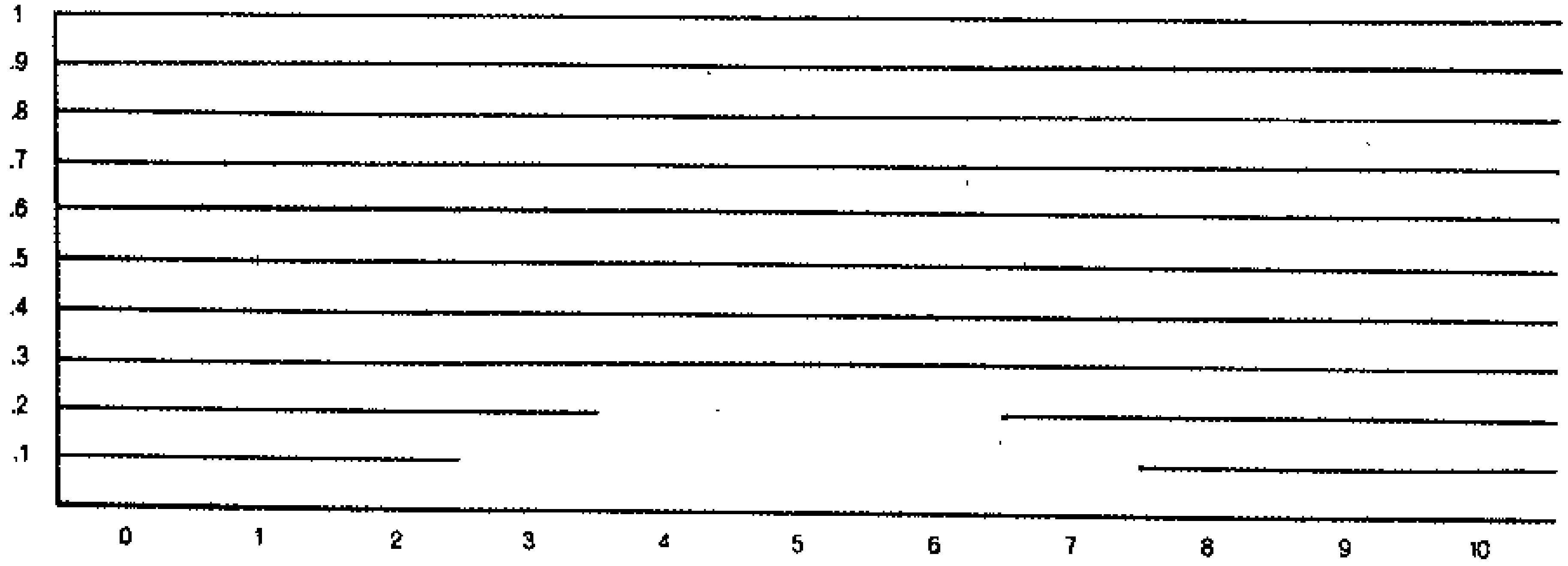
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10

帕斯卡三角，计算概率的一个工具，由二项展开式的系数组成.每个数是紧挨着的上方两个数之和.其某些特性和应用在行文中论及.

整个系统很方便地被总结为一个便利的表，称帕斯卡三角.它是帕斯卡做出的*，他是概率论的奠基人之一.此三角由二项展开式之系数所组成，每下一行表示更高一次幂的系统.表中每一数是上一行中左右两数之和.对于任何对象的集合其组合数可沿着一行自左至右地读出.例

* 译注:此三角最早见于中国杨辉之著作(1261 年)中，故我们称它为杨辉三角.而帕斯卡生卒年月为 1623—1662.

如，第四行写出了其对象总数为四的所有可能的组合数：从左读起，我们首先得到一个"空集"（不含任何对象）的集合个数为1；其次为4，即含有一个对象的子集的数目；再次为6，即所有可能的两个对象的组合的数目；然后为4，为所有三个对象的组合的数目；最后是四个对象的"全集"。利用这个表，为了求出10个对象形成的四元集之数目，找到第10行，从左边数起的第五个数即可求得答数为210.



正面的概率在10次抛币中产生一个直方图令人联想起正态分布．正如帕斯卡三角中第10行所示，在10次抛币中在全部1 024个可能的序列中存在210个序列恰好是四个正面．因此四个正面的机会大约是百分之21．粗略地算一下，在10次抛币中得零个，一个，两个，三个，四个和五个正面（水平值）的机会分别是0.001，0.01，0.045，0.12，0.21和0.25（铅直值）．在10次抛币中得六到10个正面其概率及表示它们的横杠的出现为递减．在同样尺度下1 000次抛币的直方图将会宽得多，并且低得多，而若重定尺度则它的关系将变成正态分布的曲线．

当讨论的问题中总数变得很大时，比如我们的扑克问题，甚至帕斯卡三角也不方便了．所幸概率理论的先驱者们曾经成功地证明了组合数的一个简单而普遍的公式．这个目前已为人熟知的公式是

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!\ (n-r)!},$$

其中(n,r)表示n个对象中每次取r个而"!"是表示"阶乘"的记号．

在$C(10,4)$的情形，消去分子分母中的$(n-r)!$而简化成

$$C(10,4)=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210.$$

现在不难计算扑克牌抽同花的概率. 在每种花色中有 $C(13,5)$ 个可能的五张同花，因此在四种花色中总共有 $4C(13,5)$ 个. 而所有可能的五张手总数为 $C(52,5)$. 因此，从所有可能五张手中得到同花手的概率是

$$\frac{4C(13,5)}{C(52,5)}=\frac{4\dfrac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}}{\dfrac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}}=\frac{33}{16\ 600}.$$

这样，我们得知从一整副牌中抽得任何一种五张同花的机会大约是千分之二.

我们再用经典的方法来进一步深入研究抛掷硬币的概率. 假设我抛掷一枚硬币 10 次；我会恰好得到 4 个正面的概率是多少？请看帕斯卡三角的第 10 行，我们发现 10 次抛币得正面或反面的所有可能的序列总数是 1 024. 在其中有 210 个序列是包含着 4 个正面. 因此，如果此抛掷是“诚实的”，意思是所有这 1 024 个可能的结果是等可能的，抛掷 10 次恰好出现 4 个正面的概率是 210/1 024 或粗略地说百分之 21.

帕斯卡三角的任意给定行(第 n 行)中的所有数之和是 2 的 n 次幂(例如，$1\ 024=2^{10}$). 因此，一般来说在 n 次抛掷中恰好得 k 个正面的概率是 $C(n,k)/2^n$. 假设我们将 10 次抛掷中得恰好 0，1，2，3 等等直到 10 个正面的概率用一系列高度表示该概率的矩形作成图(见 279 页插图). 此图在中央取得峰值(得五个正面的概率为 252/1 024)而往两边逐渐降低(低至得到无正面或 10 个正面的概率 1/1 024). 如果我们对于 1 000 次抛掷作成类似的图，它变得很宽并且很低：最高点(对 500 个正面)并不在百分之 25 附近而只有 $1/100\sqrt{\pi}$，近似于 0.56%(可能令人惊奇的是，当抛掷次数增加时，正面向上的概率会从一半大大减少. 但是如果你看到了，正面反面的出现严格为 50—50 的分划，只不过是可能结果之一，而每多掷一次，可能结果的总数也会增加，这样就不会感到奇怪了).

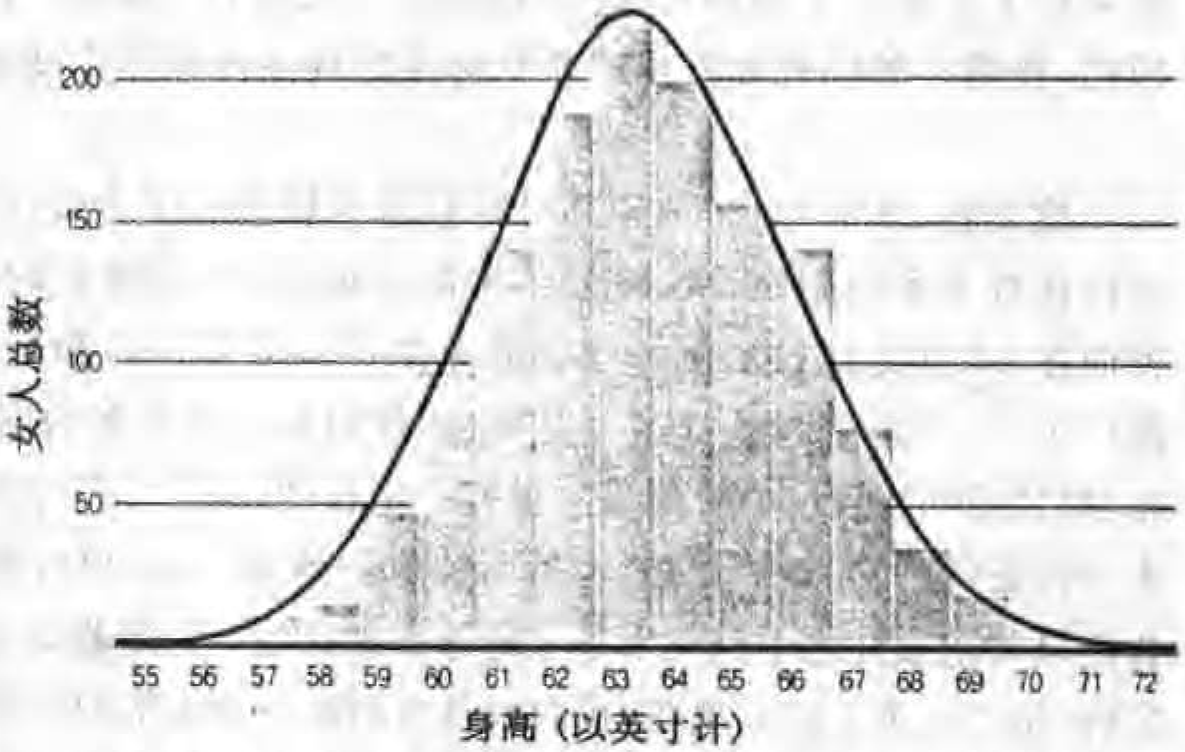
以我在上面所讲的为基础，画出来的很多次抛掷的概率图将是如此平坦，以至于很难与直线相区分. 但若把所有矩形的高都乘以同一个因子($\sqrt{n/2}$)同时把底边用同一因子收窄，这时就会看到这些矩形的顶部画出一个对称的曲线，而在中央有峰值. 抛掷次数越多，这个矩形构成的剖面就越趋向一个光滑曲线(其图像见 281 页)，其方程为

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

e 就是著名的数 2.718 28…，即自然对数的底.(如果一家银行会蠢到提供年利率为百分之 100 的利息，而且答应连续计算复利——不只是按日、按小时甚至按秒计息，而是按每一瞬间计息，则在一年结束时一美元将只变成 2.718 28…美元.)

当一枚硬币抛掷许多次时其概率图示紧密地逼近于一条连续曲线说明了所谓的大数定律.如果把一枚"诚实的"硬币抛掷几十万次或几百万次,在试验的序列中正面的分布当恰当地规定了图上的中心和尺度后将几乎准确地沿着我刚才给出公式的那条曲线走.这条曲线已经成为科学中最著名的曲线之一.被人们称为"正态"或"高斯"曲线,它已被用于描写男人们和女人们的身高,豌豆的大小,新生儿的体重,气体中粒子的速度分布,以及物理和生物世界中许多其他的性质(但合理程度不同).

抛币与正态曲线之间的引人注目的联系是既使人高兴也寓意深远.它是概率理论进一步发展的主要刺激因素之一.它也形成了描绘粒子道路的"随机游动"模型的基础.它又最终解开了布朗运动的谜,从而建立起现代原子理论的基础.



女人们的身高产生一个直方图,正态分布曲线能够与之相配合.在这个抽样中有 1 375 位妇女.物理学和生物学世界中的许多其他重要的实验分布相合中也会找到此钟形曲线.

今天,概率论已成为全部科学之基石之一,而它的女儿,统计科学,已进入人类全部活动领域之中.回溯往事,拉普拉斯的一段话是多么有远见啊.他于 1812 年出版的开拓性著作《概率论的解析理论》中说:"很值得注意的是一门从考虑机会的游戏开始的科学将成为人类知识中最重要的东西.……人生的最重要的问题中的大部分实际上只是概率论的问题".

看来"人类知识中最重要的东西"的特点之一是,它们通常要花费很长的时间才能建立起来.在拉普拉斯之后,人们对概率论的兴趣减弱,并且在整个 19 世纪余下的时间及 20 世纪头两个十年中作为一个数学分科几乎消失了.只有很少几位数学家继续工作;其中有卓越的创造性的俄国数学家切贝雪夫(P. L. Chebyshëv)和他的学生马尔可夫(A. A. Markov)(今天的苏联获得概率理论的巨大发展要归功于他).在物理学方面概率论有许多引人入胜的应用,不仅有爱因斯坦(Albert Einstein)和斯莫卢霍夫斯基(Marian Smoluchowski),在他们解决布朗运动问题时的应用,也有麦克斯韦(James Clerk Maxwell)、波尔茨曼(Ludwig Boltzmann)及吉布斯(Josiah

Willard Gibbs)在气体动力学中之应用. 在世纪之交庞加莱(Henri Poincaré)和希尔伯特(David Hilbert)这两位当时最伟大的数学家,曾试图复活对概率理论的兴趣,但是,尽管他们的独创性和激动人心的重要贡献,人们对此极少反应.

为什么在职业数学家中关于这个主题会有这种冷漠? 有各种各样的原因. 主要的一个是感到整个理论似乎是建立在松散的和不严格的基础之上. 举例来说,拉普拉斯的概率定义基于所论的所有的可能结果都是等可能的这一假设;但因等可能这个概念本身是一个概率的陈述,此定义看上去是一个循环定义. 而且那还不是最糟的缺点. 其实整个领域都被悖论和其他困难所困扰. 在数学的所有分支里严格性标准的提高使概率论变得似乎是一个劳而无功的课题.

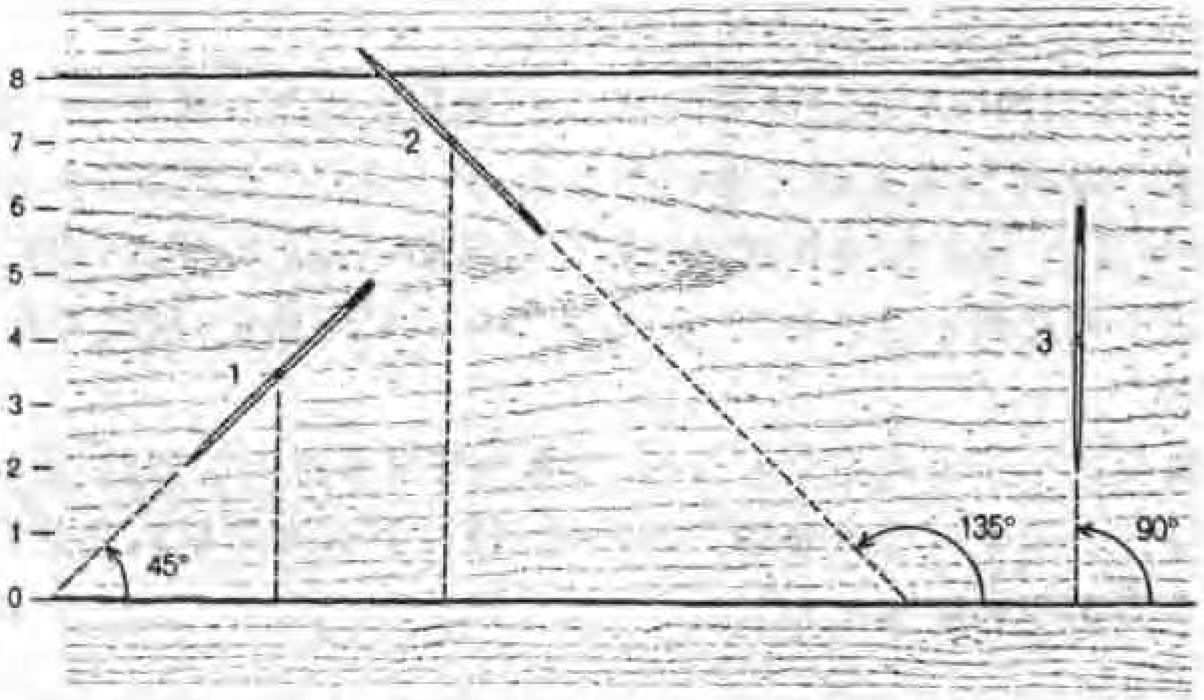
然而在 1930 年代,由于其时对其基本概念有了重要澄清以及用到了它与测度论的关系,概率论在数学家们中间重又恢复了崇高的地位. 上面提到的测度论是一个数学分支,远溯欧几里得而在 20 世纪初被法国数学家波莱尔(Émile Borel)和勒贝格(Henri Lebesgue)极大地延拓和推广了. 为了理解和欣赏这个发展,让我们从一个著名的问题讲起,这就是几何概率论中的所谓布封(Buffon)投针问题. 假设一根有一定长度(例如 4 英寸长)的针被随机地抛到宽度(用 d 表示)大于针长(例如 8 英寸宽)的木条所铺成的地板上,这根针将落到两块木条的缝上的概率是多少? 我们只要记录针之中点在木条上的落点和针与一给定板缝之夹角,就可以定义在每次抛掷后针的位置(见 283 页上图). 现在,我们也可以用在一个矩形中的抽象图示的方法表示出该针的不同的可能的位置(见 283 页下图),在其中高表示针落下后其中点位置的纵坐标,* 而底表示角度(用弧度计,π 等于 180 度,$\pi/2$ 等于 90 度等等).

这个矩形作为一个整体其面积是 πd,它表示这根针落下后能够取得所有可能的位置. 技术上说它被称作"样本空间",这是一个用来表示在任何概率试验中的所有可能的结果的集合的一般术语.(抛 10 次硬币的样本空间是由所有 1 024 个可能的由正面或反面的 10 项序列的集合.) 在这个抛针试验中,矩形的哪一部分面积对应于针跨在一条缝上的那些位置? 这可以由简单的三角学计算出来,并且可以用这个矩形中两个有曲线边缘的两块来表示. 它们拼起来的面积用初等微积分可以计算出来是等于 2 倍的 l,l 为针的长度.

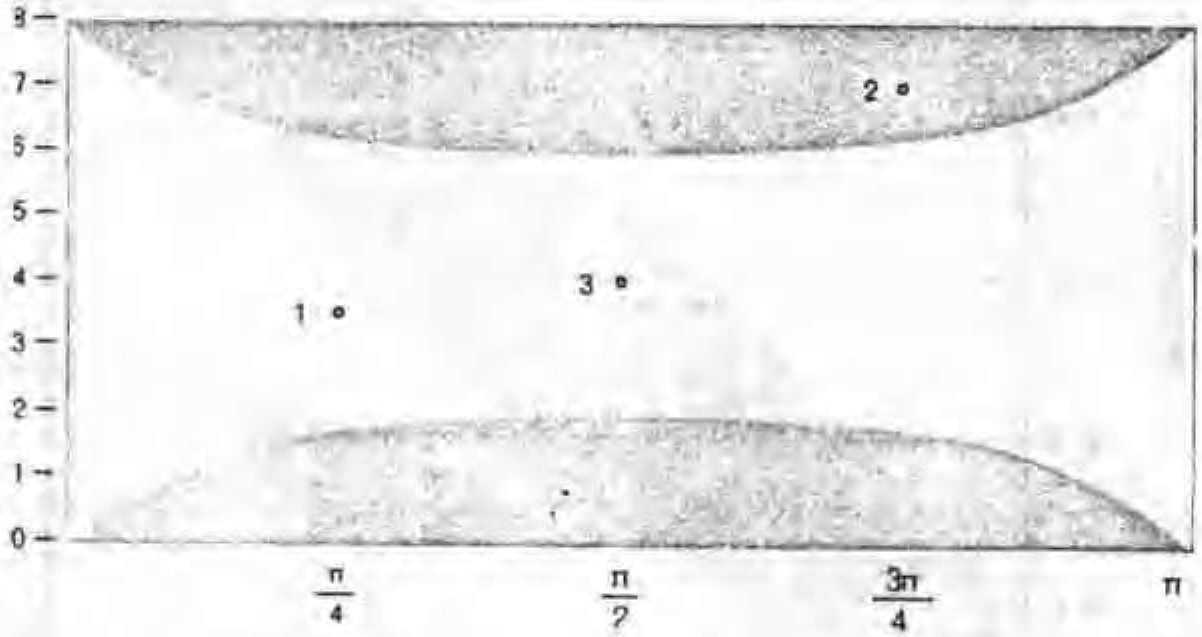
现在假设这根针的所有可能的位置是同等可能的,则该针落在一个缝上的概率是图中深色区域的面积与矩形总面积之比,即 $2l/\pi d$. 就是在此处,这个理论由于它的假定的随意性,摔了一个跟头. 确实不存在必然的理由认为在这个抽象矩形中所有的点是等可能的,但是这个假定

---

* 译注:这句话是译者加的.



布封投针问题讲的是一根长度比一块木条的宽度短的针落下跨在两块木条的缝上的概率. 这里每一根针的长度是木条宽度的一半. 用来测量的木条宽度为 8(以英寸为单位).



抽象图表中显示了三根针的位置. 水平值表示每根针与木条底边的夹角. 角是用弧度来表示,故在 0 到 π(180°)之间. 铅直值 8 是木条的宽度(单位为英寸). 三个点表示三次投掷中针的位置. 这个矩形称为"样本空间",它表示针落下后所有可能的位置. 深色区域中的点表示一根针跨过一个缝的所有可能的位置.

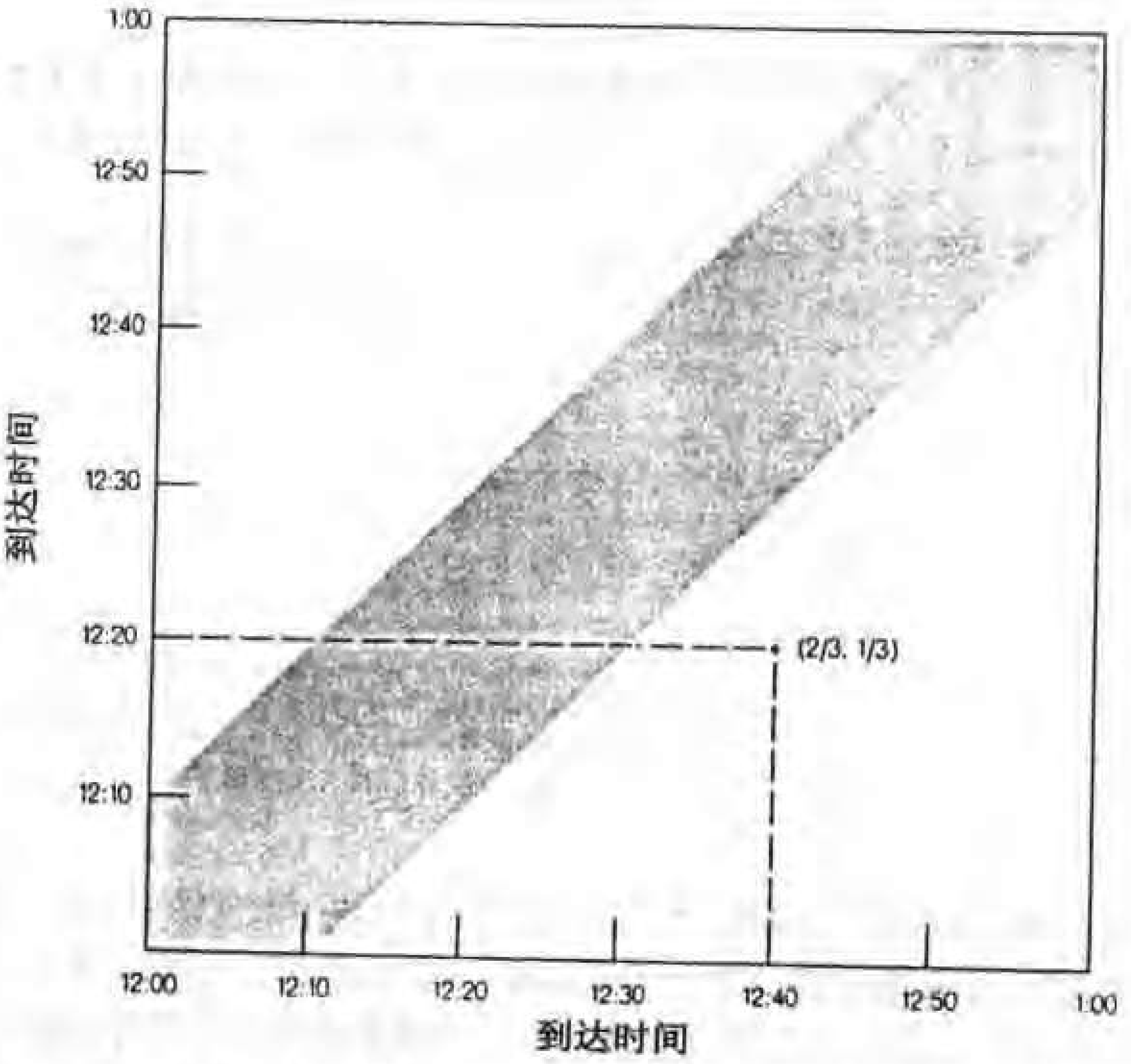
虽是如此之自然甚至不可避免,但其任意性之程度被法国数学家贝特朗(J. L. F. Bertrand)戏剧化了,他设计了一些例子(后来以贝特朗悖论而著称)其中的假定看上去都同样自然,而由此他能得到同一个概率问题的完全不同的答案.

这是一个令人不快的情况,这要求我们对概率性假定的作用和本质有一个更深刻的理解.

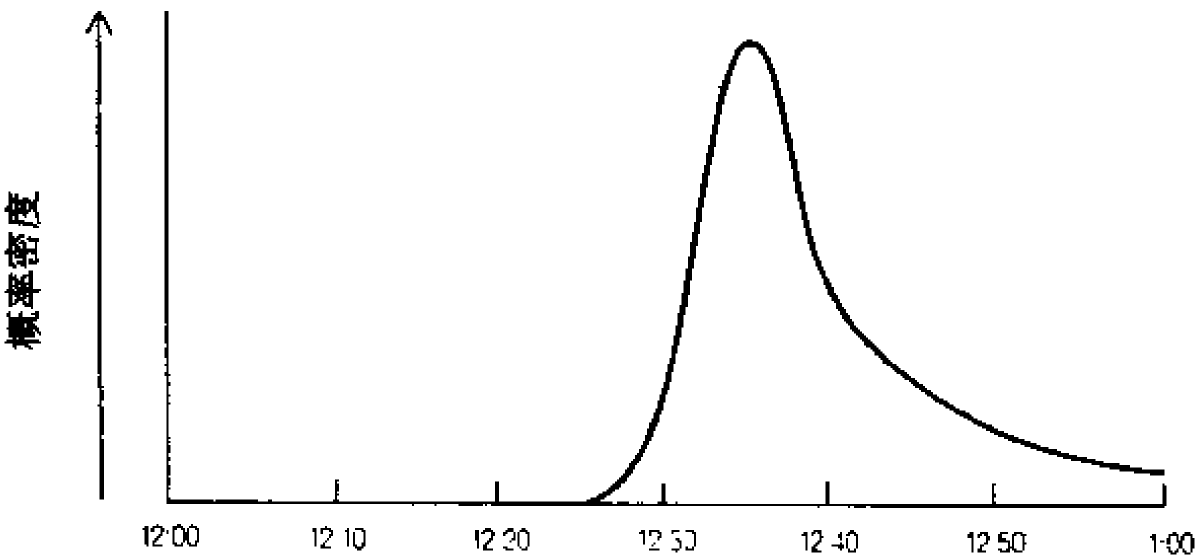
我能用另一个例子来较好地解释这些事的现代观点.

假设两位朋友住在纽约城的不同的郊区,他们打算在正中午在第四十二街的公共图书馆门前会面.铁路时刻表以及火车准点情况他们不知道,两位朋友只能指望在正午 12:00 到下午 1:00之间的某个时候到达.他们约定在这段时间之内在图书馆门前见面,按照约定,为了不浪费太多的等候时间,每个人在到达后只等 10 分钟,若另一人仍不露面,则随即离开.试问他们实际相遇的概率是多少?

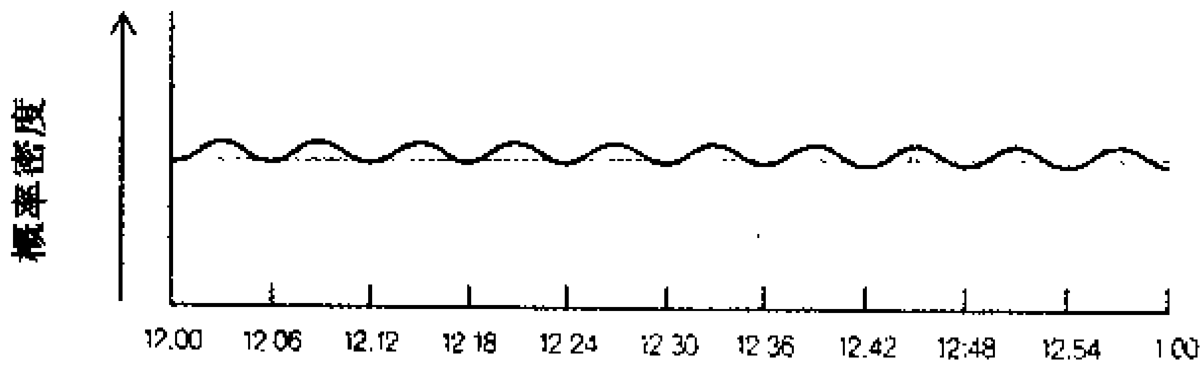
我应当指出,虽然这个例子是完全人为的,它决不是没有意义的问题.若将两个成员推广为多个,则它类似于统计力学中一个重要的未解决的问题(但远为简单),它的解决将对物质相变的理论——例如,从固态变到流态大为有益.



两位郊区朋友计划在中午 12:00 到下午 1:00 之间在一间图书馆前会面的可能到达时间可在图上画出.一位的到达时间用铅直值表示,另一位记作水平值(以 1 小时为单位).有色区域对应于会面.为了相会他们必须互在相差不到 10 分钟之内到达图书馆.正如你能看到的,如果一位于 12:20(在铅直线上从下往上走三分之一)到达,而另一位于 12:40(在水平线上从左往右三分之二)到达,他们将见不了面,因为点$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$落在阴影区域之外.



如果只有一列火车于 12:20 开来,概率密度曲线说明到达时间的不可预测性的程度. 最可能在图书馆相会的时间是 12:35. 阴影部分的面积表示从 12:40 到 12:44 之间到达的概率.



火车每六分钟到达一列给出的密度曲线由黑线表示. 有色直线是如果到达时间是等可能的,这样的"曲线"就成了有色直线.

如果我们假设两位朋友中每一位都可能于 12:00 到 1:00 之间的任何时刻到达,我们可以像布封投针问题中那样作出一个几何"样本空间". 其中一位可能到达的时间记在 x 轴上,另一位记在 y 轴上. 我们于是可以把每一对可能到达的时间用正方形图中的一个点来标明. 位于正方形中表示到达时间相差不大于 10 分钟的部分的那些点意味着会面;所有其他的点意味着"不相会". 如同投针问题那样,取面积之比为概率,我们能算出两位朋友相会之概率为 11/36——不到三分之一.

这个例子说得很清楚,我们已经做了两个不同的假定. 让我们在一个更为一般的背景下来分析它们.

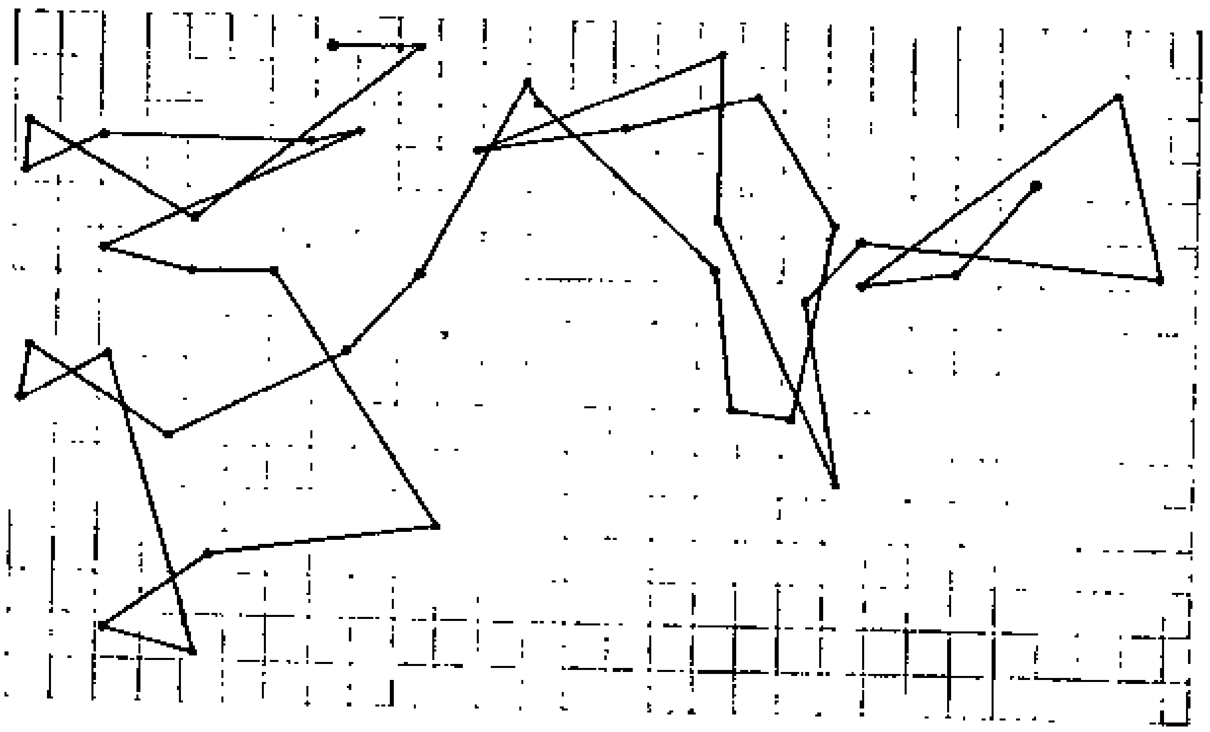
很一般地说来概率论作为一门数学分支是讨论复杂事件的概率计算的问题的,所谓复杂事件是由其概率已知或已假定的"初等"事件所组成的集合. 例如,抛两枚骰子出现 10 是一个"复杂"事件,它由三个初等事件组成:(1)第一个骰子出现 4 面第二个为 6,(2)第一个骰子出现 5 面

第二个也是 5,(3)第一个骰子出现 6 而第二个出现 4. 我们的两个朋友相会也是一个复杂事件;而两位朋友之一于 12:20 到 12:25 之间到达则是一个初等事件的例子.

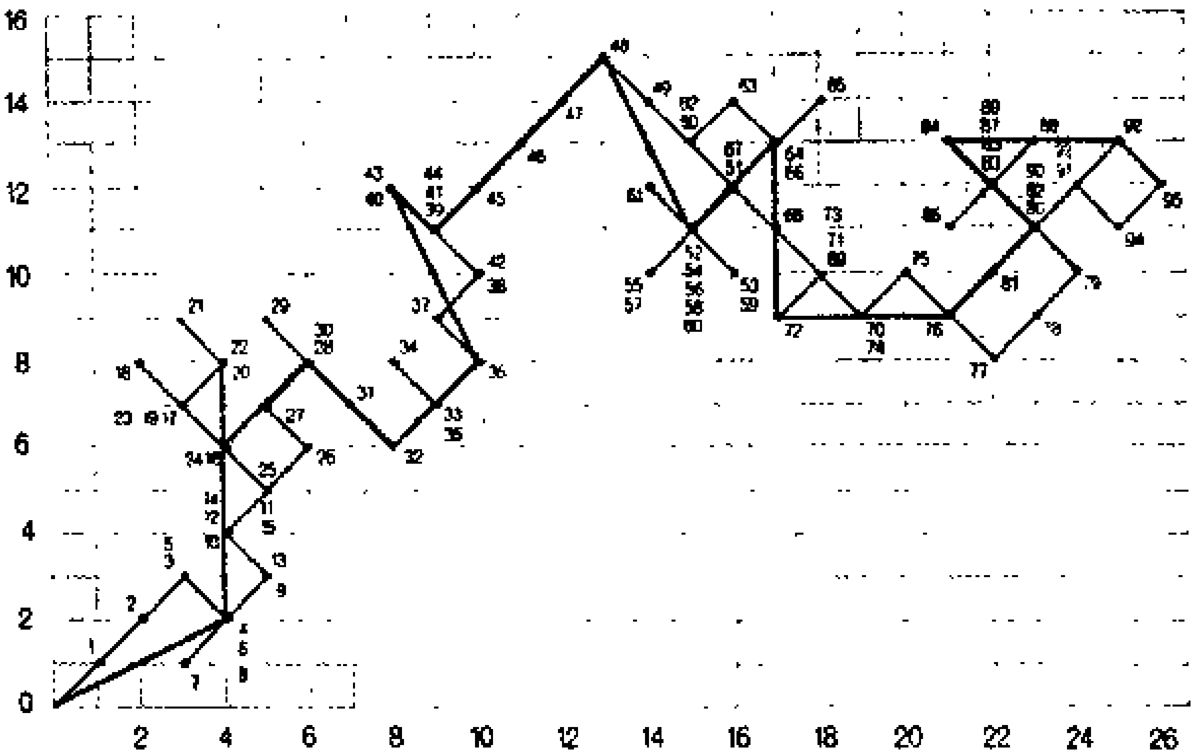
在我们的两位朋友会面的概率计算中,我们做的第一个假定是这两位中的每位在 12:00 到 1:00 之间任何时刻均能到达,所有的到达时刻是"等可能的".(关于骰子的对应假定是每个骰子的六个面的每一面以相同的概率出现.)但是如果限制每个人只有一列火车按行车时刻表在这一小时之间到达中央车站(比如说是 12:20 或更晚),那么这个假定便是完全不现实的了:他将肯定地不会在这小时的前半小时到达. 这个情况对应于两枚骰子灌了铅了. 另一方面,如果行车时刻表中有六列火车从 12:00 起每隔 10 分钟到达一列,并且如果它们有时也会偶然误点,这个假定便比较合理了,虽然如此可能还不能严格地说所有到达时间都是等可能的.

我们所做的第二个假定是两位朋友的到达时间是互相完全地独立的. 这个假定与第一个一样是非常重要的. 用数学术语来说,它反映了概率的乘法法则. 这个法则说,当单个事件之间是互相独立的时候,它们同时出现这一复杂事件的概率是单个概率之乘积.(实际上从严格的逻辑观点来看,这个概率的乘法法则就是独立性的定义.)抛掷两枚骰子时是假设了独立性的(预先假设了它们之间没有任何联系),同样在两个郊区朋友进纽约的实例中也如此(假设他们都不知道对方选取的特定车次而将他们的到达时间事先就"配合"起来).

应当注意,在掷骰子问题与朋友会面问题之间有一个重要区别. 在第一个情形可能的结果是有限的(正好 36),而在第二个情形是无限的,在这一小时内的任何瞬间到达时间均可发生;这就是说,其样本空间是一个有着无限多个"点"的连续统.



布朗道路是一个粒子被周围的液体或气体分子"踢了一脚"时所选的道路. 布朗运动作为一个随机过程(它连续地依赖于时间而变化)能够用概率论的技术来分析和建模(说明如下图).



布朗模型可从抛币的记录来构作. 用到一枚硬币作两个抛掷系列，每个系列各含 90 多次抛掷，一个系列的结果标作水平值，另一为铅直值. 标点的方法如下：如果掷出反面就从已累积起来的总数中减去 1，掷出正面时则从累积的总数中加上 1. 头三掷两列均为正面，而第四掷水平方向为正面，铅直方向为反面. 黑点上的数目为抛掷数. 有色线标出每掷四次后的“位置”，正如用一架相机来记录一个布朗运动的粒子的踪迹时只显示出这个粒子被围绕它的分子得到的“踢脚”的很少几个摆动着的位置. *

为了能够进而计算概率，引进了两个非常普遍的法则或公理. 第一个涉及互斥的事件：即一个事件发生时另一个一定不发生. 在几个互斥事件中至少有一个发生的概率为单个概率之和(加法公理). 第二个涉及一对事件，这一对事件中前一个发生蕴涵着后一个也发生. 在这种情形，后一发生而前一不发生的概率为较大之概率(后一事件)减去较小之概率(前一事件).

现在，这些计算复杂事件的概率的法则与几何中计算面积的法则是一样的. 我们可以用“集合”一词代替“事件”并用“面积”或“体积”代替“概率”. 于是问题变成对集合指定适当的面积，而这是测度论的领域. 其所以今天称为测度论，是因为现在“测度”一词已用来表示很复杂的集合的面积.

如果我们回到郊区两朋友问题，我们注意到对应于他们相会的集合是很简单的. 其面积，或

* 译注：这段译文作者作了一些文字改动.

概率，在欧几里得的基本构架中就有了，而且其计算可基于仅为有限个互不交叠的矩形的操作. 在布封投针问题中，因为有兴趣的区域是由曲线所包围的，人们必须用到无限多个矩形，但是其面积之计算仍然相对简单并且所要求的不超过初等微积分. 有关由波莱尔和勒贝格发展的测度论的令人吃惊和令人振奋之处是仅仅假设无限多个不相交的集合的测度应当是各个测度之和(对应于要求无限多个互相排斥的事件出现一个之概率，应当是各个事件单独出现的概率之和)，这就可能对极为复杂的集合指定其测度.

因为这一点，测度理论打开了一条道路来提出和解决在概率论中拉普拉斯时代曾是不可想像的问题. 作为例子，这里是在 1920 年代和 1930 年代受到很大关注并且对于将概率理论带向数学的主流作出巨大贡献的一个问题.

考虑无限级数

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots.$$

大家都知道这是一个发散级数；就是说，只要一项项加下去，加的项数多了，其和就可以超过任何给定的数.

假设各项的符号不全取正，面随机地根据一枚诚实的硬币的独立的抛掷的结果取正负号. 所得级数将收敛的概率是多少? 这就是说，将级数的项数扩展到越来越多，这些项的和将越来越接近某个终极的数的概率是多少?

为了回答这个问题你必须考虑所有可能的由正面和反面组成的无限序列作为样本空间. 一个序列可能开始为：$HHTTTHTH\cdots$，其中 H 为正面而 T 为反面. 若令 H 对应正号而 T 对应负号，则上述级数成为

$$+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\cdots.$$

对每个这种序列我们可以相配一个在 0 与 1 之间的实数 t，t 可以表为一个二进制小数，其中数字 1 表示 H 而数字 0 表示 T. 于是上面说到的序列可写成 $t=0.11000101\cdots$. 二进制数形成一枚硬币的独立抛掷的一个模型. 现在那些得到收敛级数的 t 形成一个集合，而落入这个集合的 t 的概率就是这个集合的"测度". 现在我们知道那些使级数不收敛的 t 所成的集合是很稀疏的，它的测度或者说概率是零(虽然这个集合有很复杂的构造并且远不是空集). 因此这个问题的回答是，当上述级数有随机给定符号时，它收敛的概率是 1.

上述的例子是"可数概率"的问题，就是说，所论及的事件由离散的项所描写. 在过去的二十年中数学家们继续在做一项更富成果的研究，即关于"随机过程"的理论的研究：关于依时间而

连续变化的现象的概率性分析. 随机过程产生于物理学,天文学,经济学,遗传学,生态学和许多其他科学领域. 随机过程的最简单和最著名的例子是一个粒子的布朗运动.

最近刚去世的维纳(Norbert Wiener)想到一个主意将布朗运动理论建立在所有连续道路的集合的一种测度理论上. 这个主意对概率论而言已被证明是极富成果的. 它将新的生命注入了老的问题之中,诸如"任意"形状的导体的静电位势的确定,这是一个占据了许多著名数学家的心头超过了一个世纪的问题. 此外,它开拓了许多全新的研究领域并且引导到概率论和数学的其他分支之间的令人陶醉的联系. *

单独一篇文章只能触及概率论的很少一点主要发展和问题之例. 今天这个课题已包容了大量新的领域,如信息论,排队论,扩散理论和数理统计. 看到概率论已经成为工程师的不可或缺的工具,同时又是纯粹数学的一个健壮成长且目前已提到高度形式化和十分严格的高水平的分支,人们就可以认识到它的地位了.

我打算用有关概率论的哲学方面(关于这方面有大量的课题已经写出了许多著作了)的一个简略评论来结束我们的话题. 其哲学含意可以很好地用一个特定的问题来阐述,而我打算讨论的是关于物质行为的热力学与力学观点的一个冲突有关.

考虑两个容器,一个内装气体,另一为真空. 如果这两个容器用一管子连接并且管中阀门突然开启,将发生什么? 根据热力学第二定律,气体从容器 A 冲向容器 B 按指数率直到两容器之压力一样. 这是熵增加定律的一个表现,它用很悲观的方式预言宇宙中所有的物质和能量最终将耗尽而安息,这就是克劳修斯(Rudolf Clausius),第二定律的创立者之一,所称的"热寂"(Wärmetod,直译为"热的死亡").

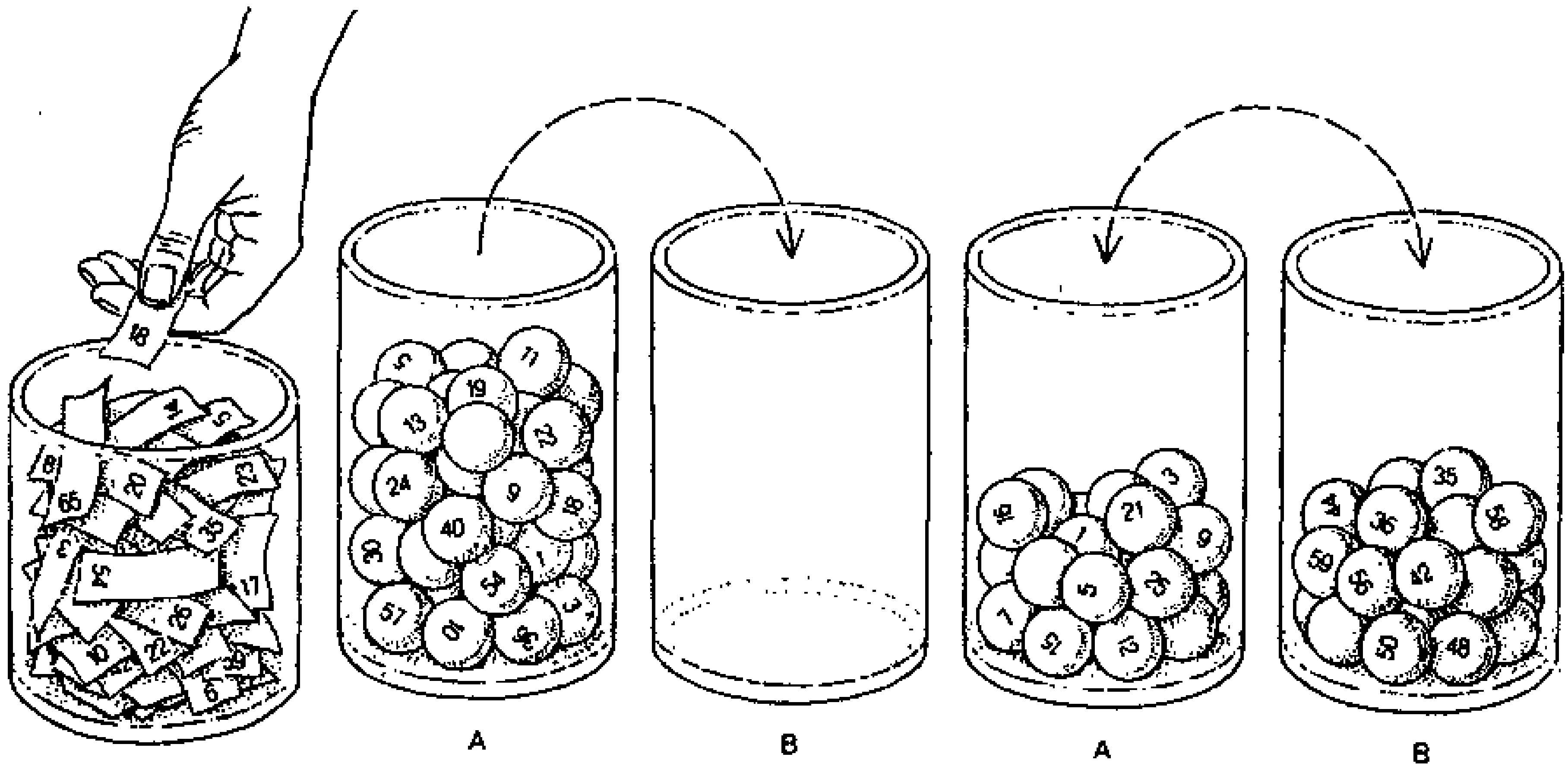
然而,力学或运动学关于物质的观点用完全不同的方式描绘这个情景. 的确,气体的分子倾向于从较高压力的区域移向较低压力的区域,但是其运动并不只是一个方向的. 分子碰撞墙壁以及互相碰撞,结果按随机方向移动,并且那些进入容器 B 中的分子既会呆在那儿也同样会漫游而回到容器 A 中. 事实上,庞加莱证明了一个数学定理,像这样的一个动力系统最终将回到任意接近它的最初始的状态,使所有或基本上所有的气体分子返回容器 A.

保尔和塔吉安娜·艾伦费斯特(Paul and Tatiana Ehrenfest)于 1907 年用一个简单而漂亮的概

* 译注:维纳生卒年月为 1894—1964. 这里讲的是所谓维纳测度理论. 它开始了所谓"随机分析"这个广泛的数学分支. 它在物理学、工程学……中的作用远不是本文作者 1964 年所能设想的了.

率性的模型来说明这个看法. 考虑两个容器 A 和 B,A 中装有大量编了号码的球而 B 中没有球. 从另一个装有写有数目的小纸条的容器中随机地抽取一个数(比如说 6),然后将标有该数的球从容器 A 中转移到容器 B 中. 将纸条放回,然后继续用这个办法玩此游戏,每一次随机地抽出从 1 到 N (最初在容器 A 中的球的总数),然后将标有该数的球从它现在所在容器转移到另一容器.

直观上显然只要 A 中球比 B 中的多很多,则抽到一个数对应于 A 中的一个球之概率将会适当地高于 B 中的. 因此,一开始球之流动肯定地是很强地从 A 到 B. 继续抽下去,找到抽取的是 A 中的数的概率将依赖于已进行过的抽取而改变. 概率依赖于过去的事件的这种方式称为一个马尔可夫链,并且在我们考虑的这个游戏中,所有有关的事实可以明显地且严格地被演绎出来. 结果是这样,平均来说,容器 A 中球的数目按指数率减少,正如热力学理论预见的,直到大约一半的球进入了容器 B. 但是计算还表明,如果这个游戏玩得足够长久,则所有的球最终将回到容器 A 的概率为 1,这正如庞加莱的定理所说!



艾伦费斯特模型是为了解释马尔可夫链而讨论的一个游戏,按照随机地从第三个容器(左)中抽取的数目从一个容器向另一个容器转移小球. 只要容器 A 中的球比容器 B 中多得多,小球的流动将强烈地从 A 到 B. 按照抽得的数在 A 中找到该球的概率是随着过去的抽取而改变. 概率的这种依赖于过去的事件的形式称为一个马尔可夫链.

平均来说过多久它将回归到初始状态? 答案是抽 2^N 次,即使当球之总数 N 只是小到 100,这也是一个大得不得了的数. 这解释了为什么自然界中的行为当我们观察它时只往一个方向移

在一台电脑上玩有 16 384 个假想球的艾伦费斯特游戏. 做 200 000 次抽取只用了两分钟. 开始所有的球在容器 A 中,每抽取 1 000 次后 A 中的球数用一个小点来记录. 它按指数函数衰减直至在每个容器中有 8 192 个球(总数之一半)而达到平衡. 此后波动就不大了.

动而不是来回振动. 人类的历史较之要使自然界反转其自身所需的时间来说是短得可怜的.

为了用实验来检验理论计算,可以在一台高速计算机上玩这个艾伦费斯特游戏. 开始容器 A 中有 16 384 个"球",每一段抽 200 000 次(在计算机上用了不到两分钟). 每抽 1 000 次后记下容器 A 中球数而得一条曲线. 正如所期望的,这条 A 中球数曲线下降几乎完全是指数的. 当数目接近达到平衡水平(即 8 192,即原来数目之一半)后这条曲线变得摆动,随机地上上下下围绕这个数波动. 这些波动有时被计算机的不正常行为放大了,然而它们实际表示了 A 中球数出现的波动.

那些小的反复无常的漂移正是自然界的可变化性的模型. 所有这些状态都在我们的现状与热寂状态之间. 而按热力学第二定律,我们是注定要进人热寂状态的! 概率理论已经调和了热力学与动力学关于自然界的见解之间的表面冲突,它指出如果灵活地解释第二定律,则它们之间并不存在真正的矛盾. 事实上,概率理论在 20 世纪的发展已经改变了我们的态度到如此程度,我们不会再企望自然的定律是僵硬的独断论的定律了.

25.

统计学

韦弗尔(Warren Weaver),1952 年 1 月号

统计的思考有朝一日将与读和写一样成为具有公民资格者所必备.

威尔斯(H. G. Wells)

存在两种主要的逻辑思维形式——演绎和归纳. 第一种主要归功于古希腊人,他们最先清楚地懂得并揭示了:提出一般的公理或假定,再从这些公理或假定演绎出很有用的一系列蕴涵于其中的命题,这种演绎思维形式的伟大的力量. 归纳的思考曾被称为"智力解放的第二个伟大的阶段",直到 18 世纪末尚未开始成为人类的系统的工具. 归纳法处理事情与演绎法的方向相反. 从经验的事实开始,它引导我们推断出一般的结论.

演绎的推理是确定的和绝对的. 它的特定的推断从其普遍的假定不可避免地导出. 另一方面,归纳的推理是不确定的推断. 归纳推理是从具体的经验和特殊的事实出发的,一般说来并不肯定能导致无条件的普遍结论. 更恰当地说,它们导致关于各式各样的普遍结论的似真性的评判.

培根(Francis Bacon)是第一个适当地强调了归纳方法作为科学方法的基础的人,但是直到 1763 年英国牧师贝叶斯(Thomas Bayes)才为逻辑学的这个分支给出了第一个数学基础,才被人们接受. 为了对贝叶斯之所为有一个概念,让我们看一个完全人为的例子. 假设你有一个封闭的盒子,装着许多黑色的和白色的球. 你不知道黑球白球的比例,但有理由认为黑球和白球大约为等量的赔率为二比一. 你到盒子里面将球取样,发现样本中四分之三为黑色. 好,在抽样之前你强烈地倾向于认为未知的混合物是半白半黑. 而在抽样后你显然应该改变你的想法,并且开始倾向于这样的看法:盒于里黑球数目比白球多. 贝叶斯得到一个定理,它确切地指出应当如何

地用抽样的证据来修改实验以前所持有的见解. 虽然这个定理本身的用处已证实是很有限的，但它是整个现代统计理论从而是归纳推理的数学理论的发端.

统计学究竟是什么，你会问，难道统计学是如此一般和深奥的东西吗？难道统计学不只是宣传者企图使我们信服，或者甚至有时是欺骗我们所用的数值信息吗？

统计学一词有两个略有不同的意义. 在熟知的用法中，确切地说，统计学的确意味着仅仅是数值信息，通常用表和图来表示. 在此意义下我们说《世界天文历书》包含一大批有用的统计资料. 但是更广些说，并且更技术地说，统计学是讨论不确切推理的科学和艺术的名称——它用数去寻求有关自然界和经验的某些东西.

归纳推理之重要性依赖于这样一个基本事实. 除了平凡的例外，自然界的事件和现象是太多样了，太大量了，太广泛了或者太不可及了. 所以不能做出完全的观察. 正如《传道书》(旧约圣经之一篇)的作者说的："没有人能明白上帝从创世到末日的作为". 我们不能测出每一个地点以及所有时刻的宇宙射线. 我们不能在每一个人身上试验一种新的药物. 我们不能检验我们制造的每一枚炮弹和炸弹——至少，它们一试验就报销了. 所以我们必须满足于抽样. 在每一个科学试验中得到的测量组构成测量的无限集合(只要把同一个试验无止境地做下去，便能得到测量的无限集合)的一个样本. 这个潜在的测量的全集合被认作是总体. 人们对样本的兴趣几乎只在于它能透露有关它由之抽取的总体的某些事情.

有关样本的四个主要问题是：1)如何有效地并且清楚地描写样本？2)由这个样本的证据如何最好地推断有关整个总体的结论？3)这些结论有多可靠？4)如何取样本方能使它们尽可能地说明问题并且可以依赖？

问题1很好地涵盖了初等统计学的主题. 表，图，条横图和饼分图以及图解式的图表，它们很有用(但有时靠不住)，都是总结一个样本的证据的办法. 平均值和其他有关的量——算术平均值，中位数，众数，几何平均值，调和平均值，四分位数，十分位数，以及其他——对于类似的目的都是有用的；同时这些也必须谨慎使用，要考虑它们是否确实说明问题. 例如，普林斯顿大学某个班学生们毕业五年后年薪的算术平均值，如果这个班碰巧有一位年薪为50万的学生，就不是一个很有用的数字.

这一类的描述统计学都是一些泛泛的和含糊的问题，如"这儿搞得怎么样?"；而所得答案借用布里奇曼(Percy W. Bridgeman)的话来说，就是"什么都敢干，什么都不管"的颇好的例子. 不过只有当我们进到问题2，3和4时，我们才进入了现代数学统计学的核心.

这三个问题都需从不同的方面处理一个共同的问题:即,从一个总体中抽取和分析一个样本,关于那个总体我们能得知多少,并且有多么可靠?首先,关于一个总体何种类型的知识是可能的?

首先要记住,当我们在统计学中用总体这个词时,是指的数的一个集合——通常是一个很大的或者甚至是无限的集合——这些数是某些事物的测量值.在无限集的情形不可能把组成总体的所有的单个测量值一个一个地描写出来,并且通常在其他情形也不现实.因此,我们所做的是把类似的和接近类似的测量值并在一起,并说出在所有测量值中有此近似值的测量值占多大比例,有另一些测量值的又占多少,等等.这件事可以用一个表、一个图或者一个公式说出值的总体中落在所说的值的区间中的占多大比例来完成.当这是用图来完成时,其结果是一个频数曲线,它描写所论总体中之测量值的分布.用得最广泛的总体分布是所谓正态的或者高斯的概率分布,它有着我们熟悉的钟形曲线的形式.一条频数曲线当然也能够写出它的数学方程来描写.

给出一个分布的一个缩略的描写是经常有用的.如果要求只取两条信息,则我们通常选取均值(统计学家称它为算术中值)和方差.方差定义为总体的所有测量值与总体的均值的差的平方的平均值.它是关于测量值分散程度的非常有用的度量,当分布紧密集中于均值时它相对地小,当分布广泛散开时它相对地大.方差的平方根称为标准差.一个小的方差当然总是意味着一个小的标准偏差,反之亦然.

统计学家通常用希腊字母 μ 作为算术中值的方便的记号,σ^2 表示方差而 σ 表示标准定差.在正态分布的特殊情形,知道均值 μ 和标准差 σ 就足够从一般的正态分布中挑选出所需的特定正态分布.因此对于正态分布曲线的数学公式除变量以外只需要两个参数 μ 和 σ.更复杂的分布可能依赖多于两个的参数.

运用刚才引进的概念,我们现在把后三个问题重述如下:

2) 运用一个样本提供的证据,关于该总体的分布我们能说些什么?

3) 能刻划这些估计的可靠性到何种程度?

4) 如何能选取样本使能产生最可靠的估计?

在进一步指出现代统计学理论能够给出这三个问题何种类型的答案之前,我们稍微停一下,再一次地而且在某种程度上更精确地考虑一下,那些只讨论我们的原始问题 1 的描述统计学家与那些讨论问题 2,3 和 4 的数学统计学家之间的关系是有好处的.

事实上描述统计学家为概括和描述一个样本而试图用模糊的和间接的办法来阐明总体的本质.因此他常常试图给出问题 2 的某种非正式的和不精确的回答;并且他时常成功地得到实际有用的方法.他与数学统计学家的区别在于他只用初等的数学工具,因此不能给出问题 2 的

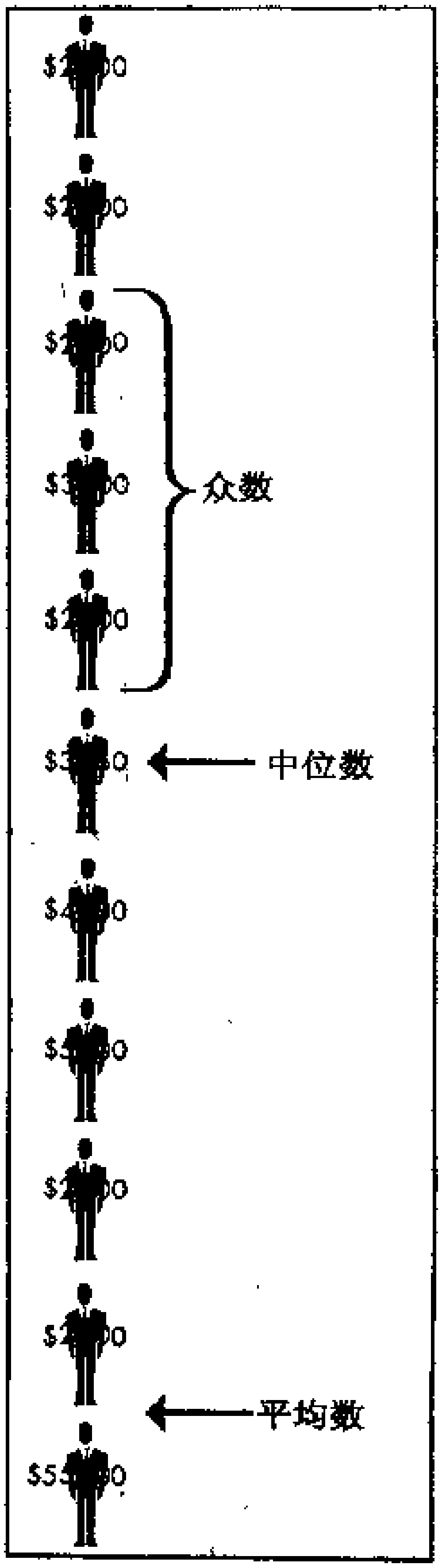
任何真正精确的答案. 而对问题 3 和问题 4 则完全不能给出任何答案.

从一个样本作出关于总体的推断的问题是一个概率论中的问题. 这个过程与有色球盒子的抽样这一人为实例之间存在着明显的相似. 重要的是应当牢记当你从未知的混合物中抽取一个样本时,你不能关于混合物做出简单的概率论的陈述,除非你开始时就对盒子里装的是什么有所知晓. 用技术术语来说,这意味着你必须在抽样之前就有了有关该盒中全部可能的混合物可能是什么的先验的概率. 正如我们前面曾叙述过的,贝叶斯定理提供了一个基础来修改这个原来的看法,但是去创始一个见解,它无能为力.

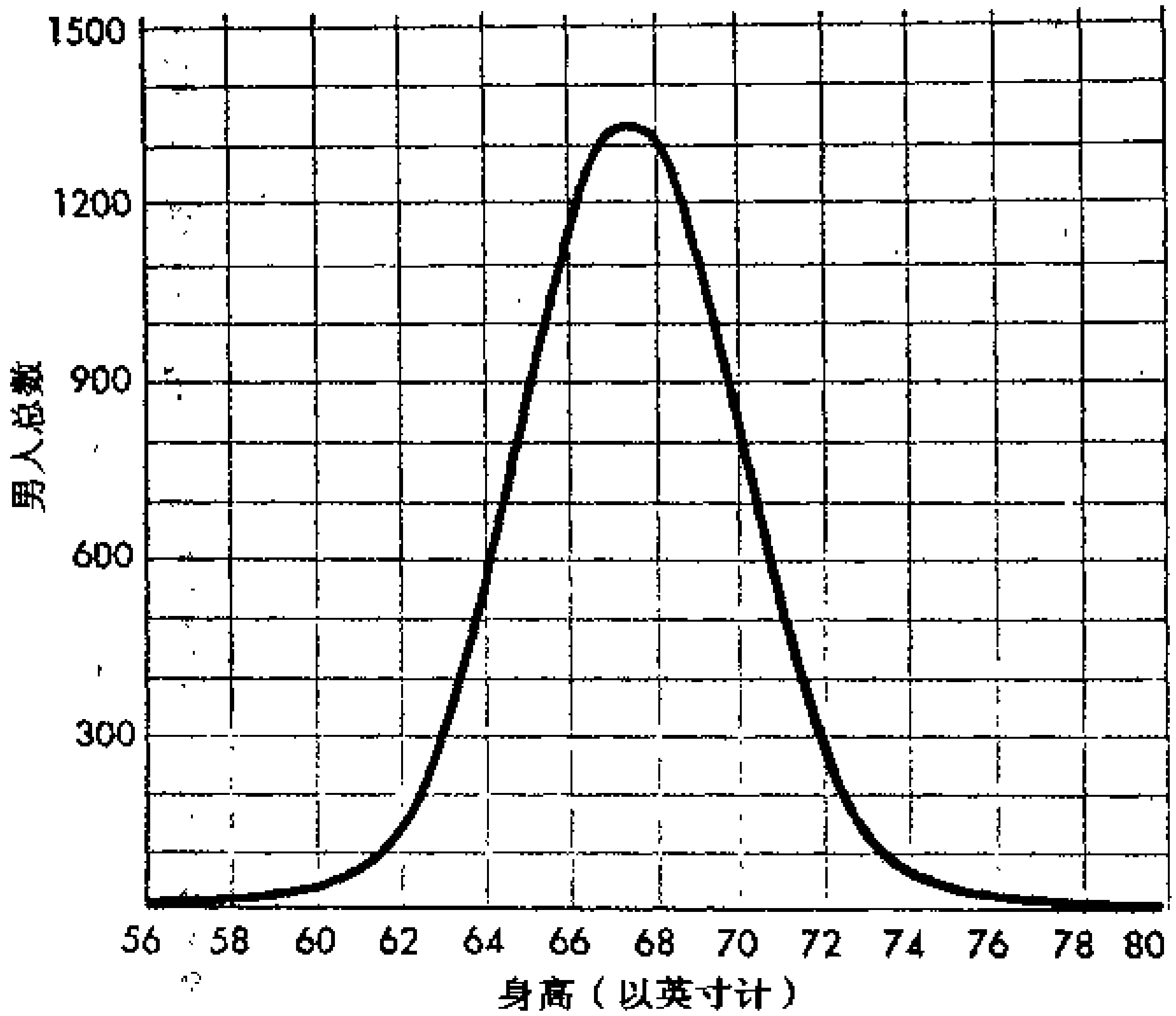
贝叶斯定理提供了一个深刻的并且简易的做法. 但是不幸,它很难得应用于统计理论的真正严肃的问题. 因为有理由认为在那种情况下,人们难得有关于先验概率的正面知识. 从而统计学必须求助于更为复杂的并且更为精致的定理.

显然统计学家不能够只凭抽取样本而确切说出母体会是什么样的,因为样本会变化. 例如,假设你从一个含有 60% 的白球和 40% 的黑球的混合物中抽取样本,你没办法在每次抽样时使得白黑之比率都为 60:40. 然而,对于一给定类型的母体和适当的抽样方法,可能在理论上得出样本的变化的模式. 这个有关样本变化的模式的知识给了统计学家一个立足点. 允许他考察样本并且做出有关母体的推断来.

变化的模式不仅依赖于被抽样的母体,它也敏感地依赖于抽样的方法. 如果你对美国家庭的规模有兴趣,并且只从八居室以上的豪宅中取样,显然该样本的模式是非典型的. 如果样本是用非典型的方法有意地挑选出来的,我们称之为在证据上做了手脚. 但是样本



上列 11 个人的薪水说明如何用单独一个数来刻划一组数: 薪水的平均数 (8 159 美元) 受到一个非常高的薪水 (50 000 美元) 的严重影响. 因此,这个平均值不如中位数(中间的一个薪水)或者众数(出现最多的那个薪水)更能代表这一组数.



有关 8 585 位男士的身高分布的频数表现为一个正态分布的曲线. 导出曲线的实际的点没有标注出来，图中表示的只是它们的一个理论的近似.

常常是很无意地用非典型的方法取得的，盖洛普先生(George Gallup)(美国统计学家)会记得这一点. *

一般来说抽样的唯一的好方法是随机方法. 在随机方法中样本是按照纯粹概率性的准则选取的，个人的选择与成见被完全排除. 假设电视机显像管在一个传送带上通过一位检查员，并且希望随机地平均每六个检查一个. 检查员可在每一个显像管经过他时抛掷两枚骰子，而仅当他抛得一对相同的数时取下管子去检验. 当然，平均来说每抛六次骰子会发生一次这样的事. 因此所选取的管子将是从全部管子总体中的一个随机样本.

现在我们必须注意一个有关随机样本的变化的模式的一个重要事实. 如果你有一个母体，它是正态分布的，有一个确定的均值和一个确定的标准差. 假设你从这个母体中取由确定数目 n

* 译注：盖洛普民意测验就是他首创的. 所以文中说他最理解有许多抽样都是由非典型方法取得的，尽管可能是在无意中作出的.

项组成的随机样本. 对每一样本计算其均值. 你会发现这个由均值组成的新的总体正如母体一样是正态分布的. 因为有一个平均过程已经参加进来了，它比原来的母体聚集得更为紧密. 事实上，其标准差可以其母体之标准差除以每个样本中的项数 n 的平方根而得. 因此，如果每个样本包含 64 项，这些样本的均值的标准差将是母体的标准差的八分之一.

从一个正态母体所得样本其均值自身也正态分布，这一事实告诉我们正态分布的母体有一种再生性. 它们的后代(样本)继承着它们的最重要的特点(正态性). 并且使人高兴的是进一步可知从几乎任一类型的母体抽取大的样本，它们的均值也有几乎正态的分布.

样本模式的重要性能够容易地用制造业中的具体例子说明. 一个生产者制造了大量的零件，它们的某个尺度应当为一英寸而且精密要求很高. 对此产品测量其随机抽样. 如果这些样本的均值一贯地超过一英寸，生产者会知道在他的生产过程中存在着某种系统误差. 但是如果这些样本的均值正好是一英寸，并且当其母体自身是围绕均值一英寸正态分布时，样本均值正是理论上预期的分布模式. 这时，这位生产者可以做出结论，系统误差已经被消灭，而且他的制造过程已"得到了控制".

抽样不只是为了方便，通常这是讨论问题的仅有的可能方法. 在社会科学中它特别开启了用别的方法不能达到的调查领域. 英国的劳工部只从 9 000 个家庭在四周期间的开支的详细数字中就能够对全国劳动家庭预算作出最有用的研究. 没有抽样，这样的研究将完全不能实行.

回到我们的主要论题. 我们现在已作好了准备来讨论问题 2 和 3.(我们将省略问题 4，它基于试验设计，因为它是一个大问题会使本文变得太长.)

假设已知一特定型号的电子管的平均寿命是 10 000 小时而标准差是 800 小时. 现在工程师开发了管子的一个新设计. 检验了由 64 个新型号管子所成的样本，这个样本中的 64 个管子的平均寿命为 10 200 小时，比老母体之平均寿命长 200 小时.

现在该新设计可能实际并不比老的长寿些. 在这情况下，那 64 个的样本只是碰巧比平均的样本要好一些. 显然那些工程师想知道表现出的 200 小时的改进是真的还是只是一个偶然的变化.

人们能够用比较实际偏差与标准差的办法来估算平均寿命之变化离偶然性有多远. 因为由 64 个产品组成的样本的均值的标准差是母体标准差的八分之一，在这情形，这种样本的均值的标准差将是 800 的八分之一，即 100 小时. 因此我们的新型管子的样本中的 200 小时的表面的改进是这种样本均值的标准差的两倍.

概率理论告诉统计学家，在样本和母体的均值之间仅由偶然机会产生这样大小的差别的赌

率是 19 比 1. 他于是报告说:"看来这样的结论似乎是明智的,未曾发生比较少有的事件. 相反,那 64 个的样本来自一个新的有着较高的平均寿命的母体. 换句话说,我的结论是新的设计可能是一个改进."

这是处理这类情况的一个普遍使用的办法. 刚才的推理中,还有各种各样的弱点,但都相当复杂而且精细,但是我们现在不去说它们. 处理同一问题的较为令人满意的办法是应用统计估算的现代理论,它用到所谓置信区间和置信系数. 这里统计学家是这样作的:他说那 64 个的样本来自一个新的母体,假设它为正态的,但其均值和方差未知;同时他很想知道有关这个母体的均值的情况,因为那信息会帮助他做出结论,那个新设计是否是一个改进.

现在我们必须记住统计学处理的是不确切的推断. 我们不能期望统计学家做出绝对肯定的结论. 我们必须期待他对我们的问题总是给出两部分答案. 这个回答的第一部分是:"我最好的估计是……."这个回答的不可或缺的另一部分是:"你有根据相信我的估计的可信程度是……"

因此我们毫不惊讶,统计学家一开始就选取了一个数. 他称之为置信系数. 例如,他可能选取置信系数为 0.95. 这表示他打算采纳一系列行动,它们平均来说会是百分之九十五地正确. 因此我们知道我们认定他的结果能有多大信心. 已经确定了这个数目,统计理论现在为他提供了一个宽度,所谓置信区间,其中点是样本的均值. 在我们的例子中这个区间是 10 200 加或减 195 小时,即是从 10 005 到 10 395 小时. 然后,统计学家回答问题 2 和 3 如下:"我估计新设计的管子的寿命所成的母体的均值是大于 10 005 小时并小于 10 395 小时. 我不能担保我是正确的;但是在多次这种陈述中,我每一百次会有 95 次是对的. 因为这个范围高于老管子的平均寿命,我结论新设计可能是一个改进".

如果该统计学家最初曾决定采纳一个过程是百分之九十九地正确,他的置信区间会宽些. 他能够做出一个稍为不那么精确的陈述,但使它有更大的可信性. 反之,他可以安排做出一个稍为精确的陈述,但可信性较小.

最后,让我们用更为精巧的、被称之为"统计假设检验"的方法来考察这同一问题. 这里人们可以对情况开始作某种类型的猜测,然后通过一个统计的推理看一看它是否敏感,以及敏感到什么程度,以便决定是取消还是保持这个猜测.

因此该统计学家可以试一试假设这个新设计的管子平均寿命与老的相等. 当然他希望这是不正确的. 虽然这听起来有点荒谬,但事实上人们总是习惯于从一个人们想要推翻的假设出发.

这里正如前面的情形一样,这位统计学家首先取一个数,它告诉我们在这个陈述中之可信性. 他实际用的是某种可称之为"不可信系数"的东西,因为它是测度预测错误次数的百分比,而不是预测为正确的百分比.

这个不可信系数专业上称为显著性水平. 设这位统计学家选取显著性水平为 0.05，这正好等价于以 0.95 作为可信系数. 然后他关于这个可信系数计算可信区间. 因为我们有类似于前面的可信系数，我们已经知道了这个特定的可信区间是从 10 005 小时到 10 395 小时. 然后这位统计学家报告说："老母体的平均寿命(10 000 小时)不在我的可信区间之内. 因此理论告诉我，应放弃原先的假设，即放弃新管子的平均寿命与老的一样这个假设. 这个原先的假设当然可能实际是对的. 但是，理论进而告诉我，说原假设是对的，而做我刚才做过的事情会犯错误，这种情形只有百分之五的可能".

这个报告，如果人们仔细地把它想过，是相当不完全的. 它说的是关于一类错误的概率，这错误就在于放弃了事实上是正确的假设. 但是它有关另一类错误什么也没说，这另一类错误就是当原假设事实上是错时接受了这个假设. 在某些情况下这两个错误之中有一个可能非常危险并且代价很高，而另一个则相对地无害. 还有许多合用的更为精细的统计学方法(如被称为内曼-皮尔逊(Neyman-Pearson)方法和判定函数理论)，用它们可以设计出一种检验，以便在估计这两个类型的错误的概率时有一个满意的折衷.

Ⅳ.

数学基础

引 言

数学史上，差不多每个阶段数学家都面临危机．这些危机是营造数学的方式引起的．

今天的数学大致可以比作一座摩天楼．然而数学家最初动工建楼的时候，没有破土，没有打下深深的基础，倒是把它直接搭在了泥土表面．这么做合情合理，因为那时没人想着日后的高楼，用泥土本身垫底看上去靠得住．况且数学家开头采用的建筑材料——关于数和几何图形的事实——看上去立足很稳，都是出自质朴无华的“土”经验．数学的历史来源本来如此，这在沿用至今的“几何”一词中依然清晰可见，“几何”是测量土地的意思．

但是，楼才耸出地面就露了馅：它是摇摇晃晃的，再扩建可能整栋建筑物都要遭殃．多亏古典时期（公元前 600 至 300 年）的希腊人，不单看出险情，而且补上了必需的加固工程．他们提出两项措施．第一，选若干条硬地，也好依条砌墙．这些硬地是自然界的自明真理．第二，把钢筋塞进构架．钢筋是每个扩建部分的演绎证明．

数学发展到希腊时代的高度，主体不外欧氏几何．这座楼事实上是稳的．也出过纰漏，就是某些线段长度奇特，比方说臂长为 1 的等腰直角三角形的对角线，其长必须为 $\sqrt{2}$．希腊人只知道普通整数，像 $\sqrt{2}$ 这样的东西不算数，他们不肯接受．为摆脱困境，他们把这些无理“数”赶出大门，断了替线段配长度的念头．

然而，历史事变强迫人重新考虑这个决定．首先，公元 600 年左右，印度人引进负数．随后，不及希腊人死心眼的阿拉伯人非但接受无理数，还制订了给无理数作运算的规则．文艺复兴时期的欧洲人拿过希腊人的、印度人与阿拉伯人的数学之后，下不了决心接受这两种外来成分．但欧洲史上的此时此刻，科学开始繁荣．像昔日的希腊人一样，欧洲人发觉数学在科学事业中攸关大局．再者新科学又应用到技术中，这些应用离不开定量的结果．几经踌躇，欧洲人才起用负数

和无理数;使用的成果越来越多,才克服掉有背逻辑的负疚感,用起来无拘无束了.欧洲人固然用这种经过推广的算术和代数扩建了数学楼,也在底下几层楼里用直觉的物理的支架换掉了希腊人的钢筋.尽管如此,变大的楼使游思浮想有了安稳的住处,反对负数和无理数的论调还是垮了台.

被成功搅得飘飘然的数学家冲进微积分、微分方程、微分几何、变分法,冲进数学分析的其他分支,仍旧一以贯之地拿直觉的物理的论据来支撑这些扩建的部分.怀疑这样造楼未必稳妥的聒噪,让达朗贝尔式的规劝压得哑然无声,他的名言是"向前走,你总会有信心的".可是,直觉到底无法胜任重负,墙上露出了裂缝.诸如此类的纰漏,在哈恩的文章里谈它们的性质.幸运的是,通过波尔札诺、哥西、魏尔斯特拉斯加工,上层建筑获得了改建.这次加工在数学史上号称分析的严格化.

上层建筑正在加固,墙基——希腊人选定的公理——却塌了.非欧几何的创造暴露出欧氏几何不是过硬的墙基,看似过硬只是勘查肤浅所致.非欧几何公理同样过不硬,丝毫也不更高明.数学家以为自然界是某种实在的东西,相信他们的心万无一失地支持着这种认识.事到头来,实在的东西竟是不可信赖的感觉材料.

还嫌数学家麻烦太少,想替空间向量找代数表示的哈密尔顿(见本书第7章的哈密尔顿传)又创造一种新的数,四元数.在此以前,每个数学家都会信誓旦旦地说,对任何种类的数 a 和 b,$a \cdot b$ 必定等于 $b \cdot a$.结果,这话对四元数不真.它对大约15年后创造的矩阵也不真.数学家这才忧虑他们是否过分天真就把普通数的性质接受下来了.回想当年全凭物理与直觉论据给数学添上负数和无理数,真叫人惶惶不安.照这么看,整栋数学楼——几何、算术及其向代数和分析的扩充——隐患严重.如今高而又高的这座建筑物大有陷入泥沼的危险.

维持数学的家宅非要措施得力才行,数学家起而应变了.很清楚,没有坚固的泥土能替数学垫底,因为"真理性"这块徒有其表的硬地是骗人的.但是,掏光浮土,另安一种坚固的基础,楼或许还能稳住.这种基础该是列举完备又措辞鲜明的公理和定义,加上一切结果的显式证明,无论它们在直觉上多么显而易见.另外,不要谈真理性了,应当代之以逻辑相容性,也就是数学家口里的一致性.定理与定理相栓相织,整栋楼拧成一股绳.不管它同泥土保持什么关系,它总是岿然一体,很像一座现代摩天楼,随风摆,但从下到上结结实实.这样,数学的力量就在它的一致性,不在它的真理性.数学家旋即着手这样一项改造,叫做数学的公理化,在蒯因的文章"数学基础"中进一步说明.

改造完成了,数学家兴高采烈.在1900年巴黎举行的国际数学家会议上,那个时代最杰出的数学家庞加莱得意洋洋地宣布:绝对的严格性已经到手.迄今为止数学史上最可怕的危机就

此解除;数学虽然有点丢脸,总算保住了老命.

庞加莱错了.在基础改造中,数学家雇用符号逻辑来保证语言与推理准确.这种新式用语没引起麻烦,但他们还用上了19世纪80年代康托创造的集论或类论.这个理论仿佛为公理化提供最清楚最安全的出发点,偏偏暗含着始料未及的缺陷.就在庞加莱炫耀数学臻于绝对严格的前后,恰恰在貌似上佳基础的集合论里,发现了矛盾或逻辑上不一致之处.无法面对严酷现实的数学家,婉转其词,把这些矛盾称作“悖论”.究竟是些什么悖论,可以查阅蒯因的“悖论”一文,还有他论数学基础的文章后一部分.

数学家当然不想坐视千百年的心血土崩瓦解,沦为废墟.他们成群结伙试行新的数学基础方案,以消除悖论为首当其冲的难题.既然公理化一再证明是许多数学分支的力量源泉,无怪乎用公理化处理法代替康托偏重直觉的构造法也成了改建集合论的第一着棋.这一着由策梅洛开始,不只是要设法消除悖论,还要设法解决集合论中悬而未决的其他问题,所谓连续统假设就是其中之一.然而,策梅洛用了通常所谓选择原理或称选择公理,它不合某些数学家的心意.

两个问题因而取得了相当重要的地位.第一,集合论经公理化达到的精致格式是不是足以证明或否证连续统假设.第二,选择公理对集合论的公理化是不是必要的.关于这两个问题人们先后学到什么,在科恩和赫尔希的文章中作了介绍.那篇文章讲解的大结果里,有一个是科恩本人得到的.

集合论中的这些结果,虽然本来至关紧要又给出了一条消除悖论的通道,却没有除掉困扰数学家的大心病:“数学一致吗?”除掉已知矛盾保证不了别的矛盾永不冒头.建立数学几大分支的一致性变成了数学基础中压倒一切的问题.

用批判眼光审查数学基础还产生一些新的争议.无穷集作为物自身看合不合法、排中律对无穷集适不适用、逻辑在数学基础中起怎样的作用,甚至一切数学的真正基础是什么这个总的问题,全都成了争论的题目.数学家采取判然不同的方案,试图了结诸如此类的是是非非.

有一阵子,20世纪最大的数学家希尔伯特首创的方案最有希望,似乎会了结所有的争端.可是,哥德尔的一个惊人定理将这个方案打得粉碎.哥德尔定理究竟怎么讲、怎么证,内格尔和纽曼的文章详细讨论.这里也许只需要说一说关键性结果:一致的一整块数学不能全部包含在一个公理化框架内.

如实叙述数学严格性的现状是要心碎欲绝的,我们没有那么做的勇气.数学家从伊利亚金·H·穆尔的话“够用一天就严格一天”找到了少许的安慰.为了赶走绝望情绪,他们靠幽默解嘲,妙语连珠:“逻辑是走错道而不失自信的艺术”,“我们不再能指望合逻辑,充其量能指望并非不合逻辑”,诸如此类,不一而足.

可怜,逻辑已经成了逻辑的手下败将,数学家却像一条狗追它自己的尾巴,还在不惜代价地雇佣逻辑去捉拿数学的逻辑哩.过去的危机解除了,可惜只是靠放弃数学的真理性.或许眼下的绝境将被揭穿是假相,用不着牺牲本学科这另一备受珍视的特色.或许未来的数学家不得不皈依少年老成的伽罗瓦在 19 岁上就表达过的主张:“数学是人的精神的苦差,命中注定,需要学习的不会比已经知道的少,需要探求的真理不会比已经找到的少.”

26.

几何与直觉

汉斯·哈恩(Hans Hahn),1954 年 4 月号

我们已经如此习惯现代科学的革命性,今天,要是什么理论冒犯了常识,我们倒容易认为这本身就把它证明了一半哩.在科学与哲学的语言中,代表常识的字眼儿是直觉——它指的是直接感觉到的现象或直接领悟到的道理.20 世纪的发现毫不留情地虐待我们关于物理世界的直觉信念.大家都期望,仍不失为直觉的堡垒的唯一领域该是数学.毕达哥拉斯定理依然完好无缺;就主体而言,自明的数学真理依然是真的.可是,事实却是,即使在数学里直觉也挨了棒.这里有来自古老的直觉概念*的悖论,也就是逻辑矛盾;让它们逼得走投无路的现代数学家也不得不改造思想,从此把立足点挪到不确实的崭新前提之上.

若干年前,杰出的奥地利数学家汉斯·哈恩在一篇维也纳小组讲话中概述过这种局面,原标题为"直觉的危机".**他的分析依然新鲜、适时,这里首次用英文发表它的一部分.最先鼓吹直觉重要的人是康德.哈恩从康德讲起,表明康德知识观的基础如何被现代科学"动摇了".时空的直觉说遭到了爱因斯坦相对论和物理学的进展的猛烈攻击,因为它们证明了不可能绝对准确地决定事件时空位置.接下去哈恩考察了康德的数学怎么被驳得体无完肤.他举几何为例来解释他的论点,在几何中"直觉逐渐丧失威信,最后全都被清除出去了".我们在此摘录他的讲话稿,稍加压缩,刊载于下.

---

* 译注:为行文统一,本文不用更常见的译法"直观概念"、"直观信念"等等.

** 译注:讲话时间不详,讲话稿 1933 年收入论文集《精密科学中的危机与改建》.哈恩此文极鲜明地表达了反对诉诸直觉的立场,但是应当注意,他从未断定直觉在几何、拓扑、分析中引起"悖论";他懂得说话要有分寸!

* * *

在(把直觉从几何中清除出去的过程)中,一个突出的事件是发现了怪异的曲线. 与以往视为直觉上确凿无疑的定见明明相矛盾,某些曲线在任何一点都没有切线,或者说——这其实是一回事——可以想像一动点在任何瞬间都没有一定的速度. 这里牵扯的问题直接影响着牛顿和莱布尼茨所创建的微分学的基础.

牛顿认为,动点在瞬间 t 的速度是随着一靠近它的瞬间 t' 无限趋向 t,t 与 t' 之间的平均速度所趋向的极限值. 莱布尼茨同样断言,曲线在 p 点的斜率是随着附近一点 p' 无限趋向 p,p 与 p' 之间的平均斜率所趋向的极限值.

现在问:这话适合每条曲线么? 它的确适合自古熟知的一切曲线,如像圆、椭圆、双曲线、抛物线、旋轮线等等. 但是不可一概而论,例如它并不适合这里画出的那么一条波动曲线(图 1). 在 p 点的邻域内,那条曲线波动无穷多次. 随着波趋向 p,波长和波幅无限缩短. 如果我们相继取越来越靠近 p 的点,那么 p 与(动点)p'之间的平均斜率就从正 1 经过 0 降到负 1,然后又从负 1 升到正 1. 也就是说,随着 p' 经过无穷多个波无限趋向 p,p 与 p' 之间的平均斜率在值 1 与值 −1 之间不停地振荡. 因此谈不上有极限. 或者说那条曲线在 p 点谈不上有一定的斜率. 换句话说,我们考虑的曲线在 p 点没有切线.

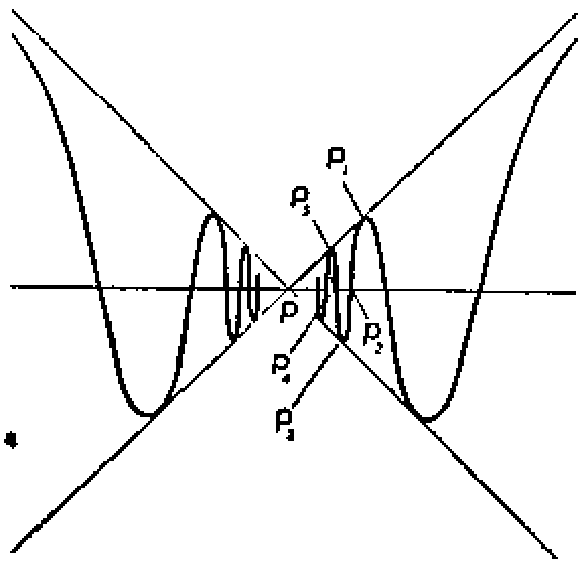


图 1

这个相对简单的实例证明了一条曲线未必在每一点都有切线. 尽管如此,我们还是习惯于凭直觉设想这类缺陷只会在曲线不合常例的点上出现. 所以,当柏林大数学家卡尔·外尔斯特拉斯于 1861 年宣布有一曲线在任何一点均无准确斜率或切线的时候,人们才深感意外. *外尔斯特拉斯是靠错综复杂的艰难计算发现那条曲线的,我不打算复述. 但是,他的结果如今也能用简单得多的办法得到. 这种办法,我打算讲讲,至少讲个大概.

我们从一条上升直线和一条下降直线组成的简单图形入手(图 2). 把上升直线换成一条共分六段的折线**,它先升到原直线高度的一半,然后一路降下,然后再次升到该高度的一半,继续

---

* 译注:用更抽象的数学分析术语来说,外尔斯特拉斯找到了一个处处不可微的连续函数. 哈恩原讲话稿里提到,早很多年,奥国人波尔扎诺已经独立获得了同样的结果.

** 译注:图上是把上升直线换成"五段的折线",而不是六段. 以下段数的计算也不对. 但这不影响本文的结论.

向全高度延伸之后，再次降回到一半高，最后又一次达到全高度(图 3). 把下降直线也换成一条与此相仿共分六段的折线. 我们于是得到 12 条线段的图形. 由此出发，再把各线段换成一条共分六段的折线，便又形成 72 条线段的图形(图 4). 容易看出，重复这种做法会产生一系列越来越复杂的图形. 可以证明，按这条规则构造的几何对象无限趋向一具备所求性质的特定曲线；就是说，它在任何一点都没有准确的斜率，因而在任何一点都没有切线. 这条曲线的这种特征当然是直觉全然不能把握的；说实在的，分段过程重复很少几次以后，渐趋形成的图形已经变得如此错综复杂，直觉简直无法领悟. 事实上，只有逻辑分析能够去追踪这个奇异的对象，直至捕获其最终形态.

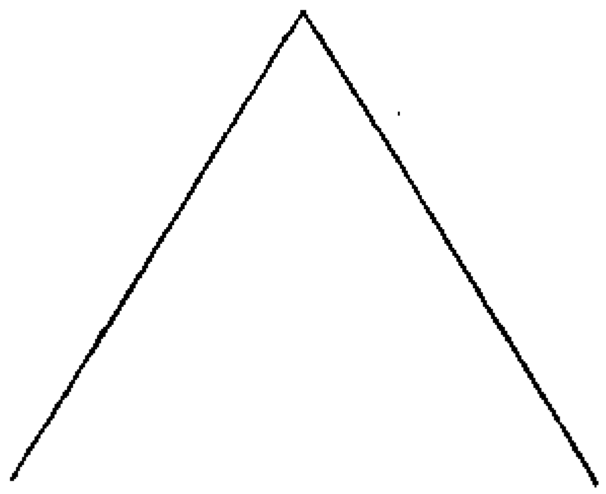


图 2

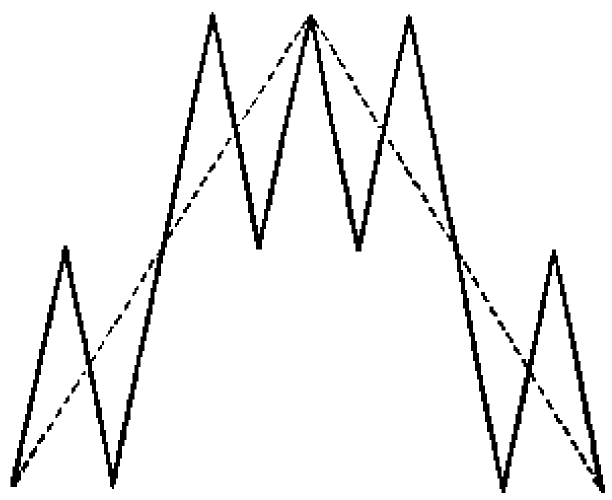


图 3

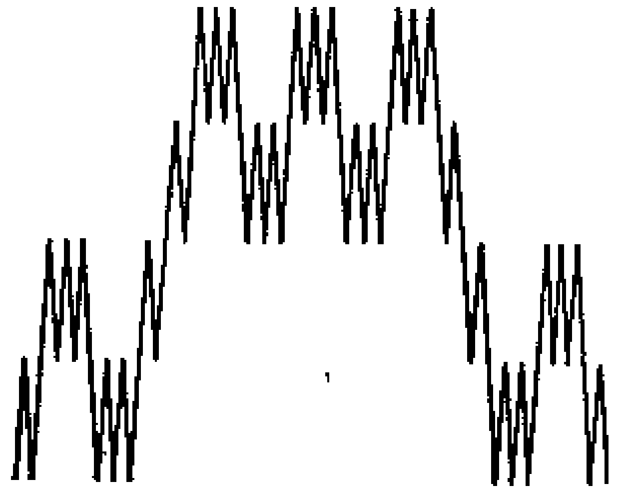


图 4

只怕有人要猜：直觉在比较复杂的数学分支中才会失败，我想来审查一下它在初等分支中失败的例子. 曲线概念位于几何的入口处；谁都自信他对什么是曲线有一个基于直觉的清晰概念. 自古以来人们就主张可以用下列定义来表达这个观念：曲线就是由一点的运动生成的几何图形. 且听分解吧！1890 年意大利数学家吉乌塞帕·皮阿诺(他也以他的逻辑研究出了名)证明，能由一动点生成的几何图形居然也包括整个儿的平曲面在内. 例如说，可以想像一动点在有穷时间内通过一个正方形上所有的点，却没人会认为整个儿的正方形无非是一条曲线. 我打算借助几张图来讲讲这种填空运动是怎么生成的，至少给大家一个笼统的观念.

把一个正方形划分成大小相等的四个小正方形，用一条由直线段合成的连续曲线把这些正方形的中心点联在一起(图 5). 现在想像一作匀速运动的点在某单位时间内走过这些直线段做成的连续曲线. 接着把这四个正方形各自划分成四个相等的正方形，得出 16 个正方形，再联接它们的中心点(图 6). 想像一动点在先前约定的同样时间内匀速走过这第二条曲线. 重复这种做法，每一次都想像动点在同一单位时间内匀速走过新的线系. 图 7 出示一偏后阶段，其时原正方形已经划分成 4 096 个小正方形. 现在可以严格证明这里逐次考虑的运动无限趋向一条曲线*，而动点只需给定时间内就能沿

* 译注：这样的曲线现在通称为皮阿诺曲线.

着它经过大正方形上所有的点. 这种运动决不是直觉能把握的，只能靠逻辑分析来理解.

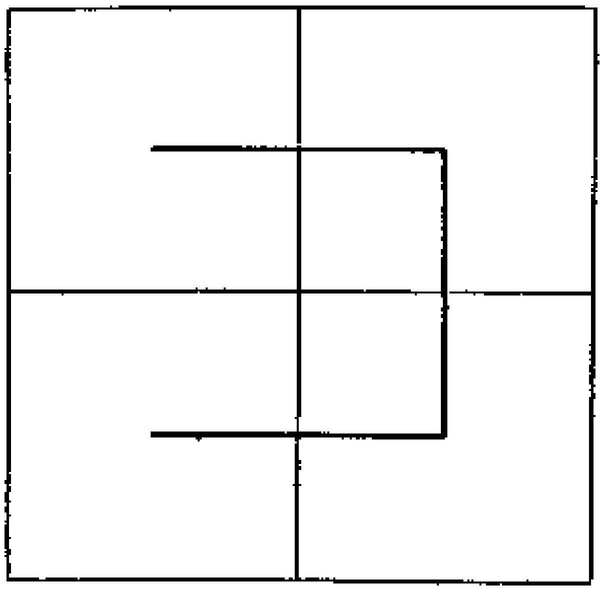


图 5

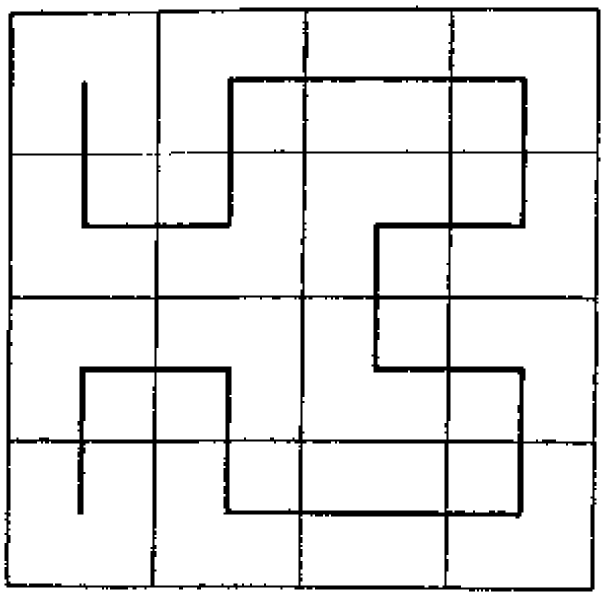


图 6

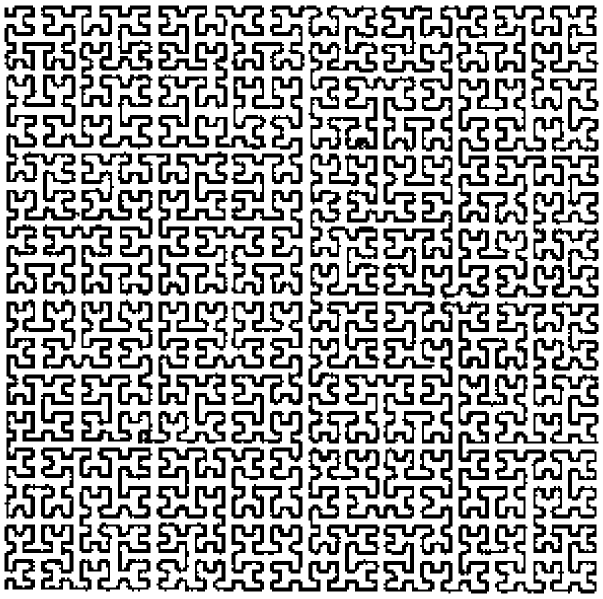


图 7

谁也不当曲线看的正方形之类的几何对象竟然能够由一点的运动生成，而谁都会毫不犹移地归入曲线一类的另一些对象反倒不能够这样生成. 例如说，观察一下这里出示的波动曲线（图 8）. 在线段 ab 的邻域内该曲线必含无穷多个波，其波长无限缩短，但波幅并不缩短. 不难证明，这个图形虽有线的特征，却不能由一点的运动生成，因为不能设想会有一动点在有限时间内经过这条波动曲线上所有的点.

现在自然要想到两个重要问题.（1）既然古老而备受尊敬的曲线定义囊括不了这个根本概念，什么耐用的定义能够取代它？（2）既然能由一点的运动产生的几何对象的类与所有曲线的类不相重合，该怎么定义前一个类？今天两个问题都有了满意的回答；我要暂缓回答第一个问题，先简短地谈谈第二个. 解决这个问题要借助于一个新的几何概念——"在小邻域中的连通性"*. 考虑一下直线、圆或正方形. 在所有这些情况，我们都可以沿一条通道从图形上的一点移到很接近它的另一点，这条通道不离开图形的界线而且始终紧紧地邻近那两点. 这种性质就叫"在小邻域中的连通性". 我们方才考察的那条波动曲线并不具有这种性质. 例如，取互相邻近的点 p 与 q（图 8）. 为了从 p 移到 q 而不离开该曲线，非走过它们中间

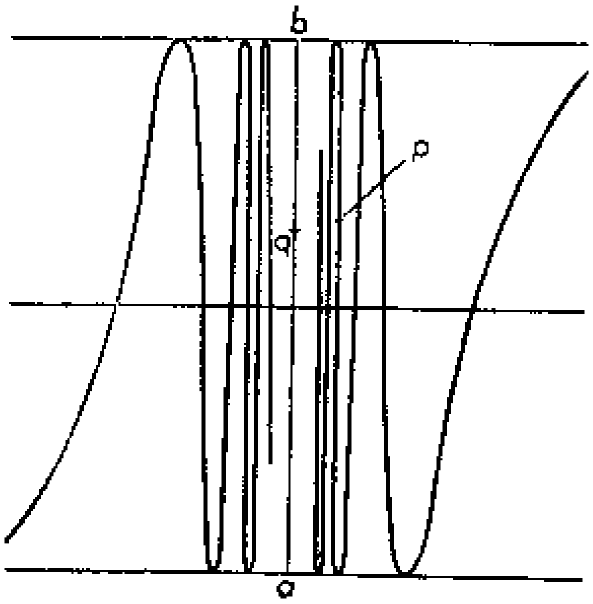


图 8

* 译注：也叫"局部连通性".

那无穷多个波不可. 这条通道上的点不全都是紧紧地邻近 p 和 q 的，因为波全都有相同的波幅.

重要的是懂得"在小邻域中的连通性"正是能由一点的运动生成的图形的基本特征. 直线、圆和正方形能够由一点的运动生成，因为它们是在小邻域中连通的；波动图形不能够由一点的运动生成，因为它不是在小邻域中连通的.

为了深信直觉甚至在这么初等的几何问题上也不足信，不妨再举一例. 设想毗邻三国的一幅地图(图 9). 这三国有一些交会点，就是所谓的"三国角区"，如像点 a 和点 b. 直觉似乎显示这样的角区只会在若干孤立的点上出现，地图内绝大多数边界点上只有两国接界. 可是，荷兰数学家扬・布劳威尔在 1910 年表明怎么能把一幅地图划分成在任何边界点上都相互接界的三国！

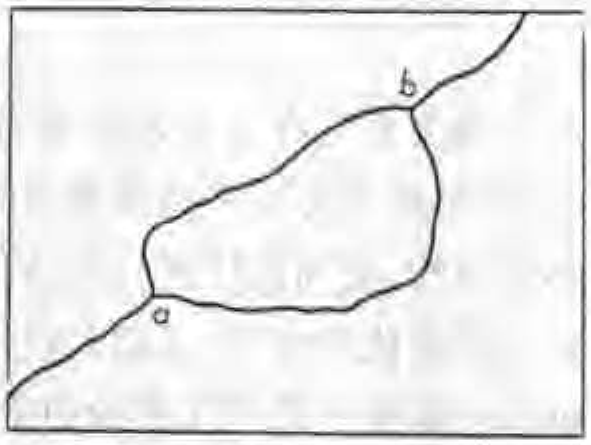


图 9

从一幅三国地图入手，一国划线(a)，一国打点(b)，一国是实心的(c)，还有一块与三国毗邻的未占领区(图 10). a 国想把这块土地纳入它的势力范围，决定开辟一条走廊，与未占领地带的每一点相距不超过一公里，但是，为了避免纠纷，不去侵犯另外两国(图 11). a 国这么干之后，b 国决定以牙还牙，也向剩余的未占领地带插进一条走廊，与所有未占领点相距不超过半公里，但是不同另外两国接界(图 12). 于是 c 国不甘人后，决定也向尚未占领的地带伸出一条走廊，与这个地带的每一点相距不超过三分之一公里，但是不同别国接界(图 13). a 国现在又向剩余的未占领地带开辟第二条走廊，与这个地带内所有的点相距不超过四分之一公里，但是不同另外两国接界. 占地过程持续不止：b 国又伸出一条走廊，与每一未占领点相距不超过五分之一

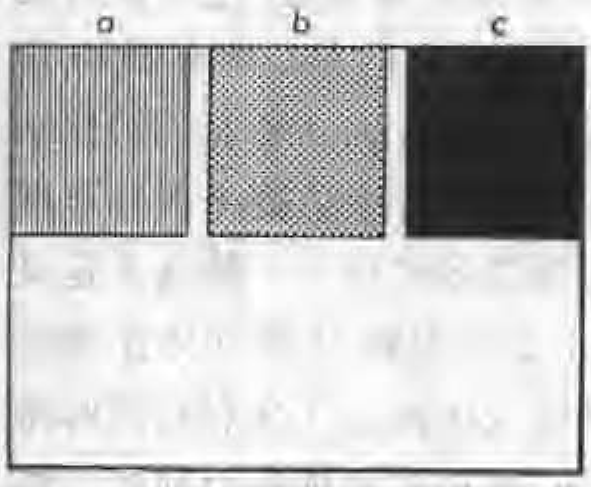


图 10

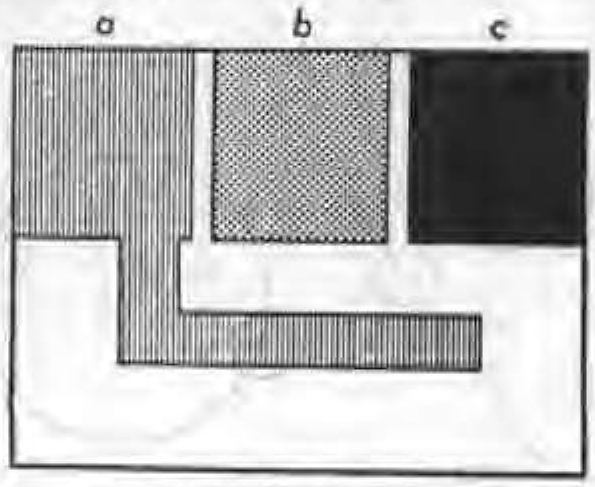


图 11

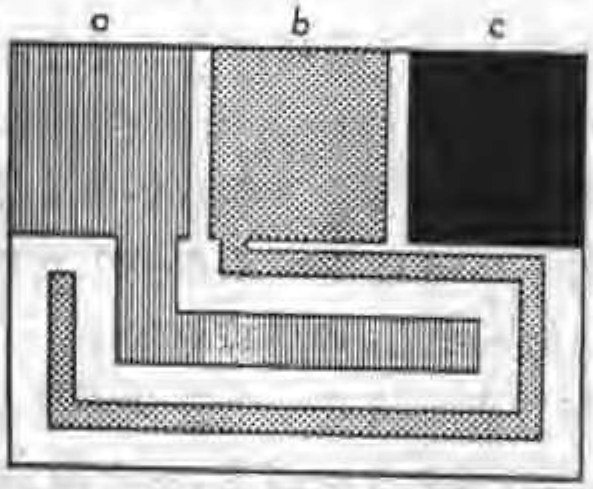


图 12

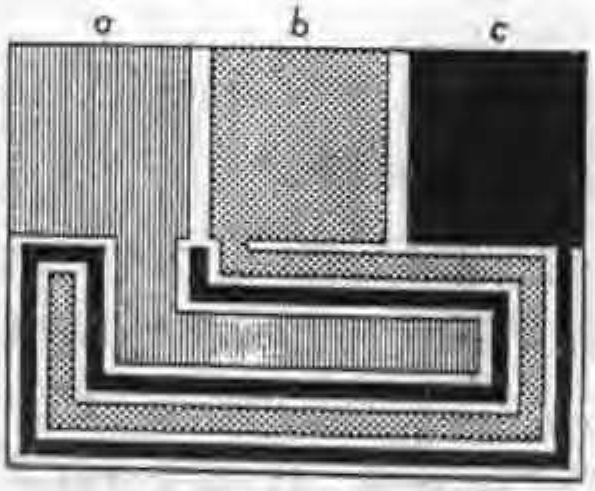


图 13

公里；c 国又效仿，与每一未占领点相距不超过六分之一公里；a 国又再次开始，后事依此类推. 既然是任想像力自由驰骋，那就让我们进一步假定：a 国要花一年造它的第一条走廊，b 国要花随后的半年造它的第一条走廊，c 国要花接下去的四分之一年造它的第一条走廊；a 国要花接下去的八分之一年造它的第二条走廊，依此类推，每一后继扩张要用它的前趋的一半时间去完成. 看得出来，两年后原先未占领的地带无一处还是没主子的，整个地区被三国瓜分一空，而且所有这三国在每个边界点都接壤了. 直觉不能领会这幅图样，可是逻辑分析要求我们相信它.

因为直觉在这么多的场合原来是骗人的，因为凭直觉看来算真的命题一再被逻辑证明是假的，数学家变得越来越怀疑直觉的有效性. 他们日渐深信根据直觉的信仰接受任何数学命题都是不安全的，更别说用它们来给任何数学学说垫底了. 因此便产生了从数学推理中驱逐直觉、使数学完全形式化的要求. 这就是说，每个新的数学概念都应当通过纯逻辑的定义引进，每个数学证明都应当自始至终靠严守逻辑的手段进行. 这个规划的奠基人（只提最著名的）是柯西（1789—1857）、波尔扎诺（1781—1848）、外尔斯特拉斯（1815—1897）、康托（1845—1918）和戴德金（1831—1916）.

把数学完全形式化或逻辑化是一项艰巨的任务；这等于说从根到枝都要改造. 过去认为凭直觉一目了然就接受下来的命题也必须不辞辛苦去求证. 康德明确引过空间是三维的这个命题，把它当作基于纯直觉的先验综合判断的范本. 但是，按现代标准，连这句话也要求我们仔细作逻辑分析. 首先就有必要纯逻辑地定义几何图形的“维数”是什么意思，然后必须纯逻辑地证明普通几何的空间——也就是牛顿物理的空间——按这个定义中所取的意义事实上是三维的. 这个证明直到 1922 年才由维也纳数学家卡尔·门格尔和俄罗斯数学家巴维尔·乌利松同时得到（乌利松稍后死于一场悲惨的事故，正值他的创造力到达高峰时）. 我想简短地讲讲图形的维数是怎么定义的.

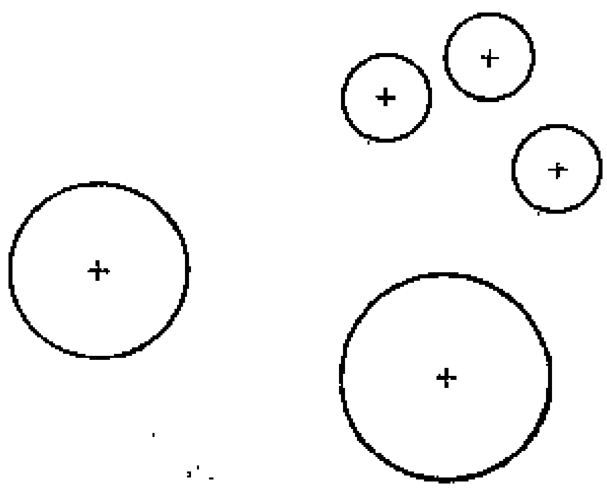


图 14

一个几何图形叫做一个“点集”. 我们说它是零维的，如果对它的每一点都存在一任意小的邻域，其边界不含该集合的点. 例如，有穷多个点组成的每个集合都是零维的，但也有许多复杂的零维点集是由无穷多个点组成的（图 14）. 一个非零维的点集叫做一维的，如果对它的每一点都存在一任意小的邻域，其边界与该点集只有一个公共零维集（图 15）. 每条直线、每个由有穷多条直线合成的图形、每个圆、每

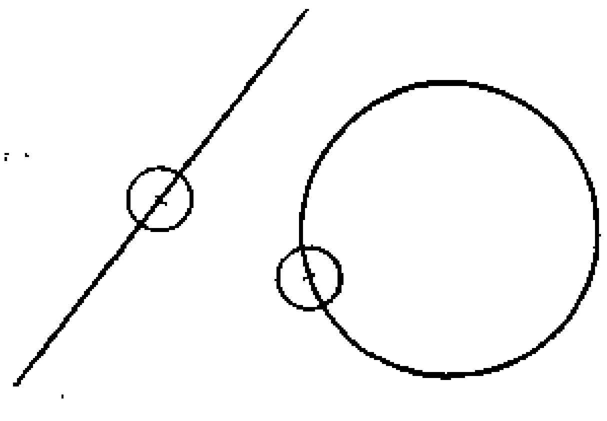


图 15

个椭圆——简言之，我们平常称为曲线的所有几何构造物——都是这种意义上的一维点集.一个既非零维又非一维的点集叫做二维的，如果对它的每一点都存在一任意小的邻域，其边界与该点集至多有一个公共一维集.每个平面、每个多边形面积或圆面积、每个球面——简言之，平常归入曲面一类的每个几何构造物——都是这种意义上的二维点集.一个既非零维又非一维也非二维的点集叫做三维的，如果对它的每一点都存在一任意小的邻域，其边界与该点集至多有一个公共二维集.可以证明——然而决不那么简单——普通几何的空间是三维点集.

这个理论提供了我们一直在找的东西——曲线概念的完全令人满意的定义.曲线概念的本质特征真的就是它的一维性.但是，除此以外，这个理论还使人能够给各种曲线的结构作异常准确和微妙的分析.关于这一点，我愿意略加评论.

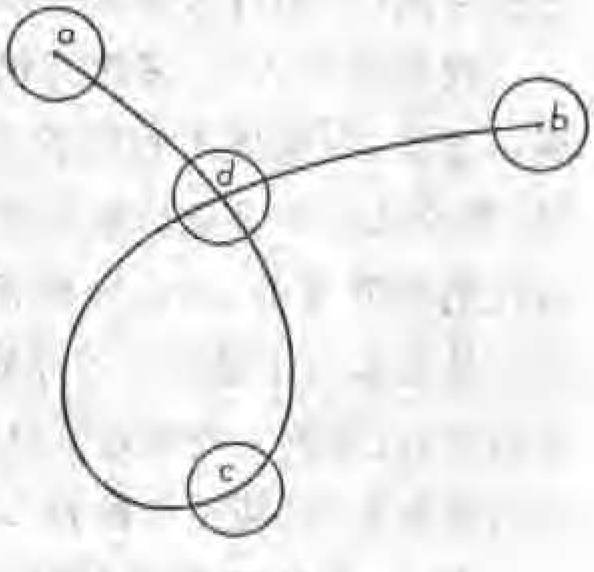


图 16

曲线上的一点叫做端点，如果有任意小邻域围绕着它，其中每个邻域的边界与该曲线只有单个公共点(图 16 中的点 a 和点 b).曲线上不是端点的一点叫做普通点，如果它有任意小邻域，每个邻域的边界与该曲线正好有两个公共点(图 16 中的点 c).曲线上的一点叫做枝点，如果它的每个任意小邻域的边界与该曲线不止有两个公共点(图 16 中的点 d).直觉似乎显示，一条曲线不可能只由端点或只由枝点做成.仅就端点而言，这种直觉的信仰已经被逻辑分析所证实，但是谈到枝点，它却被驳倒了.波兰数学家华茨瓦夫·谢尔宾斯基在 1915 年证明存在一些曲线，其一切点都是枝点.让我们设法形象地描绘一下这是怎么回事.

设想一等边三角形内接于另一等边三角形，该内接三角形的内部抹掉了(图 17).在剩下的

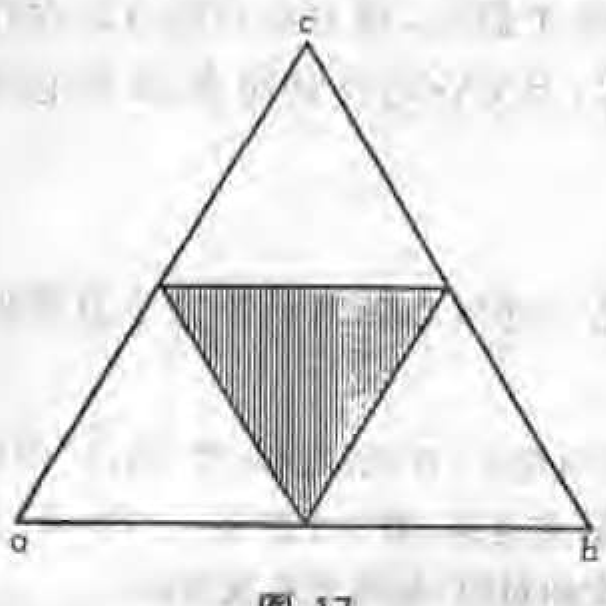


图 17

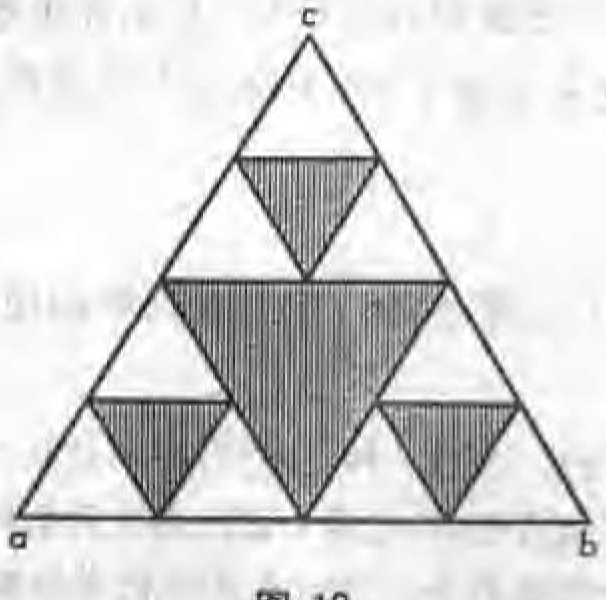


图 18

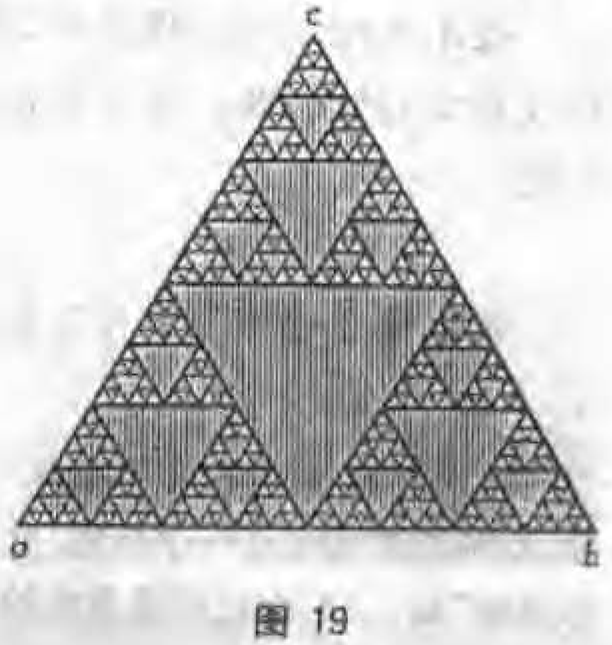


图 19

三角形(未划线的区域)中各内接一等边三角形,再抹掉它的内部;于是有了九个等边三角形连同它们的边(图 18).想像这个过程无限制持续下去.(图 19 出示第五步,还剩下 243 个三角形.)可以表明,抹了无穷多次之后,原等边三角形的各幸存点形成一条曲线,* 其一切点都是枝点,只有原三角形的顶点 a,b,c 是例外.由此不难得到一切点都是枝点的曲线;例如说,可以把整个图形扭弯,让原三角形的三个顶点合为一点.

例子够了,现在把我们讲过的东西总结一下吧.我们一再发觉,在几何问题中,哪怕在很简单很初等的问题中,直觉是个全然不可信赖的向导.当然不可能录用这种声名狼藉的辅助物来充当一门数学学说的基础.于是可以畅通无阻地引入不同于普通几何的空间的另类逻辑构造物;例如说,非欧空间(其中所谓欧氏平行公设换成了相反的公设)、维数大于 3 的空间、非阿基米德空间(其中有长度大于给定长度的任何倍数).

我们常听人说,多维几何、非欧几何、非阿几何虽然作为逻辑构造物是一致的,但是,因为不满足直觉,在整理人的经验方面毫无用处.面对这类异议,我们该怎么说呢?我的头一个意见是,普通几何本身就决非直觉过程至高无上的样板.事实上,**每一种**几何——三维的和多维的,欧氏的和非欧的、阿氏的和非阿的——都是逻辑构造物.千百年间,几乎到眼前为止,普通几何都在出色地效力于整理人的经验,因而我们才变得惯于靠它运作.这就解释了为什么我们认为它合乎直觉,凡偏离它的都违反直觉——按直觉是不可能的.但是,正如我们看见了的,这类"按直觉是不可能的东西"甚至在普通几何里也出现.只要反思一下从未想到的对象,它们立刻就会出现.

如今,现代物理使人感到起用多维几何、非欧几何的逻辑构造物来整理人的经验是适当的.(虽然尚无迹象证明把非阿几何包括进来也会有用,这种可能性却排除不掉.)但是,因为物理中的这些进展是很近的事,我们还没有养成使用这些逻辑构造物的习惯,所以它们依然被看作是冒犯了直觉.

提出大地是球的理论时,也曾出现同样的反应.大家都拒绝这个假说,理由是对蹠点的存在违反直觉;然而,我们终于习惯这种见解了,今天谁也不再想声称,因为它与直觉冲突.所以它不可能.

物理概念也是逻辑构造物,在这里也能清楚地看到我们用熟了的概念如何获得合乎直觉的

---

* 译注:它称为谢尔平斯基三角形.这是一种"分形".分形是从 20 世纪 70 年代起就非常"热门"的话题.皮阿诺曲线也是一个分形.分形也有维数.这是由豪斯多夫开创的研究道路.谢尔平斯基三角形的"分形维数"是 1.58,而皮阿诺曲线的分形维数是 2.把分形的几何学与本文相对照,是很有启发性的.

名分，而没用熟的人则否认它们有这种名分."重量"概念极为频繁地进入我们的共同经验，几乎人人认为合乎直觉. 然而，"转动惯量"这个概念没有进入多数人的活动，所以他们不认为它合乎直觉；可是在经常用它干事情的很多实验物理学家和工程师中间，转动惯量却具有合乎直觉的名分，丝毫不比一般人心目中的"重量"概念逊色. 同样，"电位差"概念在电工技师看来合乎直觉，在多数人看来并不合乎直觉.

如果多维几何、非欧几何整理人的经验的那种用途继续大显神通，使我们越来越习惯于对付这类逻辑构造物；如果它们打入了中学课程；如果我们（容我打个比方）在妈妈的膝上就学它们，像现在学欧氏几何一样——那就不再会有谁想说这类几何违反直觉了. 因为，直觉并不像康德竭力鼓吹的那样是什么纯先验的认识手段. 倒不如说它是植根于心理惯性的习惯的力量.

27.

数学基础

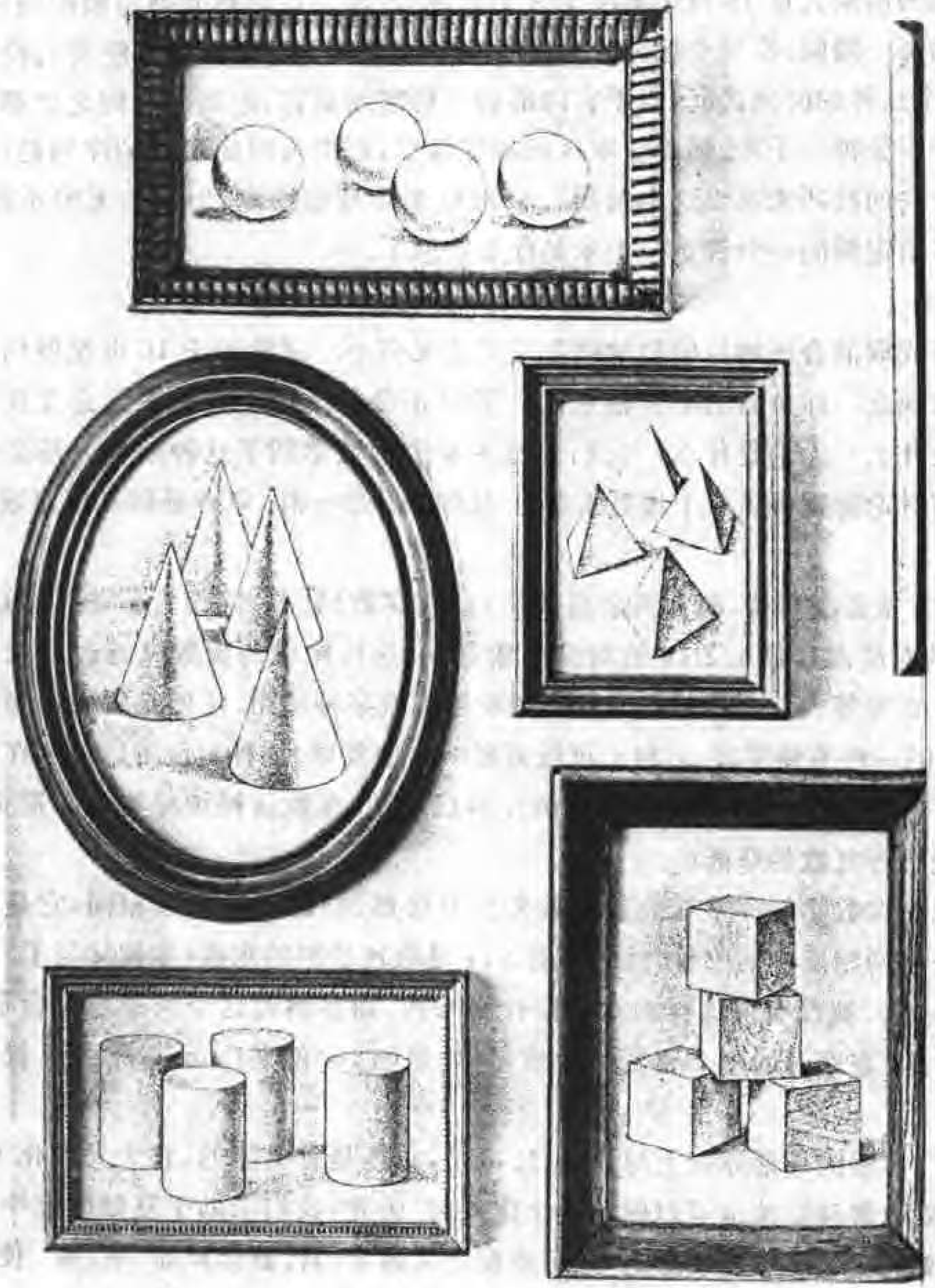
威拉德·范·蒯因(Willard van Orman Quine),1964 年 9 月号

无可辩驳者,你的名字叫数学. 让自然科学家只管相信他的证据去吧,数学家非要证明不可. 科学标准已经变得严谨了,要是谁来小题大做地操心一下数学的基础该多好啊. 他在哪里能找到跟他想要奠基的东西差不多同样牢靠的基础呢?

关注数学基础之情溢于言表的时候十有八九是大事不妙,基本观念开始摇摇欲坠,数学家被迫要审查了. 牛顿和莱布尼茨创建微分学以后,过了好久人们才着手审查无穷小观念. 微分学的职责是研究比率,这种无限接近于零但不同于零的微量的概念为研究比率提供了基础.

考虑一辆由静止状态加速到时速 90 千米的汽车. 在里程计的指针直指 60 的那一瞬间,汽车一分钟走一公里;在较早的瞬间车速小些,在较晚的瞬间车速大些. 一分钟一千米的瞬时速度并不是指一分钟内要走一公里,因为这个速度维持不了一分钟. 既然汽车在加速,这个速度根本维持不了任何一段时间. 在每一瞬间汽车驶过的距离总是零,而这样刻画速度——一瞬间零公里——是会把一种速度与另一种速度的差别勾销掉的. 所以微分学的始祖们才假定存在无穷小的数,与零只有一丁点儿不同,彼此之间只有一丁点儿不同. (我们都熟悉越变越小的分数——1/8,1/16 等等——但这些还不是无穷小;要把一个无穷小变成 1,只取它的 16 倍是不行的,要取它的无穷多倍哩.)

照这么说,一分钟一千米是指在某段无穷小时间内走某个无穷小距离,一分钟半千米便是指在那段无穷小时间内只走那个无穷小距离的一半了. 这种搞法荒唐是显而易见的,但所得的微分学偏偏使人能够用数学手段合理地推定比率了. 于是就出现一个很能体现数学基础问题的特征的问题:怎样摆脱无穷小,改用更清楚的观念行事,而又依然将有用的上层建筑物保存下来.



数 4 在图中表示成一个包含所有 4 员类的类. 这个图最外层的框右侧不要封闭起来,因为这个类中的成员并不限于这里出示五个例. 整幅图案该用"4"作标题才对头. 说某四面体类、某锥体类、某球体类或某圆柱体类有四个成员蕴涵着它属于 4. 这么看数是数学基础学者提出的几种观念中的一种.

柯西和他的后来人在19世纪解决了这个问题.考虑一连串越变越短的时间区间,其中每个都跨越给定的那一瞬间.在每个区间上方写出其间汽车驶过的距离.随便我们设定什么样的精确度,总有一个这样的时间区间,对于它内部的一切区间而言,距离与时间之比都以我们设定的精确度近似于一分钟一千米.随着所取区间越变越窄,距离与时间之比的序列趋向一个极限(可以用名为微分法的技巧来求出这个极限).极限概念涉及短距离,但不是无穷小距离.用极限概念就能定义在给定瞬间一分钟走一千米是什么意思了.

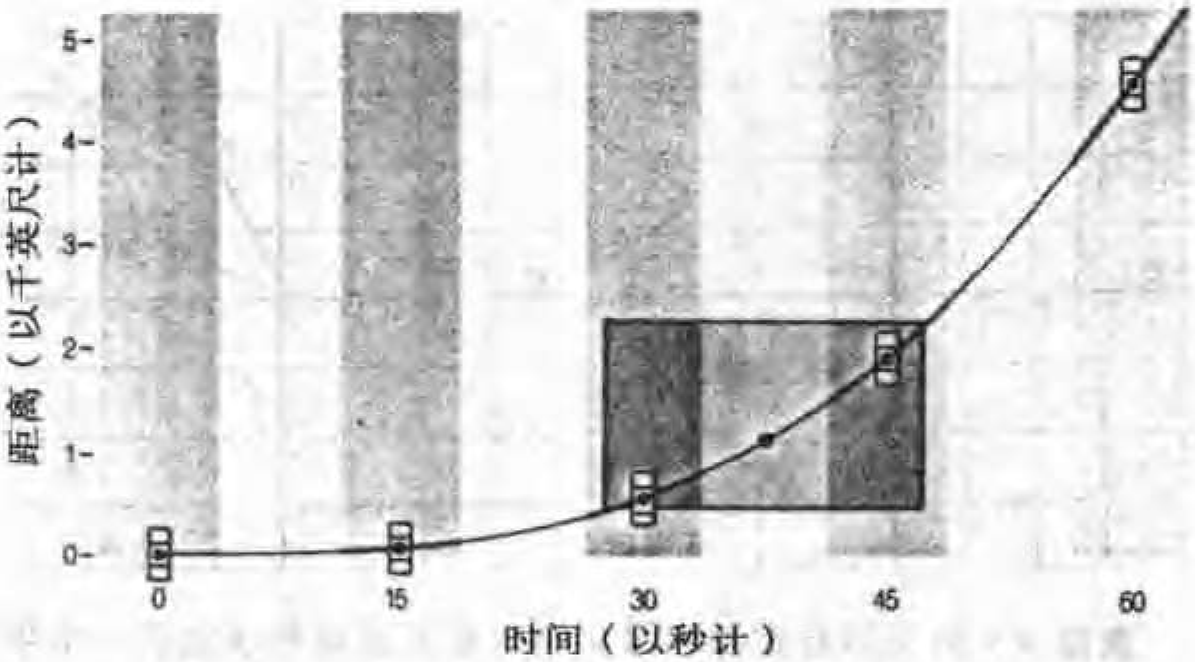
必须授与或取消合法地位的数学概念不只是无穷小.试看源于16世纪但仍在经常跟我们打照面的虚数观念,即负数的平方根观念.不分正负,任何实数的平方总是正的.那么,负数的平方根是什么?无论是什么,它们业已主宰应用数学到了这种地步,甚至你用距离去除时间也要按相对论物理得出一个虚数了事*.就像微分学一样,审查基础必须兼顾如何保存上层建筑物.

-1的平方根是虚单位,叫i.其余虚数是i的实倍数(见本书第12章“数”).实数3的对应虚数是3i,1/2的对应虚数是1/2i;π的对应虚数是πi.这样构成的虚数又通过加法与实数结合而得出$3+i$,$\pi+2i$等等,名为复数,正是这类数赋于虚数某种功用.任何复数只是将两个实数x和y编码或合并的一种方便手段,x和y可按需要唯一地复原.这种对应可以表示在由实x轴与虚y轴决定的一个平面上(见320页上的图解).事后看来,虚数这种神秘物本可避免,只谈实数的“有序对”也能履行复数的职能.

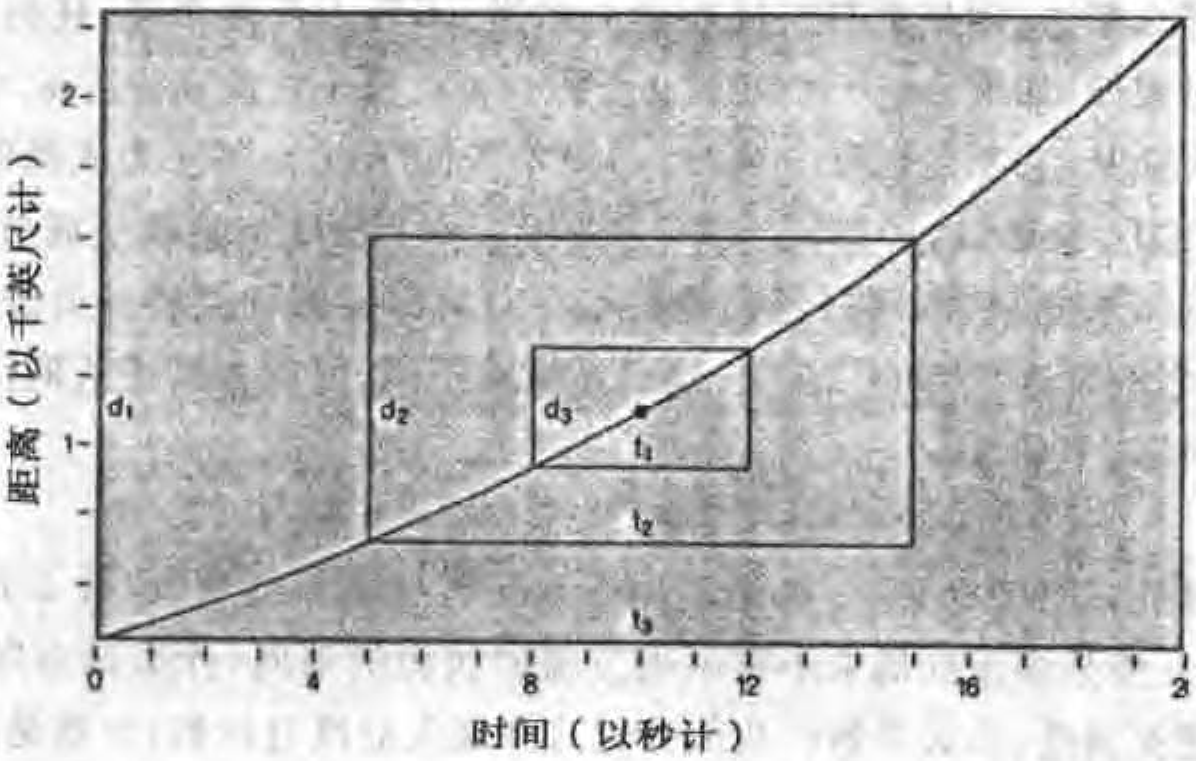
有序对观念在数学的许多其他紧要关头也有帮助.它的用途永远相同,它是把两物当作一物把握又不失去两物踪迹的一种办法.不管x,y是数还是别的东西(如像父与子),有序对x与y通常都记为(x,y).我没有说这样的对子是什么东西,而且跳过这个问题也是合乎传统的.重要的是它们做什么.有序对的一个要紧的性质是:如果(x,y)就是(z,w),那么x就是z并且y就是w.

我说过了,虚根的神话原则上尽可绕过.可是,它还是有价值的,它大大简化了代数定律.当然,把虚数和复数解释除掉也可以保留这个优点的.为此,我们求助于基础研究中司空见惯的策略:把复数定义为只是实数的有序对,然后重新定义通常的代数运算加、乘、幂,使这些运算言之

* 译注:这里说的自然是四维时空连续统中的距离和时间,在爱因斯坦的狭义相对论中,我们必须采用另一种度量距离和时间的尺度——洛伦茨尺度,如果仍用欧几里得尺度就会得到虚数速度.感兴趣的读者可以参看物理书.——译者

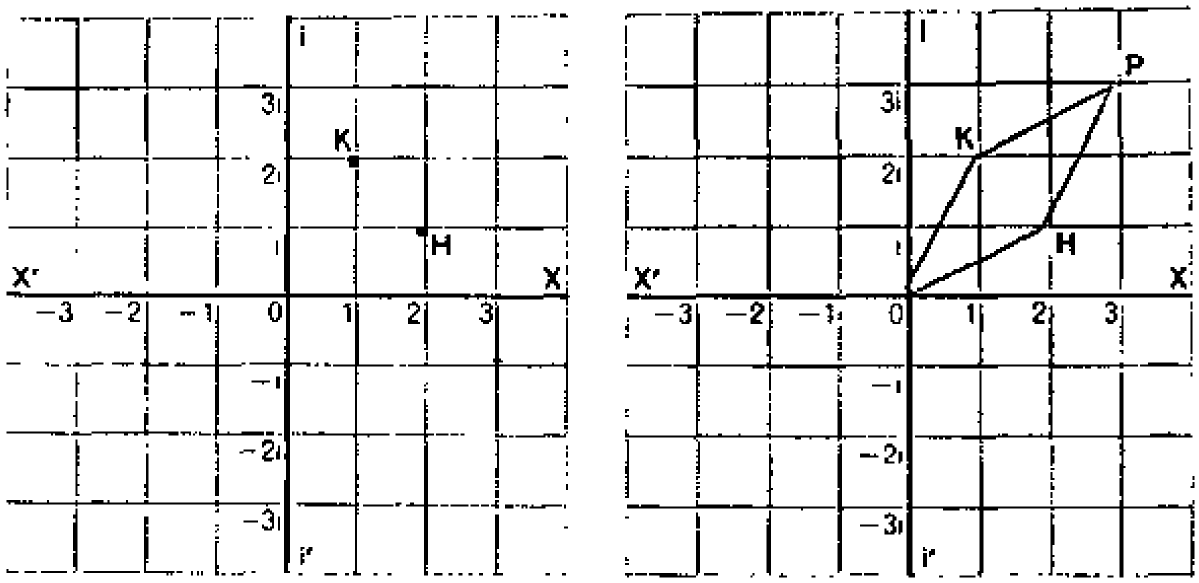


始于静止状态的加速度如图所示. 五个垂直的长条表示隔 15 秒看到的同为一千米的路程. 在第一个 15 秒内汽车(深色物)大约前进 70 英尺. 在第四个 15 秒内汽车往前多移 32 倍.



车速达到一分钟一千米的那一瞬间是加速度曲线上的一点，这里截下该曲线的一段. 随着时间间隔越变越短，距离与时间之比的序列趋向一可决定的有穷极限.

成理地适用于有序对. 设计得当，这些运算就能为我们提供一套在形式上与复数代数无法区分的有序对代数. 人们多半会说复数已经解释成有序对了，但我们同样可以说复数已经消逝了，取而代之的是有序对.



复数 $x+yi$ 可以标在由水平实轴与垂直虚轴所决定的一个平面上,例如左图标出了点 $K(1+2i)$ 和点 $H(2+i)$. 如果这两点和原点是一平行四边形的顶点,第四个顶点(P)就是这两个复数之和.

也可以不光是说有序对"做"什么,再往前走,设法确定它们"是"什么. 这个问题不像无穷小问题和虚数问题那么紧迫,倒是更有肤浅哲学的味道. 不管人为性多强,任何回答都合用,只要它能保持住有序对规律:如果 (x,y) 就是 (z,w),那么 x 就是 z 并且 y 就是 w. 今天通用的款式来自维纳和库拉托夫斯基. 它不是把有序对 (x,y) 简单等同于以 x 和 y 为成员的类;假使那么干,(x,y) 就跟 (y,x) 混了. 它把 (x,y) 等同于两个类的类,一个是以 x 为唯一成员的类,另一个是以 x 和 y 为成员的类*. 在这里,既可以说已经把有序对解释成某种类的二员类,也可以说把有序对消去了,取而代之的是这种类的二员类. 这只是措辞不同,但前一描述法的优点是保存了"(x,y)"这个记号和"对"这个词.

哲学问题仿佛处在两极之间,一极是常识受到伤害后义愤的质询(什么是无穷小? 什么是负数的平方根?),一极是多雨的周末小孩闲得发慌时执拗的逼问(什么是有序对?)**. 有个哲学问题比有序对问题深刻些:什么是数? 我们且把这问题先对准自然数,也就是正整数和零.

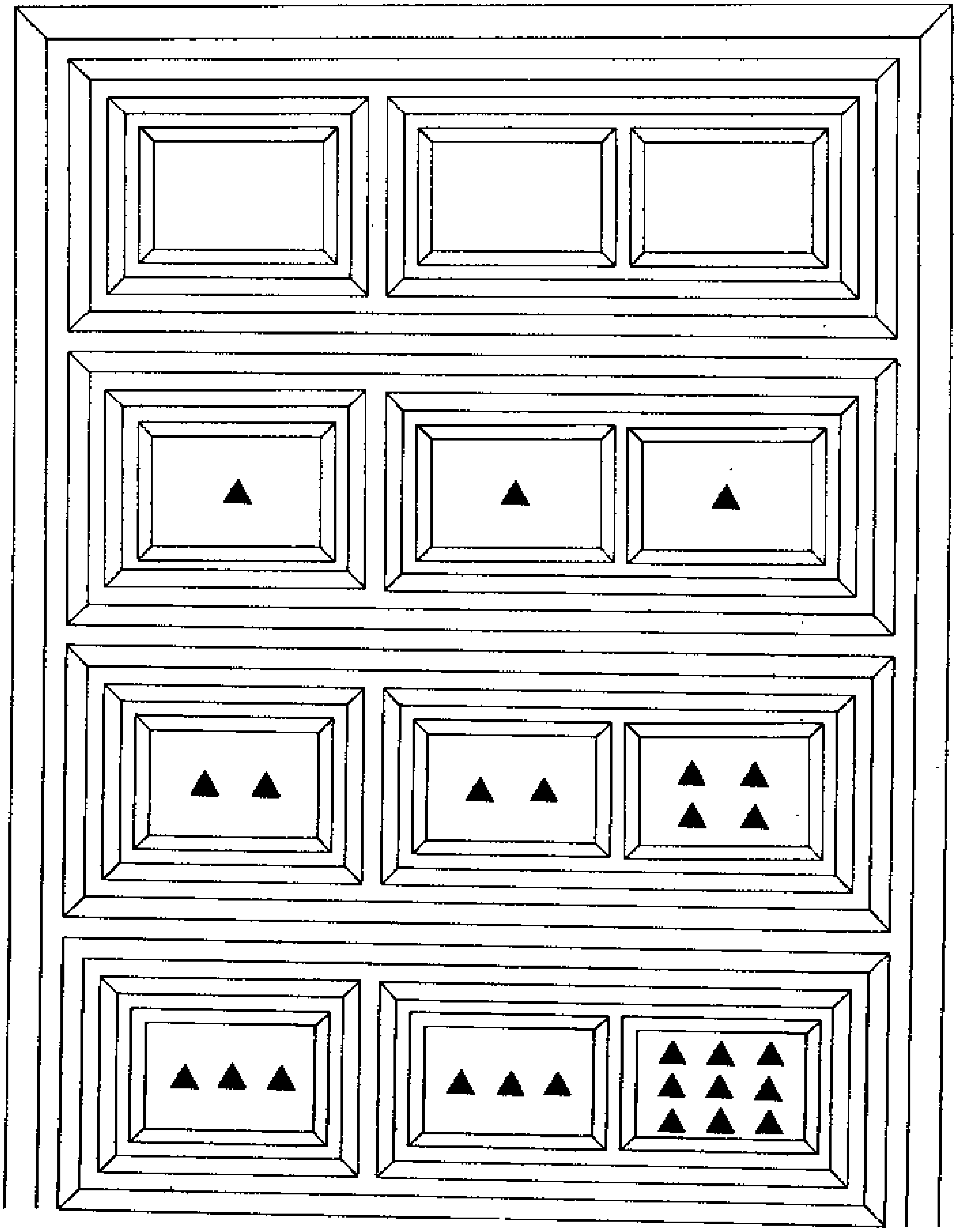
数字给数命名,数字"12"给 12 命名. 换个样子表述我们的问题:数字给什么命名? 12 是什么? 12 是耶稣的使徒的多少,是一年中月份的多少,是某只盒里蛋的多少. 不过,12 决不仅仅是一打蛋、一打月份、一打使徒的一种性质,它是一打蛋的类、一打月份的类、一打使徒的类的公共性质.

在数学中,清晰性的来源之一是宁谈类而不谈性质. 一般说,凡是靠指出某种性质做得到的

---

* 译注:用文字远不及用符号好懂. 作者的意思是,有序对 (x,y) 可以定义成无序对 $\{\{x\},\{x,y\}\}$.

** 译注:这对括号中的例子是译者自作主张添上的.



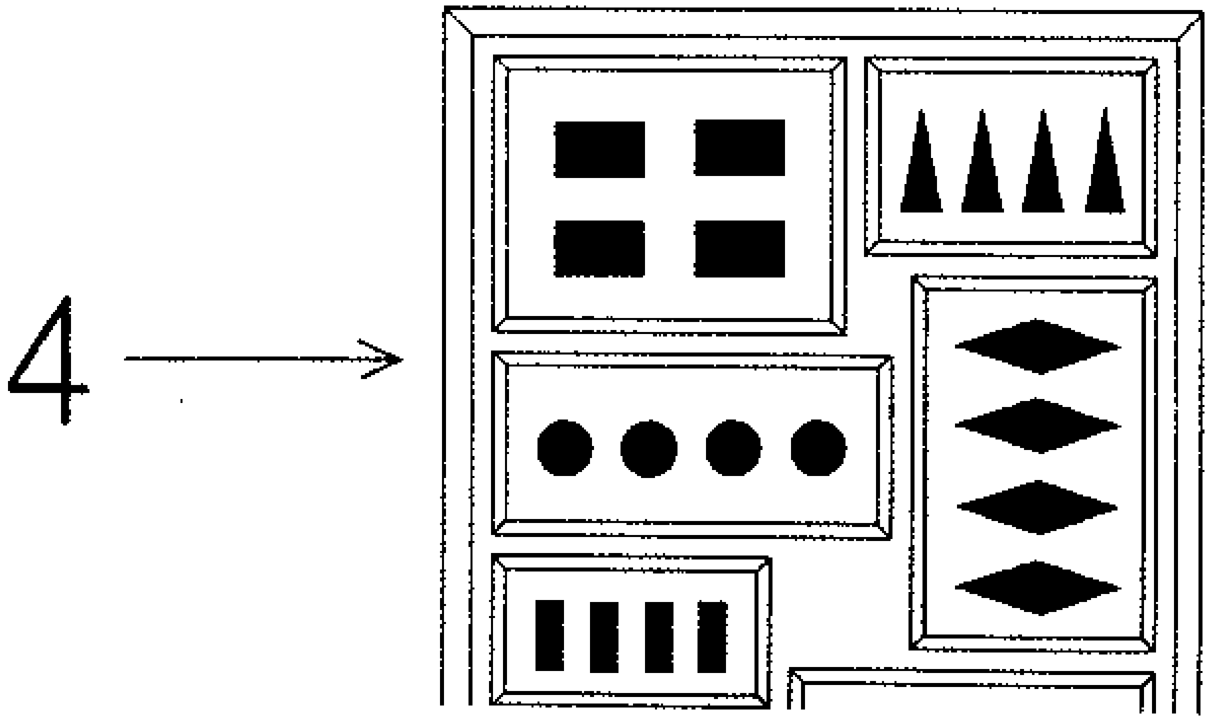
平方根函数可以用一副底部无界的外层框来表示，外框不加底是表示还可以写个没完.框内所含的有序对(*a*,*b*)满足"*b* 是 *a* 的 *a* 倍"这种关系.每个有序对等同于一个二员类.一个成员类在每副内层框的左侧，它的唯一成员是该有序对的首元.另一个成员类在右侧，它又含了两个框，即包含该有序对的两个元.按这种约定，底部的有序对(3,9)不会跟表示平方函数的有序对(9,3)相混淆.这种款式的有序对归功于维纳和库拉托夫斯基，在现代数学中用得很广.

事，指出具备那种性质的所有事物的类也能做到，毫不逊色. 清晰性却增加了，因为，对于类，我们有清楚的同异观念；两类的同异无非是有没有相同的成员而已.

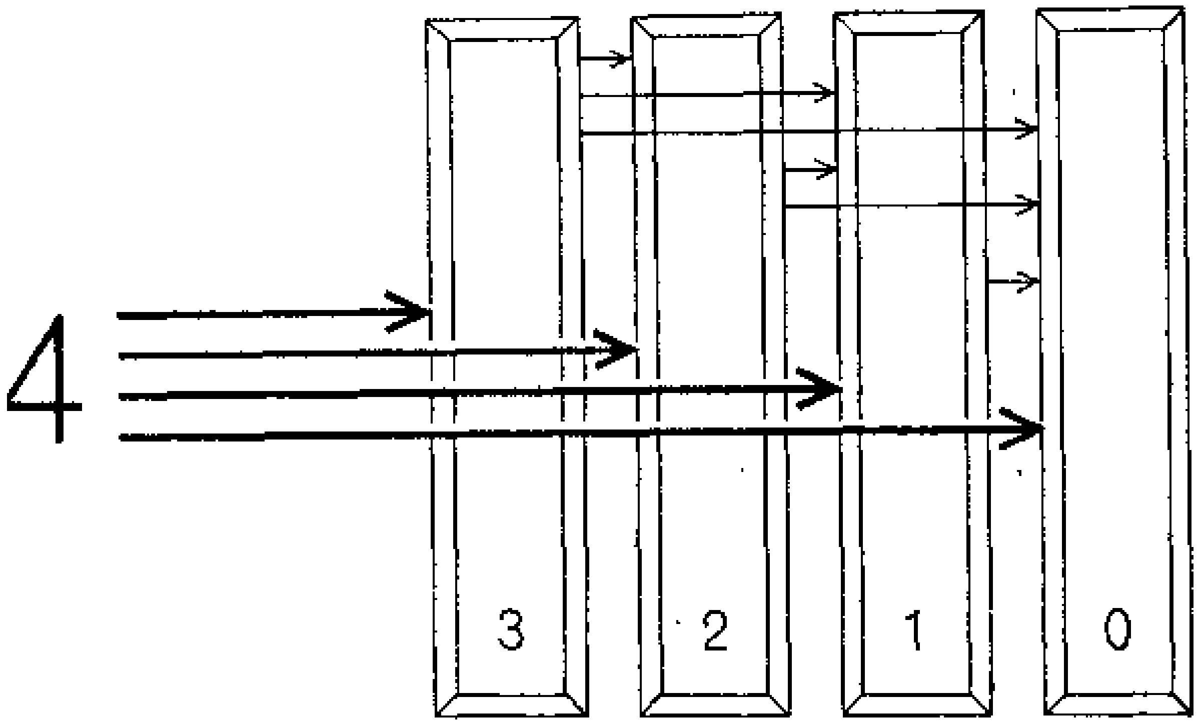
具体地说，我们最好不把 12 解释成"打"的性质，而解释成所有"打"的类，所有 12 员类的类. 每个自然数 n 也都变成所有 n 元素的类. 像这样用 n 来定义 n 是循环的，但循环可以防止，办法是借助一数的前趋来定义该数. 例如，5 一旦到手，便可以把 6 解释成剥夺一员便属于 5 的那些类的类. 从开端处做起，可以把 0 解释成以空类为唯一成员的类，再把 1 解释成剥夺一员便属于 0 的那些类的类，再把 2 解释成剥夺一员便属于 1 的那些类的类，依此类推.

任何款式的有序对都能克尽本职，只要它满足有序对规律，同样，任何款式的自然数都能克尽本职，只要它满足这么一条规律：有第一个数，又有一每次产生一个新数的后继运算. 上面那种款式是 1884 年弗雷格引进的，它经得起这个测验(见本页插图). 还有别的款式也经得起. 冯·诺依曼提出的款式是把每个数等同于所有居前数的类(见 323 页插图). 在这个系统中，0 是空类自身，1 是以 0 为唯一成员的类，2 是 0 和 1 的类，余可类推. 弗雷格说 n 员类属于 n，冯·诺依曼则说 n 员类的成员能够与 n 的成员相配而呈一一对应.

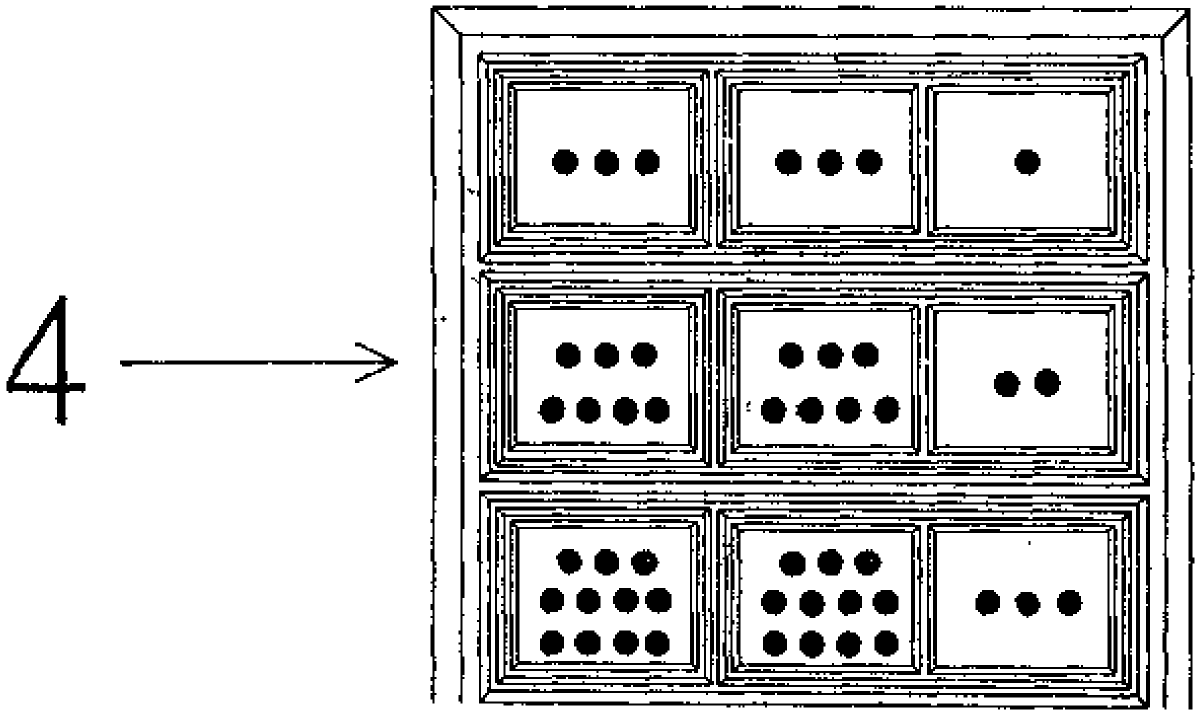
不论我们按哪种方式看数，下一步总是要定义算术运算. 加法背后的想法是显然的：$m+n$ 是有那么多成员的一个类，它的一部分有 m 个成员，其余部分有 n 个成员. 至于乘积 $m\times n$ 则是有那么多成员的一个类，它分为各含 n 个成员的 m 个部分.



自然数 4 在这里表示成所有 4 员类的类；因此外层框无底. 按弗雷格最先提议的这种数的款式，1 可以解释成剥夺一个成员便属于 0 的那些类的类.



冯·诺依曼款式的自然数 4 强调它能够与 4 员类相配而呈一一对应(用箭头显示). 这个类中三个元凭对应来定义. 另一个元是空类.



实数 4 表示成有序对(a,b)的无底类(外层框),此处 a"小于 b 的 4 倍". 这就是 3 对 1 具有的、7 对 2 具有的、11 对 3 具有的、诸如此类的关系. 这种约定适用于分数和负数.

尚待说明的还有负数、分数、像 $\sqrt{2}$和 π 这样的无理数,简言之,除去自然数以外的所有实数. 这里又不拘款式,凡符合一定要求的都合用. 有种一揽子款式要比多数的款式更具统一性,它把每个实数看成自然数之间的某种关系,说白了是某种相对的大小关系. 取实数 1/2 作为特例. 它等同于 1 对从 3 起每个整数具有的、2 对从 5 起每个整数具有的、诸如此类的关系. 与此相仿,每

个正实数 x 等同于"小于__的 x 倍"的关系. 比方说，正实数 $1/\pi$ 成了 1 对从 4 起每个整数具有的、2 对从 7 起每个整数具有的、3 对从 10 起每个整数具有的、诸如此类的关系 *. 至于负实数则是取逆关系. 例如，既然 1/2 是"小于__的一半"的关系，−1/2 就成了"大于__的两倍"的关系.

尽管可能蒸发像是小孩在多雨的周末的逼问了，我们也不惜冒险插问：但是，什么是关系？其实，讨论有序对的时候已经暗示了，一种关系可以等同于 a 对 b 具有那种关系的所有有序对 (a,b) 的类. 这么一来，实数就跟自然数一样，归根结蒂等同于类了. 数 1/2 变成 a 小于 b 的一半的所有有序对 (a,b) 的类. 这个有序对类不破坏这种"小于"关系就不能包含有序对(2,4)，否则 a 会正好是 b 的 1/2 倍；但是，它可以包含有序对(20,41)，可以包含 a 以应有的差数邻近 b 的 1/2 倍的任何有序对 (a,b).

按这种做法，每个实数都对应于一个独异的有序对类. 这种独异性是能够证明的，因为一条实数轴上任何两点之间存在一有理数. 这就是说，如果 x 与 y 是不同的实数(比方说 x 小于 y)，必有一有理数 a/b(a 和 b 是整数)小于 y 而大于 x. 这时有序对 (a,b) 落入与 y 对应的类而不落入与 x 对应的类，足见两类互异.

前面注意到了，把 n 描述成所有 n 员类的类要引起循环. 把正实数 x 描述成"小于__的 x 倍"的关系也要陷入同样的循环. 然而，当时也好，现在也好，这种描述有助于我们看出数应当是什么对象. 它合用的原因在于这样循环使用"n"或"x"来作描述是有某种常识背景的. 实际上，在这两个场合，凭借细心的复杂的定义来消除循环都是做得到的.

在解释一般实数之前我们就得采取某种款式的自然数了. 因为我们要把实数当成自然数的关系. 既然如此，不管多么无用，也必须把自然数看成与对应的整实数判然不同的东西. 例如，整实数 5 不是 5 员类的类，它该是 a 小于 b 的 5 倍的自然数有序对 (a,b) 的类.

在数学中，对函数的谈论之多决不亚于对于数. 不过，解决它的哲学问题——什么是函数？——要比数快些. 一个函数可以等同于它的值对它的主目的关系. 函数"__的平方根"可以解释成根对平方的关系：0 对 0 具有的、1 对 1 具有的、2 对 4 具有的、2/3 对 4/9 具有的、诸如此类的关系. 因此，平方根函数变成所有有序对(0,0)，(1,1)，(2,4)，(2/3,4/9)，泛言之 (x,x^2) 的类. 第 321 页上的图，把这个函数表示成一个类.

我们的数学基础样本研究从检修故障开始，已经平稳进入总梳理阶段了. 我们看出，这是一个把某些概念归约为别的概念，从而精减基本数学概念的库存量的过程. 现在让我们应用这种

---

* 译注：因为 1 小于 $4\times1/\pi$，2 小于 $7\times1/\pi$ 等等.

技巧把常见的素数概念归约为初等的类的术语. 为了不漏掉种种预设,必须明确而详尽地表述一个又一个定义,留心其中使用的一切逻辑手段和数学手段. 每个定义必须说明怎样消去某个措词,设法把它或含有它的句子意译成一套剩余词汇(最终窄得只剩下极浅显的字眼儿). 我们先把

n 是素数

改变成

n 是自然数,并且,对于所有自然数 h 和 k,如果 n 是 $h\times k$,那么 h 或 k 是 1.

这第一步从剩余词汇中消去了烦人的术语"素数",代之以"n 是自然数". 对 h 乘以 k 的记号、1 的记号,也要这样做. 我们知道消去乘法记号的办法是把子句 $n=h\times k$ 展开成

n 员类分成各含 k 个成员的 h 个部分.

为了把类的"部分"换成更简单的"成员身分"概念,可以把这个子句改变成

对于每个 n 员类 x,存在一 h 员类 y,y 的每个成员有 k 个成员,并且 y 的各成员无公共成员,并且所有也只有 y 的成员的成员是 x 的成员.

臃肿程度在猛增,但词汇正在归约为只谈类的成员身分的各种术语. 现在把"x 有 n 个成员"及同类子句消去. 如果我们使用弗雷格的自然数款式,这个子句就变成"x 是 n 的成员". 经过这番分析,原短语的意思成了

n 是自然数,并且,对于所有自然数 h 和 k,如果对于 n 的每个成员 x 都存在一 h 的成员 y,y 的所有成员是 k 的成员,并且 y 的各成员无公共成员,并且所有也只有 y 的成员的成员是 x 的成员,那么 h 或 k 是 1.

明晰性减少不像词汇精简那么值得注意. 假使我们的目标是明晰,尽可恢复被消去的措词,把这些词当成是已经有了定义的缩写.

接下去要消去的术语是"自然数". 说 n 是自然数就是说 n 是 0,或是 0 的后继,或是 0 的后继的后继,依此类推. 弗雷格告诉我们,躲开"依此类推"的办法是把"n 是自然数"定义成

对于每个类 z,如果 0 是 z 的成员并且 z 的成员的后继也是 z 的成员,那么 n 是 z 的成员.

弗雷格把"0"解释成以无成员类为唯一成员的类,把任何 m 的"后继"解释成剥夺一员便属于 m 的所有类的类. 如果我们消去"0"和"后继",把上述款式的"n 是自然数"等等改写成一个新子句,再用该子句来改写原短语,我们就是用一份短词汇讲出了一则长故事(见 326 页上的图解). 我们的居间定义末尾的数"1"也消去了,因为 1 是 0 的后继. 剩下的词汇只涉及类的成员身分和一点点别的东西. 有各色各样初等的逻辑小品词:"是","并且","或者","如果__那么","每个","所有",诸如此类.

关于 n 的陈述	要展开的术语	术语的定义
n 是素数.	素数	n 是自然数,并且,对于所有自然数 h 和 k,如果 n 是 $h \cdot k$,那么 h 或 k 是 1.
n 是自然数,并且,对于所有自然数 h 和 k,如果 n 是 $h \cdot k$,那么 h 或 k 是 1.	n 是 $h \cdot k$	n 员类分成各含 k 个成员的 h 个部分.
n 是自然数,并且,对于所有自然数 h 和 k,如果 n 员类分成各含 k 个成员的 h 个部分,那么 h 或 k 是 1.	x 分成各含 k 个成员的 h 个部分	存在一个 h 员类 y,y 的每个成员有 k 个成员,并且 y 的各成员无公共成员,并且所有也只有 y 的成员的成员是 x 的成员.
n 是自然数,并且,对于所有自然数 h 和 k,如果对于 n 的每个成员 x 都存在一个 h 的成员 y,y 的所有成员是 k 的成员,并且 y 的各成员无公共成员,并且所有也只有 y 的成员的成员是 x 的成员,那么 h 或 k 是 1.	n 是自然数 0 后继 1	对于每个类 z,如果 0 是 z 的成员并且 z 的成员的后继也是 z 的成员,那么 n 是 z 的成员. 0 是以无成员类为唯一成员的类. 任何 m 的后继是剥夺一员便属于 m 的所有类的类. 1 是剥夺一员便成为无成员类的所有类的类.
对于每个类 z,如果以无成员类为唯一成员的类是 z 的成员,并且对于 z 的每个成员 m,剥夺一员便属于 m 的所有类的类是 z 的成员,那么 n 是 z 的成员,并且,对于所有 h 和 k,对于每个类 z,如果以无成员类为唯一成员的类是 z 的成员,并且对于 z 的每个成员 m,剥夺一员便属于 m 的所有类的类是 z 的成员,那么 h 和 k 是 z 的成员,如果对于 n 的每个成员 x 都存在一 h 的成员 y,y 的所有成员是 k 的成员,并且 y 的各成员无公共成员,并且所有也只有 y 的成员的成员是 x 的成员,那么 h 或 k 是剥夺一员便成为无成员类的所有类的类.		

经过简化的句子出现在这张记录纸的底部左侧. 定义"n 是素数"这个陈述产生一份词汇表(中列),其中的术语需要展开(如右列所示). 最后这个句子只涉及类的成员身分. 如果不求简短,尽可只用"并且"、"非"、"是__的成员"和全称量化的习语"每个东西 x"来改写. 术语展开式中所用的数的款式是弗雷格制订的.

再往前走几步，所有这些词语可以归纳为几个基本措词. 一个是充当句子联结词的"并且". 另一个是"非". 第三个是全称量化的习语"每个东西"，或者用起来更灵活的"每个东西 x"，紧凑的符号表示是"(x)". 第四，还有及物动词"$\in$"，意思是"是__的成员". 这张表或许还应当包括第五项，即用来分隔子句的括号. 下面就是用我们的节俭记法造的一个短例句：

(x)非(y)非$(x\in y$ 并且非 $y\in x)$

它实际上相当于"每个东西都是一并非它的成员的某个东西的成员".

不论在算术中、在微积分中还是在别的部门中，凡是用纯古典数学记法可表达的句子，如果不求同样简短，都能够用这份极小的词汇来意译. 前面已经把"n 是自然数"拉得够用了，但是与完全意译成五个基本习语的结果与它相比，运算更为简炼. 我们不想推荐大家取这五个词作数学的通用语言或实用计算工具. 然而，如此众多的数学观念居然能从如此贫乏的基底生成，特别是从我们的这个基底生成，这毕竟有点理论上的兴趣.

五个基本措词的四个属于逻辑. 一个——"$\in$"——是集论或类的数学所有的. 或者也可以说五个全在集论中；逻辑措词终究是每门科学的地地道道的附属品，也是集论的.

这么一来，好像全部数学都可以用集论语汇来意译了. 所以，全部数学真理都可以化成集论真理. 每个数学问题都可以变换成集论问题. 这种归约要么预兆重大数学问题前途光明，要么说明集论也有跟古典数学问题一样深刻的问题.

后者才是实情. 而且，集论最糟的一面还不只是能写出难于证明是真是假的句子，倒是能写出似乎太易于证明既真又假的句子. 有一个这样的句子是

非(y)非$(x)[$非$(x\in y$ 并且 $x\in x)$并且非(非 $x\in y$ 并且非 $x\in x)]$

为顾及人类交际作局部改译的话，那么它说的是

存在某个东西 y 使得$(x)(x\in y$ 当且仅当非 $x\in x)$.

它似乎真；只要取 x 不是自身成员的所有东西 x 的类作 y，不就得了吗？殊不知它必定假；假使真像这里断定的那样存在着 y，我们大可就取 y 作 x 的特例，然后自相矛盾地论定 $y\in y$ 当且仅当非 $y\in y$.

集论里有的是悖论，罗素在 1901 年找到的这个悖论是其中最简单的. 所有这些悖论的教训就是：给出集类中成员身分的充分必要条件还保证不了存在这样的类. 特言之，罗素悖论表明不存在正好由不是自身成员的东西组成的类. 因此，集论的大任务成了判别什么样的类才存在. 已知的回答都不是又自然又站得住脚的；看上去唯一自然的回答是对每个成员身分的条件都存在一个类，它站不住脚.

自 1901 年以来，集论品种激增，却没有一个是分明最好的. 在这号框架中，连无矛盾性问题也悬而未决，因为我们不再能信任常识对命题的似真性所下的判断. 集论中的常识被悖论搞臭了名声. 作为数学的基础，集论远远不及我们奠基于集论之上的东西来得牢靠.

很清楚，我们决不可指望数学的集论基础充当一副解药以平息疑心古典数学靠不住的情绪. 当我们评价旨在使集论好用的各种计划时，我们只求有一良策，在最终的上层建筑物中重造算术，忽略逻辑算子和乘法也无妨*. 如果为更高的目标而添上这些记号的话，那就不会有覆盖所有可表达的真理又避免说假话的证明程序了. 即使把变号的值局限于自然数，局面也不会改观.

所谓初等数论的记法就是这样. 用这种记法可表达的典型真理是

$(x)(y)$非(z)[非$(x=y+z)$并且非$(y=x+z)$].

这相当于说：对所有自然数 x 和 y，存在某自然数 z，或者 $x=y+z$ 或者 $y=x+z$. 哥德尔表明，给定一证明程序，我们可以用这种贫乏的记法造一个句子，如果它能有符合该程序的证明，它便是假的，如果不能，它便是真的. 所以，哥德尔认可了古典数学规律**. 我们却发现自己取集论作为方便而有限的词汇的时候，不知不觉地认为它也替古典数学制订了一套总的公理系统——该让集合落在它们可呆的地方了.

这样的公理化规划永远也不能完成. 别指望有什么证明程序强得足以覆盖古典数学的——哪怕只是算术的——全部真理，而又排除一切假话. 这个值得注意的事实是库尔特・哥德尔在 1931 年证明的.

第 329—330 页上的图解说明了加法与减法证明程序是完全的；能用这种记法表达的每个真理都能用那种程序来证明. 然而，这种记法只包括议定记法的少数侧面. 我们的给定程序要么不健全，因为它证得出假话，要么不完全，因为它证不出初等数论的一个真理.

哥德尔的发现给种种先入之见当头一击. 人们总以为，数学真理的本性是它的可证性. 但并非如此. 毫无疑问，用这种有限的清晰的初等数论记法能造出来的句子，每一个都是有意义的，每一个都是真的或假的，每一个与其自身的否定总有一个是真的；可是，它的真理性无法确保可证性. 数学中的真理与自然科学中的真理之间的差别恐怕不像我们想像的那样

* 译注：这样的算术恐怕只对计算机科学的某些领域有点用处，当然，也很可能是我无知.

** 译注：这话决非语无伦次. 哥德尔的确认为，要克服数学形式系统的不完全性，就得采纳越来越强的古典数学.

泾渭分明.

编号	步骤	来源
1	$x=x-(y-y)$	公理
2	$x-(y-z)=z-(y-x)$	公理

(我们按两种办法从这些公理推出定理:把任何一个项代人任何变号,或者用给定等式的一侧置换另一侧.)

3	$z=z-(y-y)$	第 1 步
4	$z=z-(x-x)$	第 3 步
5	$y-y=(y-y)-(x-x)$	第 4 步
6	$x-(x-z)=z-(x-x)$	第 2 步
7	$x-(x-(y-y))=(y-y)-(x-x)$	第 6 步
8	$x-x=(y-y)-(x-x)$	第 1,7 步
9	$x-x=y-y$	第 5,8 步

(式子"$x+y$"可以定义为"$x-((y-y)-y)$"的缩写.加法定律也就只是作为减法定律的缩写得出.因此定律"$x+y=y+x$"证明如下.)

10	$x-((x-x)-y)=y-((x-x)-x)$	第 2 步
11	$x-((y-y)-y)=y-((x-x)-x)$	第 9,10 步
12	$x+y=y+x$	第 11 步,定义

算术加法和减法的证明程序从取作公理的两个等式(第 1,2 步)开始,然后定出用代入或置换推出定理的各步.第 3 步至第 9 步可从列入右列的居前步骤得出.加法借助于减法来定义,然后证明它的一条初等定律(第 10—12 步).

数学基础方面的工作可以涉及概念,可以涉及规律.这篇文章大抵是在谈涉及概念的工作——仰仗定义把某个概念归约为别的概念.但哥德尔发现正好与研究规律及其在公理或证明程序中的包装有关.这类工作没有因为懂得重要数学分支的完全系统不可得就减少;这样那样

使人大开眼界的不完全系统是可得的.

事实上，哥德尔的结果大大激励了专注于规律的基础研究分支中的工作. 进入哥德尔证明的那些稀奇的技术已经造就了一个壮观而兴旺的数学分支：证明论. 这是基础产生上层建筑的一个实例. *

* 译注：哥德尔不完全性定理无疑是当代证明论的一个至关重要的背景. 但是，即使从技术上看，他的工作也远不及干岑、艾尔伯朗的工作对证明论的贡献大. 作者的夸张评价也许是因为他把递归递数论也包括在证明论中.

28.

悖 论

威拉德·范·蒯因(Willard van Orman Quine),1962 年 4 月号

弗雷德里克,《彭赞斯的海盗》* 里年轻的主人公,只经历 5 次生日,就已经满了 20 岁. 好几件事情凑到一起使这种局面可能发生. 年龄按度过的时间来算,生日却必须与出生的月份日期吻合;2 月 29 日少见,并非年年都轮得着一回的.

承认了弗雷德里克的处境可能发生,它又悖在哪里? 不外是开头那股子荒谬的气息. 人在第 n 次生日上超过 n 岁的概率小到 1 460 分之一,即便把周期性偏差估计在内也好不了多少**;这个概率过小,我们很容易忘记它的存在.

那么,可以笼统地说悖论就是乍一听荒谬但有一论证支撑的任何结论吗? 我想,到头来这种解释大抵说得过去,但是撂下好多东西没说. 支撑悖论的论证也许暴露一个被掩埋的前提的荒谬性,也许暴露历来被看作是物理理论、数学或思维过程的轴心的某种先入之见的荒谬性. 所以,在貌似迂腐之极的悖论里,可能潜伏着灾难. 发现悖论在历史上不只一次成为大规模改造思

---

* 译注:英国喜歌剧,A·沙利文作曲,W·S·吉尔伯特编剧. 蒯因以它为例讨论一类"悖论"即弗雷德里克的生日.

** 译注:现在通行的公历是 1581 年由教皇格利高里制定的,故称格利高里历. 按此历法. 2 月平年为 28 日,闰年为 29 日,而每四年置一闰. 而公元纪年每世纪之首,即××○○年均不置闰. 但若年数可用 400 整除,则仍为平年. 所以 2000 年是平年,2 月只有 28 日,而 2004 年则为闰年,2 月为 29 日. 在 1581 年以前,公元历法采用儒略历,据说是公元前 45 年由凯撒定的. 凯撒全名(英文)为 Julius Caesar,故此历称为儒略(Julius 之译音)历. 置闰方法与现在不同. 即没有规定每 400 年只能少置三个闰年. 文中讲到 20 岁只过了五个生日,就是因为生日是 2 月 29 日. 这只有在出生年可用 400 整除时才可能.

想基础的机缘. 实际上, 数学基础研究几十年来都受到两个悖论的困扰和刺激, 一个是 1901 年罗素提出来的, 另一个是 1931 年哥德尔提出来的.

《彭赞斯的海盗》中"最巧妙的悖论"拖累了弗雷德里克. 这个海盗生于 2 月 29 日, 年满 20, 但"前不久才过了五次"生日.

作为踏上这片危险地带的第一步, 让我们来考虑另外一个悖论: 乡村理发师悖论. 这不是将来要讲的 1901 年罗素大悖论, 要小一点. 1918 年罗素把发明权给予一位通报消息的无名氏*. 据该悖论称, 某村中有一男人, 是个理发师, 他尽给——也就是遍给而且只给——村里不自己剃胡子的男人剃胡子. 问: 那理发师自己剃胡子么?

在这个村子里, 任何男人由那理发师剃胡子当且仅当他不自己剃胡子. 所以, 特言之, 那理发师自己剃胡子当且仅当他不自己剃胡子. 说他自己剃胡子, 要出麻烦; 说他不自己剃胡子, 也要出麻烦.

现在比较一下两个悖论. 弗雷德里克的处境乍看是荒谬的, 但给个简单论证便足以让人永久认可. 反之, 谈到那理发师, 结论却太荒谬, 任何时候都无法认可.

眼看一个论证要去证明这个决不能接受的结论, 该怎么说呢? 幸好, 那个论证倚赖于假设. 它叫我们轻信一个故事, 讲的是某村中某男人尽给村里不自己剃胡子的男人剃胡子. 这是出麻烦的根子, 承认了它才落个荒谬的下场, 只好说那理发师自己剃胡子当且仅当他不自己剃胡子. 真正该作的结论正好是没有这号理发师. 摆在我们面前的立论方法一点也不神秘, 无非是两千年来逻辑家所说的归谬: 要否证那理发师, 便假定他, 再推出他自己剃胡子当且仅当他不自己剃胡子的谬论. 理发师悖论只不过证明了没有一个村子会有尽给村里不自己剃胡子的男人剃胡子的男人. 乍一听这样全盘否认是荒谬的; 凭什么不许村里有这号男人呀? 但归谬论证就表明了凭什么不许, 因此我们同意这个全盘否认, 正如我们同意弗雷德里克在第 5 次生日上远不止 5 岁乍看荒谬但终究可能.

毕竟, 这两个悖论同样是用无懈可击的论证去支撑徒具其表的谬论. 在一个悖论中, 人在第 n

---

* 译注: 发表在罗素的"逻辑原子主义哲学"一文中.

次生日上可能 $4n$ 岁是奇谈，却也是真理；在另一个悖论中，没有一个村子会有“尽给村里不自己剃胡子的男人剃胡子的男人”是奇谈，却也是真理.

然而，我不想把“悖论”一词局限于意在建立真理的情况. 我要突出特点，把这类悖论叫做讲真话的悖论或“真言悖论”. “悖论”是统称，完全可以说还有讲假话的悖论或假语悖论*.

弗雷德里克悖论是真言悖论，只要我们认定它的论点不是在谈剧中人物弗雷德里克，而是谈人在第 n 次生日上可能 $4n$ 岁这个抽象真理. 与此相仿，理发师悖论也是真言悖论，只要我们认定它的论点是没有村子会有这号理发师.

另一方面，假语悖论的论点不仅乍看是荒谬的，而且确实是假的. 原因在于号称证明的论证中有谬误. 典型的假语悖论就是 $2=1$ 的各色滑稽误证. 多数人都听说过它的这种那种版本. 这里是 19 世纪英国数学家奥古斯特·德摩根提供的版本. 令 $x=1$. 于是，$x^2=x$. 所以，$x^2-1=x-1$. 以 $x-1$ 除两侧，得出 $x+1=1$；既然 $x=1$，这等于说 $2=1$. 谬误之处是用 $x-1$ 来除，该数为 0.

不说“假语悖论”，单说“谬误”，行吗？不大行. 从谬误引出的结论可以假也可以真，可以在意料之外也可以在意料之中. 假语悖论的论证中总有谬误，但除此以外求证的论点还必须看似荒谬又果然为假.

古老的芝诺悖论中间，有些应当列入假语悖论. 以阿基里斯与乌龟的悖论为例. 要是不拘泥于这两个虚构的角色，略加概括的话，该悖论所求证的是这样一个荒谬论点：只要赛跑的一方不停地跑，无论跑得多慢，另一方永远追不上他. 芝诺的论证是说，每当追的一方抵达被追的一方到过的一处，被追的一方已经前移了一点. 把这个论证挑得更明，就发现谬误在于误认为递接时间段的无穷序列之和必为永恒. 其实，如果将后续段选得越来越短，递接时间段的无穷序列的全体既可以取有限时间又可以取无限时间. 这是收敛级数问题.

格雷林悖论

即使真言悖论与假语悖论合在一起也显然包括不了全部的悖论. 最惊人的悖论显然无法归人这两类中的任何一类. 考虑一下 1908 年库尔特·格雷林设计的悖论，它涉及异摹形容词或非自我摹状形容词.

---

* 译注：“假语悖论”原文为 falsidical(生造的) paradox. 作者在此处辩解道：“这个词听上去离谱，实则不然；falsidicus 在普劳图斯那里出现两次，在更早的作家那里也出现两次. ”普劳图斯是古罗马喜剧大师. “真言悖论”，英文则为 veridical paradox.

说明这个悖论要求先给自摹形容词或自我摹状形容词下定义.形容词"短的"是短的,就是说"短的"一词确实短到只有两个字;形容词"中文的"是中文的,因为"中文的"这几个字确是中文;形容词"形容词性的"是形容词性的,就是可以用它来形容某个词;形容词"多音节的"是多音节的,因为它有四个音节.用格雷林的术语说,这些形容词个个是自摹的:个个是对自身真的.另有一些形容词是异摹的.比方说,"长的"不是长的形容词;"德文的"不是德文的形容词;"单音节的"不是单音节的形容词.

形容词"异摹的"是自摹形容词还是异摹形容词?这么一问就引起格雷林悖论了.在这里我们处境极糟,跟碰上理发师相像.如果打定主意说"异摹的"是自摹的,就是硬要说这形容词对自身真.可是,那样一来,它反倒成了异摹的而非自摹的,因为凡用得上形容词"异摹的"便是异摹形容词.如果因此就打定主意说形容词"异摹的"是异摹的,那就是硬要说它对自身不真,这样一来,它可真正成了异摹的,从而它对自身真,这又使它成了自摹的.*

乡村理发师造成的窘境与此雷同.当时我们自救之法是宣布要归谬,最终论定没有这号理发

理发师悖论假定某村中有一理发师,他尽给不自己剃胡子的男人剃胡子.问题是这理发师给不给自己剃胡子.悖论是他给自己剃胡子当且仅当他不给自己剃胡子.

---

* 译注:这里译者多加了几句话.

师. 然而，这里没有理当舍弃而姑且假定的前提. 我们只不过给形容词"异摹的"下了定义，然后问它是不是异摹的，居然就陷人窘境. 事实上，不必用这个形容词，不必给它下定义，也能得到如出一辙的悖论. 按定义，"异摹的"是指"对自身不真"；所以，我们尽可改问形容词性短语"对自身不真"是不是对自身真. 结果发现，它是当且仅当它不是，因此它既是又不是*；足见仍有格雷林悖论.

照这么看，格雷林悖论似乎不折不扣是个假语悖论，它的论点是一自相矛盾的合取命题：我们手里的形容词对自身真并且不真. 但是，对照芝诺的或 2＝1 的假语悖论，格雷林悖论有它古怪之处，就是让人茫然不知论证中的谬误究竟在哪里. 由于这个缘故，最好认为它代表第三类悖论，跟真言悖论、假语悖论都不一样.

二律背反

这类悖论叫做二律背反，正是它们酿成思想危机. 二律背反用公认的立论方式制造自相矛盾. 它使人承认有些默认的受信赖的立论模式必须挑明，从此放弃或修正.

格雷林悖论的一种形式表明形容词短语"对自身不真"对自身既真又假，我们举它为例. 它的论证要依靠哪些默认的立论原则呢？最要紧的是这么一条：形容词"红的"对某物真当且仅当该物是红的；形容词"大的"对某物真当且仅当该物是大的；形容词"对自身不真"对某物真当且仅当该物是对自身不真的；依此类推. 这条原则的最末一例就是直接导致格雷林悖论的特例.

无可否认，每当我们谈起某形容词对某物真的时候，总是在默默使用这条原则. 例如，我们说形容词"红的"对某物真当且仅当该物是红的，而且对所有的形容词都是照此办理的. 这条原则简直就反映了所谓某形容词对某物真的本来意义. 它是一条硬原则，很难不信. 可是，所以会有格雷林二律背反，又明明要归罪于这条原则. 那个二律背反直截了当是这条原则的一个特例. 在这条原则中，令"某形容词"是"对自身不真"这个形容词性短语，令"某物"又是这同一个短语；这样一来，该原则当即断言"对自身不真"对自身真当且仅当它对自身不真. 足见该原则必须放弃，至少也要想点法子限制一下.

可是，该原则如此忠实地反映着所谓某形容词对某物真的本来意义，放弃它就不能不压根儿扔掉"对__真"，认定这是要坏事的昏话. 我们不再能说某形容词对某物真了，但形容词本身仍然可以照用不误，可以按通常方式用来表达物的属性；向"对__真"开刀只不过会切掉谈论某形

---

* 译注：建议读者认真想一想，怎么从"它是当且仅当它不是"推出"它既是又不是". 有人说非用排中律不可，根本不是那么一回事！

容词表达某物的属性的一种特殊措词*.

然而,这种特殊措词有它方便的地方,没了也挺可惜.我们其实大可不必根本不要它.毕竟,说某形容词对某物真与不真只在一种特殊情况惹了麻烦,其中谈到一特殊形容词——就是"对自身不真"这个短语——表达一特殊物——又是这同一个短语——的属性.只要在这种情况发誓不用"对__真"这种措词,也就把格雷林悖论打哑了.在其他情况,尽可像平常一样无忧无虑地继续使用这种措词,一直到又发现别的二律背反.

实际上,沾亲带故的二律背反要多少有多少.为了使这一大帮都丧失元气,只向一例开刀可不成,必须切得更深.我们必须发誓不仅禁止"对__真"与"对自身不真"联用,而且禁止它与其他各种涉及真理性的短语联用;我们必须发誓禁止与这类短语联用的也不只是"对__真",还包括其他各种涉真措词.让我们先看几个不这么干就会构成威胁的二律背反.

埃皮门尼德悖论

有个古老的埃皮门尼德悖论:埃皮门尼德身为克里特人,居然说所有克里特人都是撒谎者.如果他讲了真话,他便是撒谎者.看样子,这个悖论曾经传到圣保罗耳里,但他没抓住要领.圣保罗在致提多书**中警告道:"他们中的一个,还是他们当地的一个先知,说克里特人永远是撒谎者."

实际上埃皮门尼德悖论很毛糙,有漏洞.兴许有些克里特人是撒谎者,埃皮门尼德尤其当之无愧,但有些不是;兴许埃皮门尼德虽是撒谎者,但偶尔也讲真话.无论在哪种情况下,矛盾都没了.稍事修补,也能在某种程度上挽救原悖论.然而,我们不如转向表达同一观念的更简单的手法,也是古已有之了.这就是"撒谎者"悖论***,它简简单单说:"我在撒谎".甚至还可以删去绕弯子的人称代词,径直谈句子:"这个句子是假的."到这个份儿上,似乎得说它体现了二律背反最起码的本质:一个句子真当且仅当它假.

竭力扫除这个二律背反的人心生一计.他们抗议道,这样用法,短语"这个句子"无所指.他们的理由是,你把该指的句子补出来并不能消掉那个短语.试问,那个短语指什么句子?不就是句子"这个句子是假的"吗?需知"这个句子是假的"也是一个句子!于是,在原句子中把短语

---

* 译注:依照上文提到的原则,说"这朵花是红的"与说"'红的'对这朵花真"本来等价.如果废除"对__真"这种特殊措词方式,前一说法无碍,后一说法犯忌.

** 译注:见于《圣经·新约全书》提多书,第一章 12—14 节.

*** 译注:pseudomenon,一个希腊词的音译,意为"撒谎者".哲学史家、逻辑史家不该不知道这个事实吧?偏偏有人把它译成"诡辩式推理"!他们也应该知道"诡辩或推理"一词包含了更多的内容.

克里特人埃皮门尼德说，所有克里特人都是撒谎者. 这样一句话可以简化成"我在撒谎"或"这个句子是假的". 这类悖论叫二律背反，似乎可以证明它们是真的当且仅当是假的.

"这个句子"代之以它所指的句子的引文，便得到"'这个句子是假的'是假的". 可是，现在整个外层句不再断定假是它自身的属性，倒只断定假是同它自身不一样的某句子的属性了. 这不引起悖论.

然而，如果我们就是鬼迷心窍，执意要造一个句子，它不折不扣地说假是它自身的属性，那也还是做得到的. 比方说，这样造："'附在自身的引文后部时产生一假话'附在自身的引文后部时产生一假话". 这个句子指定了 15 字组成的一串字. 它讲，如果你把这串字连写两次又在首次写出的这串字两边添引号，那么产生的结果是假的. 可是，产生的结果正是讲这件事的这个句子本身. 这个句子真当且仅当它假，我们仍有"撒谎者"二律背反.

这是地道的二律背反，与涉及"异摹"或"对自身假"或"对自身不真"的二律背反地位相当. 不过，早先那个要靠"对_真"假手构件"对自身不真"作乱，眼前这个仅仅靠"真"假手构件"假话"或"不真的话"作乱. 为避免这两个二律背反及其亲朋故友，可以严加限制，不许再用"对_真"和"真"，也不许再用它们的等价物和派生物，或者无论如何不许再把这类涉真措词用于本身含这类涉真措词的形容词或句子.

这个限制可以稍微放宽，正如罗素与塔斯基（波兰数学家，如今在加利福尼亚大学）的工作

所提示的，允许涉真措词分层就做得到. 我们可以使用“真”、“对＿真”、“假”及其他涉真措词，但永远要附加或想像它附加了数字下标 0,1,2 等等；比方说“$真_0$”、“$真_1$”、“$真_2$”、“$假_0$”等等. 然后留心当涉真措词 T 用于句子或别的词语 S 时 T 的下标要高于 S 内部的任何下标，就能避免二律背反. 破坏这个限制，就算是无意义或不合文法，不算是真句子或假句子. 例如，我们尽可问形容词“长的”和“短的”是不是对自身$真_0$，这两问都有意义，回答分别为“不是”和“是”. 然而，我们不能去谈短语“对自身不$真_0$”是对自身$真_0$还是对自身$假_0$，这么谈无意义；我们不得不去问它是对自身$真_1$还是对自身$假_1$，这么问才不致引向二律背反. 无论问的是$真_1$还是$假_1$，回答都会是一个简单的两不偏袒的否定.

这一点值得再说说. 形容词“长的”和“短的”都能有意义地用于自身，一个用得假，一个用得真. 另一方面，形容词性短语“对自身$真_0$”和“对自身不$真_0$”根本不能用于自身，无所谓用得真还是用得假. 所以，问题“‘对自身$真_0$’是不是对自身$真_1$?”的回答是不；形容词性短语“对自身$真_0$”对自身没有意义，而不是对自身$真_1$.

接下去，让我们用下标法考察一下“撒谎者”的那个最鬼迷心窍的款式. 为了有意义，现在必须在出现“假话”一词的两处插入下标，而且要按递增的次序来插，比方说“‘附在自身的引文后部时产生一$假话_0$’附在自身的引文后部时产生一$假话_1$”. 这样一来，悖论没了. 这个句子不折不扣是假的. 据它讲，它所描述的某一组词是$假_1$句子. 这一组词就是“‘附在自身的引文后部时产生一$假话_0$’附在自身的引文后部时产生一$假话_0$”，但它事实上并不是$假_1$句子，它没有意义. 足见，说这一组词是$假_1$句子的句子是假的. 那是一个$假_2$句子.

这种消除二律背反的办法仿佛做过了头. 不过，一举删去“真”和其他涉真措词的代价要大得多. 取中等代价，可以只禁止把这类措词用于含这类措词的词句. 这两种方法都不及下标法来得经济. 下标法才允许我们把涉真措词用于含涉真措词的词句，尽管与惯例不合的手法让人发窘. 没有一种方子不是铤而走险；没有一种不是偏离自然的现成用语习惯的人为设计. 二律背反命该如此.

真言悖论带来惊讶，细想证明，惊讶很快自行消散. 假语悖论带来惊讶，弄清暗藏的谬误之后，看出它是虚惊一场. 二律背反带来惊讶，却没有更温和的对策能化解它，只得拒绝我们的一部分概念遗产了.

修正概念体制的事并非无先例，科学每有进展必小规模发生，有大进展必大规模发生，哥白尼革命、从牛顿力学转到爱因斯坦相对论便是实例. 变化再大，也可以指望迟早会习惯新体制，觉得它才自然. 日心说一度被称作哥白尼悖论，信奉此说的人也是这么叫的. 不含隐下标(或诸如此类的防护措施)的涉真措词或许总有一天不堪入耳，鉴于明明导致二律背反，听上去就是十足的昏话.

反过来说，在芝诺时代，他那些假语悖论一定是地道的二律背反. 我们当代人自鸣得意地指

出一个谬误：递接区间的无穷序列之和必为无限. 但是，这种见解无疑是芝诺时代概念体制的重要部分. 从芝诺的观点看，承认无穷多段合成有限段的收敛级数反而是人为的，跟我们给涉真措施添下标的新花招没什么两样. 或许公元 4000 年我们的后人——姑取这个渺茫的存在性假说——会觉得添下标很自然，像我们觉得收敛级数很自然一样. 一个人眼中的二律背反成了另一个人眼中的假语悖论，其间经历数千年.

芝诺悖论"阿基里斯与乌龟"提出一个谬论：只要乌龟不断移动，无论多慢，跑得飞快的阿基里斯就追不上它. 这叫假语悖论，号称的证明中有一谬误.

我还没有把当代的二律背反讲完. 顺便说说，还有一个好例是谈数与音节的，罗素把发明权给予一位名叫贝里的图书管理员. 十有一个单音节名称，因为"十"就只一个音节. 七十七有一个三音节名称. 七百七十七的七次方有一个很长的名称，全写出来也许多达数十音节；但这个数也可以用更短的办法来指定，刚才我只用 9 个音节（即"七百七十七的七次方"，恰好九个音节）就把它指定了. 然而可以肯定，无论靠名称还是靠摹状语，用少于 19 个音节无法指定的数是数不清的. 音节总共只有有穷多个，因此少于 19 个音节的名称和短语也只有有穷多个，而正整数却有无穷多个. 那么，很好，用少于 19 个音节不可指定的数当中必定有一最小者了. 这里便是贝里二律背反：那个用 19 个音节不可指定的最小数用 18 个音节可指定. 我刚才只用 18 个音节把它

指定了*.

这个二律背反跟前面见过的二律背反属于同一家族，因为其中的关键词“可指定”与“对__真”可以相互定义. 它又是一涉真措词，按罗素·塔斯基计划，该有下标. 那个用少于 19 个音节不可指定$_0$的最小数的确用 18 个音节可指定$_1$，但用少于 19 个音节不可指定$_0$**. 先用“对__真”译出“可指定”的意思，再按下标法处理“对__真”，就会自动看出这样消除贝里二律背反是行得通的.

罗素二律背反

并非一切二律背反都属于这个家族. 1901 年罗素发现的那个最著名的二律背反在这个家族之外. 它涉及类是不是自身的成员？有的类是自身的成员，有的类不是. 例如，所有不止五个成员的类的类有不止五个类是它的成员，所以这个类是自身的成员. 反之，所有男人的类不是男人，不是自身的成员. 所有不是自身成员的类的类呢？既然它的成员是非自身成员者，那么它够格作自身成员当且仅当它不是自身成员. 又是二律背反那副司空见惯的嘴脸：既是又不是.

早出好多年的罗素二律背反与格雷林“对自身不真”的二律背反***显然可类比. 但是，罗素二律背反不属于埃皮门尼德、贝里、格雷林二律背反所在的同一家族. 我这么说的意思是，罗素二律背反不能归罪于任何涉真措词，不是给涉真措施添下标解决得了的. 这个二律背反中的关键词是“类”和“成员”，两个词都不能用“真”、“对__真”之类的术语来定义.

我早先说了，二律背反使人承认有些默认的受信赖的立论模式必须挑明，从此放弃或修正. 就罗素二律背反而言，被他发现不合格的这种立论模式是一条类存在性原则：对你能够表述的任何条件，都存在一类，其成员是满足该条件的东西.

想抛弃这条原则可不容易. 指定一类的几乎不二法门就是说出一样东西属于它的充分必要条件，通称“成员条件”****. 把这样的条件说了出来，我们便感到这个类“给定了”，还要说没有这

* 译注：中文摹状语“那个用少于 19 个音节不可指定的最小数”恰好由 18 个音节组成，与原英文摹状语巧合. 上面说音节总共只有有穷多个，是由于每一个音节均由一个元音一个辅音构成，而英语中元音辅音均为数有限，所以音节总数只能是有穷的.

** 译注：要防止歧义，显然需要某种辅助手段来表示数字下标是附在“可指定”一词上的. 英文中词与词隔开，一般不需要辅助手段. 这里维持英文的原貌.

*** 译注：1908 年首次出现在他和 L·纳尔逊的文章里.

**** 译注：the membership condition，直译为“成员身分条件”.

号类简直不可理喻. 是的，这个类也许是空的，但怎么会根本没有这号类呢？该有的成员条件全都有了，还想要什么呢？可惜这样的训示帮不上一点忙. 二律背反就在面前，简单明了地证明这条类存在性原则站不住脚. 一看就懂，根据简单的逻辑道理，没有尽取非自身成员的类作成员的类，管它空不空. 不然的话，它势必要自为成员当且仅当不自为成员.

罗素二律背反给戈特洛布·弗雷格当头一击. 在《算术的基本定律》里，这位创建数理逻辑的德国数学家自认为在自相一致的逻辑规律中找到了数学基础. 那部书的第二卷行将付印，他却收到罗素来信. "算术摇摇欲坠"，据说弗雷格在复信里写道*，他替二卷补作的附记的开场白是："正值竣工之际楼基塌了，科学家很少会碰上比这更不称心的事. 伯特兰·罗素的一封来信置我于此种境地……"

罗素二律背反有理发师悖论所不及的新意. 诚然，也算肖似入微了. 根据简单的逻辑道理，没有村子会有尽给村里不自己剃胡子的男人剃胡子的男人，否则他会自己剃胡子当且仅当不自己剃胡子. 理发师悖论表明没有这号理发师，是一真言悖论. 罗素二律背反表明没有尽取非自身成员者作成员的类，为什么不是真言悖论？理发师悖论不算二律背反，为什么它要算？理由在于我们的思维习惯业已成形，从不推定有这号理发师，却不容分说地推定有这号类. 理发师悖论只配当个悖论. 这是因为，我们能引用纯逻辑根据靠归谬排除那理发师也不怎么惊讶；重温归谬论证，连这份惊讶也减退了；无论如何，我们从未铁心相信有这号理发师. 罗素悖论则是地道的二律背反，因为它逼迫我们抛弃的类存在性原则具有根本性. 来日方长哩. 过几百年，那条原则的荒谬性变成老生常谈了，某一篡位原则掌权已久，略备常识气息了，我们总会另眼看待罗素悖论，认定它也不过是个表明没有这号类的真言悖论. 一个人眼中的二律背反可以是另一个人眼中的真言悖论，一个人眼中的真言悖论又可以是另一个人眼中的陈辞滥调.

与格雷林、贝里、埃皮门尼德二律背反相比，罗素二律背反助长了更严重的危机. 那些二律背反攻击真理和指称的语义学，罗素二律背反则是攻击类的数学. 多数的数学分支要请类来帮帮忙，数学推理行程挑得越明越是如此. 差不多每逢要牵扯类的转折关头总要默默使用一条基本的类原则，恰恰就是让罗素二律背反搞得声名狼藉的类存在性原则.

我说过，格雷林、贝里、埃皮门尼德二律背反是一家，罗素二律背反不在其内. 它自有它的亲属. 事实上，它是如下无穷序列——权称"罗素二律背反序列"吧——的首项. 罗素二律背反表明，没有类尽取不是自身成员的类作成员. 接着有个二律背反表明，没有类尽取不是自身成员的

---

* 译注：罗素 1902 年 6 月 16 日去信，弗雷格当月 22 日回信. 蒯因撰写本文时这两封信尚未发表. 弗雷格研究的算术不是一阶的，正好基于上述未经限制的类存在性原则.

成员的类作成员. 进一步又有个二律背反表明,没有类尽取不是自身成员的成员的成员的类作成员. 依此类推,以至无穷.

很简单地限制一下负罪的类存在性原则,就可以使这一切二律背反及其亲故丧失元气. 那条原则说,对你能够表述的任何成员条件,都存在一类,其成员尽是满足该条件的东西. 我们会得到罗素二律背反序列,靠的是把条件取成不是自身成员,或不是自身成员的成员,或诸如此类. 每回出麻烦都是由于所取的成员条件本身又在谈论是与不是成员. 如果禁止我们的类存在性原则扩散到成员条件提到是否成员的情况,罗素二律背反及其亲故便不复再来. 这种类存在性限制法肖似引入下标前不久盘算过的那种涉真措词限制法,也就是不许把涉真措词应用于又含涉真措词的词句.

幸运的是,禁止类存在性原则扩散到成员条件提到是否成员的情况并不会搅乱偶尔用用类的数学分支. 正因为如此,虽然有罗素的及相关的二律背反,数学分支大多可以继续满不在乎地用类作辅助工具.

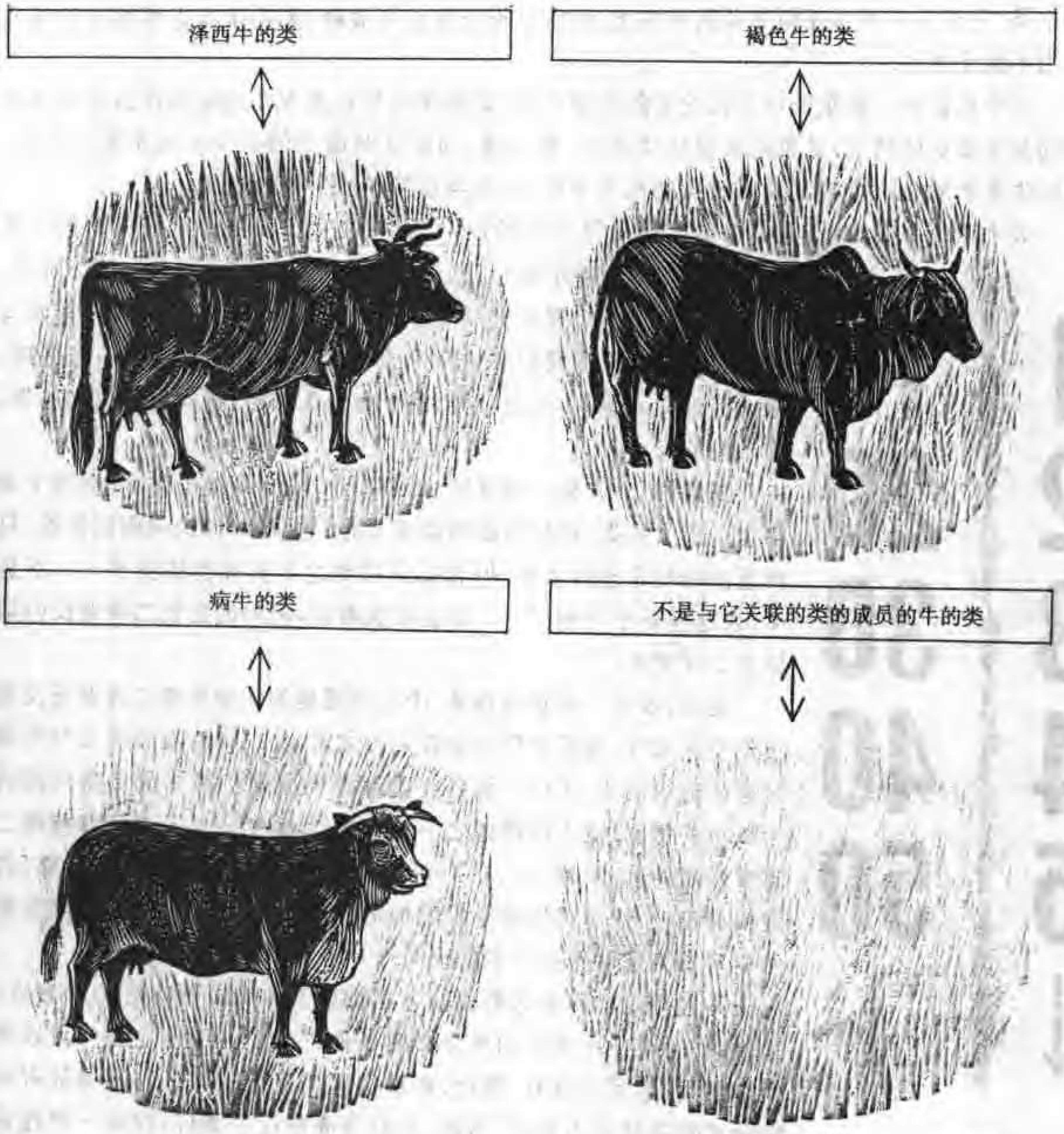
类的数学

有个不寻常的数学分支,它关注的中心就是类,叫做一般集论. 在这个领域里,人们专门研究类的类、类的类的类……,其手法不免要违背方才盘算的那种限制:禁止类存在性原则扩散到成员条件提到是否成员的情况. 所以,在一般集论中便要设法按较为适中的限制行事.

一般集论盛产悖论. 甚至前文提到的罗素二律背反序列也无法尽显这种悖论气质. 一般集论首先操办无穷(无穷类和无穷数),因而卷入无穷的悖论. 这个部类的一个相当温顺的老悖论说,你能把整类的成员无遗漏地与该类真正的一部分成员关联. 例如,你能把所有正整数与 10 的倍数关联,比方说 1 与 10 联,2 与 20 联,3 与 30 联,依此类推. 每个正整数都有了着落;10 的倍数竟然跟全体整数一样多. 这不是二律背反,倒是真言悖论. 在本行的专家中间连悖论气息也消失得精光,正合真言悖论应有的下场.

19 世纪一般集论和无穷算术的奠基人康托证明,某种东西的类永远多于那种东西;牛类多于牛. 一股强烈的悖论气息弥漫在他的证明中.

先注意一下"多于"的定义. 所谓这种东西多于那种东西,是指这种东西对那种东西的每种关联,都没法不遗漏这种东西. 所以,康托求证的是牛类对牛的每种关联总会落下一些牛类. 证明如下. 取牛类对牛的一种关联,可以是任何随意的关联. 一头牛也许属于与它关联的牛类,也许不属于. 现在来考虑不属于与它关联的类的牛. 这些牛本身也形成一牛类,不论该类是空类或

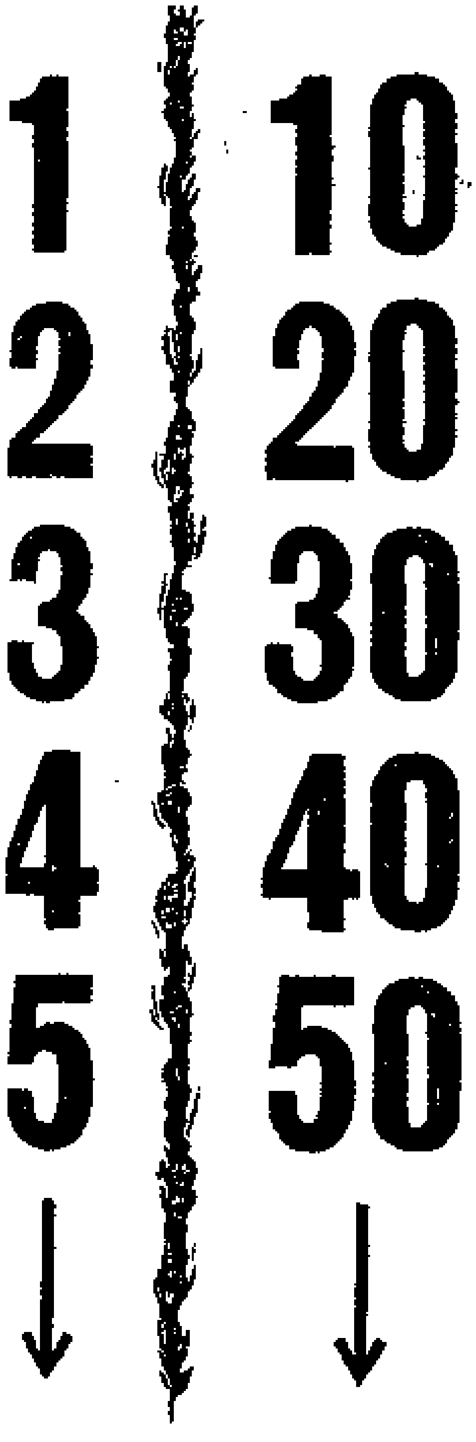


康托证明在集论中很重要. 他表明一种东西的类永远多于那种东西. 举牛和牛类(这里用矩形标出)为例. 如果把每头牛与一个类任意关联(它可以是该类的成员,也可以不是),总会剩下一类不与任何牛关联.

非空类.它正是一不与任何牛关联的牛类.假使该类与某头牛关联,那头牛势必要属于该类当且仅当不属于该类.

这个论证是一般集论中大批论证的典型代表.如果我们禁止类存在性原则扩散到成员条件提到是否成员的情况,这批论证统统要报销.要知道,确保证明成功的是一个制不服的牛类,指定该牛类靠的是一个提到是否成员的成员条件:不是与它关联的牛类的成员.

关于这个牛类论证,我更关心的倒是显示它的悖论气息.这个论证作否定性推断的方式跟理发师真言悖论差不多一样,也跟罗素二律背反差不多一样.所以,康托定理——这个定理不是只谈牛与牛类,而是泛谈任何一种东西与这种东西的类——让我们亲见悖论或仿悖论在严肃地致力于推进理论.他的定理使人懂得,对每个类,甚至每个无穷类,都存在一更大的类:它的子类的类.



正整数全部可以与 10 的倍数关联,尽管后者只是整数类的一部分.

到此为止,未见二律背反.再迈一小步,当即撞上一个.对每个类都存在一更大的类,样样东西的类怎么办?这样的悖论叫康托悖论.只要你重温康托定理的证明,但直接应用到这个灾难性的例子——不是谈牛,谈起样样东西来了——你会很快看出,说到底康托二律背反归结为罗素二律背反.

足见,要替一般集论奠基,中心问题是如何使罗素二律背反及其随员们丧失元气.如果想保住康托定理之类,使二律背反丧失元气的限制就必须适可而止,不能全面禁止类存在性原则扩散到成员条件提到是否成员的情况.诱人的路线之一是下标计,类似于防范真理和指称二律背反所用的计.罗素本人在 1908 年采取的方案跟这条路线相象,名为逻辑类型论.同年德国数学家策梅洛提出一条很不同的路线,随后若干年里又有人建议作进一步的改动.

一般集论的所有这类奠基方案都以二律背反的忠告为出发点;就是说,作为某类中成员的充分必要条件订出的一个给定条件可以真有对应的类,也可以没有.因此,各种供选奠基方案保证与不保证有对应类的成员条件各不相同.当然,非自身成员这个条件,没有一种理论承认有对应类.凡得出罗素二律背反序列的项的条件,都是如此.凡是会引起别的什么二律背反的,也都是如此,只要我们指得出来.

但也不能过于简单,禁止每个生产二律背反的成员条件,假定其余

的都有对应的类.麻烦之处是有那么一些成员条件,假定各条件本身有对应类并不打紧,可是这些类合在一起会产生矛盾.这就迫使我们去搜寻存在性假定的最佳一致组合,结果提出了各式各样的一般集论奠基方案.每一种计策都不自然,因为只有被二律背反搞得声名狼藉的那种不受限制的计策才自然;每一种都有竞争对手所缺乏的优点,要么更强劲,要么更简单,要么在特定领域推出的后果更吸引人.

我早先说过,发现二律背反是思想进化过程中的危机.在一般集论中,危机从 60 年前开始,至今没有过去.*

哥德尔证明

到目前为止,这篇短文里的好汉或恶棍一直是二律背反.别的悖论是不大起眼的陪衬.别的悖论毕竟不那么惊人,也比较好校正.别的悖论没有掺和 60 年危机,起码在这 60 年里没有.倘若其中哪个悖论往日掺和过持久的危机(芝诺的假语悖论无疑掺和过的),它当时就是名副其实的二律背反了.

临了,让我谈一个当代悖论.它决非二律背反,绝对是个真言悖论,可是,从它的证明模式来看,从结果的出乎意料来看,甚至从它掺和进一场危机的潜能来看,它都能同二律背反媲美.这就是哥德尔的数论不可完全性证明.

在 1931 年那篇巨作里,哥德尔证明:所有演绎系统,随便取什么样的公理,想把正整数初等算术的一切真理都罗织到它的定理之中是办不到的,除非它不自爱,也肯放一些假话进门(见本书第 30 章内格尔、纽曼的"哥德尔证明").哥德尔表明,对任何给定的演绎系统,怎么造一个初等数论句子,它真当且仅当它在该系统中不可证.所以,每个这样的系统,要么漏掉了该抓住的真理而不完全,要么证出了假话而破产.

不用费事就能把哥德尔证明跟埃皮门尼德悖论联上,或者跟"产生一假话"那种款式的"撒谎者"悖论联上.因为,把"假话"读成"非定理"就行了:"'附在自身的引文后部时产生一非定理'附在自身的引文后部时产生一非定理".

这句话不再表示二律背反,因为它不再说它自身是假的.它在说它自身不是定理,不是我尚未指定的某演绎理论的定理.如果它是真的,它成了该演绎理论没能纳人定理之中的一句真话.如果这句话是假的,它是定理,那么一来,该演绎理论便有假定理了,足见它不自爱.

* 译注:这里是指从 20 世纪初年开始出现危机.至今仍未过去的"今"确实包括 21 世纪之始的今天.

哥德尔采取如下做法去得到他的数论不完全性的证明. 他表明，在上面的话里出现的那种行话——谈非定理、谈附言在引文后部的行话——怎么按部就班用谈整数的算术行话反映出来. 按这种办法，他十分巧妙地得出一个只含算术词汇的句子，却继承了原句子的关键性特征：它真当且仅当它不是数论定理. 凡是可以选来给"数论定理"下定义的系统，哥德尔的把戏都行得通.

哥德尔的发现不是二律背反，倒是真言悖论. 初等数论不会有（泛言之纯数学更不会有）既健全又完全的演绎系统，这是真话嘛. 我们一向认为数学上的真就是可证，足见这句真话推翻了攸关大局的先人之见，在这个意义上，它确实是悖理的.

像任何真言悖论一样，我们也能习惯这个真理，从而渐渐弱化它的悖论性. 但这个真理也需要某种弱化. 数理逻辑家在干这件事，使尽了混身解数. 哥德尔的结果开创了一种研究方向，近30年间已经伸展到一个又大又忙的数学分支的各部分；这个分支有时叫做证明论，涉及递归函数及有关问题，实际上还包括一般的抽象的机器计算理论. 悖论多面，最不近情理的一面或许就是有时能最终显示它远远不像看上去那样轻薄无聊.

29.

非康托集论

保罗·J·科恩(Paul J. Cohen),
鲁本·赫尔希(Ruben Hersch),
1967年12月号

抽象集论时下进入某种变革状态,在好些方面都类似19世纪几何学里发生的那场革命.就像任何政治或科学革命一样,要这场革命的参加者或目击者预言它最终的后果是困难的,恐怕除了说后果势必深刻,什么也不好说.不妨一试的是引往事为来事的向导.诚然,这是靠不住的向导,但聊胜于无.

在这篇文章里,我们打算利用非欧几何这个时常谈起的老故事来阐明非标准集论这个现正展开的新故事.

当然,集合是数学中最原始最简单的观念之一,简单到了如今已经列入幼儿园课程.无疑正是因为太简单,它作为最根本的数学概念的作用直到19世纪80年代还没有挑明.只是那时康托才作出集论中第一个非不足道的发现.

要描述他的发现,必须先说明无穷集是什么意思.无穷集不外是一有无穷多个元素的集合.例如,所有"自然"数1,2,3等等的集合是无穷集,给定线段上所有点的集合也是无穷集.

康托指出,哪怕对无穷集,也能言之成理地谈集合的元素数,至少能言之成理地说两个不同的集合有相同的元素数.这跟有穷集是一样的道理.如果能把两个集合中的元素一一配对,我们就能说这两个集合有相同的元素数或相同的"基数".如果能做到这一点,我们就把这两个集合叫做等价集.

所有自然数的集合可以与所有偶数的集合配对,又可以与所有分数的集合配对(见下页的

2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,	18,	20,	22,	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1/1,	1/2,	2/1,	1/3,	2/2,	3/1,	1/4,	2/3,	3/2,	4/1,	1/5,	…

集合叫做可数的，如果它可以与自然数（中行）一一配对．因此，所有偶数的集合（顶行）是可数的．所有分数的集合（底行）也是可数的．这里出示的分数是德国数学家格奥尔格·康托（1845—1918）用过的；它们的排法不合自然次序，而是取分子与分母之和决定的次序．两例都表明，无穷集不像有穷集，它可以与它的子集之一等价．

示意图）．这两组例子显示了无穷集的悖理之处：一个无穷集居然可以等价于它的真子集之一．事实上，不难证明，一个集合是无穷集当且仅当它等价于它的某个子集．

这一切虽然迷人，却不是康托的创新．只有表明了并非所有无穷集都有相同的基数，无穷集的基数概念才会让人感兴趣．这正是康托在集论中的第一个伟大发现．他用他著名的对角线证法表明了自然数的集合与线段上点的集合不是等价的（见 213 页上的示意图）．

足见，至少有两种不同的无穷．第一种，自然数（及任何等价的无穷集）的无穷，叫做阿列夫零（$\aleph_0$）．基数为 $\aleph_0$ 的集合叫做可数集．第二种无穷是一线段所表示的无穷．它的基数用德文小写的 c（$\mathfrak{c}$）来命名，$\mathfrak{c}$ 指"连续统"．任何线段，不拘长度大小，均有基数 $\mathfrak{c}$（见下页上的示意图）．平面上的任何矩形，空间中的任何立方体，乃至一切无界的 n 维空间——不论 n 是 1，2，3 还是 1 000！——也都是如此．

无穷之链每升一级，总要顺乎自然地再升一级．这里，我们撞上了一个概念：给定集合的所有子集的集合．如果原集合叫做 A，那么这个新集合叫做 A 的幂集，写作 2^A．正如从 A 可得幂集 2^A，从 2^A 又可得 $2^{(2^A)}$，这样继续下去，只要我们喜欢．

康托证明，不论 A 是有穷集还是无穷集，2^A 永远不会与 A 等价．所以，不断形成所有子集的集合这一过程生成一条递增的不等价无穷集的无终端链．特言之，如果 A 是自然数集，那就不难证明 2^A（自然数集的所有子集的集合）与连续统（线段上所有点的集合）是等价集．简言之，

$$2^{\aleph_0}=\mathfrak{c}.$$

现在读者也许会想到一个问题．有没有无穷集，其基数在 $2^{\aleph_0}$ 与 $\mathfrak{c}$ 之间呢？也就是说，线段

1. .18347984639001...
2. .36948570110924...
3. .50472200173996...
4. .99801230109487...
5. .00102305497610...
6. .51546798371238...
7. .55119871350426...
⋮ ⋮

实数集不可数，康托用他著名的对角线证法表明了这个事实. 这里按小数记法随机列出该集合的一个样本. 如果取第一个数的第一个数字，第二个数的第二个数字，依此类推，便得到一个实数，其无尽小数展开式是.164 027 7…（浅色数字）. 如果随机改变展开式中的数字，可以得出.275 138 8.……思索片刻就会看出，新数与表上每个数至少有一处不相同. 因此该数未出现在表上，于是证明表是不全的.

上有没有无穷点集，既不等价于整个线段又不等价于自然数集呢？

这个问题，康托想到了，不过他没能找到任何这样的集. 他论定——不如说是猜想——没有这号东西存在. 康托这个推测，人称"连续统假设". 希尔伯特 1900 年拟订的那份大名鼎鼎的未解数学问题表上，第一个问题便是征询连续统假设的证明或否证. 只是在 1963 年它才最后解决. 然而，所谓"解决"，意思跟希尔伯特心中的意思截然不同.

想着手处理这个问题，就不能再信赖康托的集合定义. 照他的说法，集合是"我们的直觉或思维能够明确区分的对象所汇集成的任何总体". 这个定义貌似清澈，殊不知隐藏着一些危险的陷阱. 1902 年弗雷格可悲的经历即是一例. 弗雷格行将发表一部里程碑式的作品，其中要重建算术，使算术基于集论，也就是当时按康托的工作来理解的"直观"集论. 这时弗雷格收到年轻人罗素的来信. 他作出回应，给他的论著末尾添了这样一段后记："正值峻工之际楼基塌了，科学家很少会碰上比这更不称心的事. 就在这部作品快要印好的时候，伯特兰 · 罗素先生的一封来信置

我于此种境地."

罗素的突然袭击无非是点出一个简单的谜. 有两种集合. 首先是一些古怪的集合，比方说"那个恰好能用二十二个汉字摹状的所有集合的集合"*，其古怪之处是它自身就满足它的定义性质；换言之，这种集合包含自身作元素. 我们把这种集合叫做 R 集，R 代表罗素. 然后是其他一切集合，不属于自身的集合. 把这种集合叫做非-R 集. 现在，罗素说，请考虑一下所有非-R 集的汇聚(这里只是为行文方便才引入"汇聚"一词作"集合"的同义语.). 把这个集合叫做 M. 于是，M 要么是 R 集要么是非-R 集. 然而，如果 M 是非-R 集，那么，按 M 的定义，M 属于 M. 所以，M 符合 R 集的定义：M 是 R 集. 这是一个矛盾. 另一方面，如果 M 是 R 集，那么，按 M 的定义，M 不属于 M. M 不属于自身，就是说，M 不是 R 集. 这又是一个矛盾. **

教训：自由运用康托的直观集合概念会导致矛盾. 只有采用某种更精巧的处理法去避开二律背反，集论才能成为数学的可靠基础. 当人们终于知道了罗素所提出的那类矛盾之后，他们正是这样做的.

从前也发生过不受欢迎的悖论闯进一套貌似清晰的数学理论的事. 有过芝诺悖论，它们向希腊人揭示了直观线概念和点概念中始料未及的复杂之处. 我们尽可作个类比：罗素发现无节制运用直观集合概念要出矛盾，芝诺则是发现无节制运用直观"线"与"点"概念要出矛盾.

公元前 6 世纪发端于泰利斯的希腊几何曾经信赖一未经规定的直观"线"概念和"点"概念. 然而，大约 300 年后，欧几里得已经给这些概念作了公理化处理. 对于欧几里得，几何对象仍是凭直觉去认识的实实在在的东西，但是，作为几何推理的题材，它们要由某些未经证明的论断("公理"和"公设")来规定，它们的其他一切性质理应当成"定理"从那些论断得到证明. 我们不知道这种演变是不是、在多大程度上是在应答芝诺那样的悖论. 不过，无可怀疑，在希腊人看来，只依赖(至少他们原想这么做，也相信是这么做的)从叙述清楚的少量假定得出的逻辑推论，几何学要可靠得多了.

就集论而言，类似的演变没有花 300 年，仅仅花了 35 年. 如果说康托扮演泰勒斯的角色，是个能够只信赖直观推理的学科奠基人，那么 1908 年为公理化集论奠基的策梅洛就扮演着欧几里得的角色. 当然，创造"欧氏几何"的希腊几何家其实有一长串，欧几里得只是其中一个；在公理化集论的创造过程中出现过半打伟大的名字，策梅洛也只是其中的第一个.

* 译注：请读者注意，定义或摹状这个集合的短语："那个恰好……的集合"恰好是 22 个字.

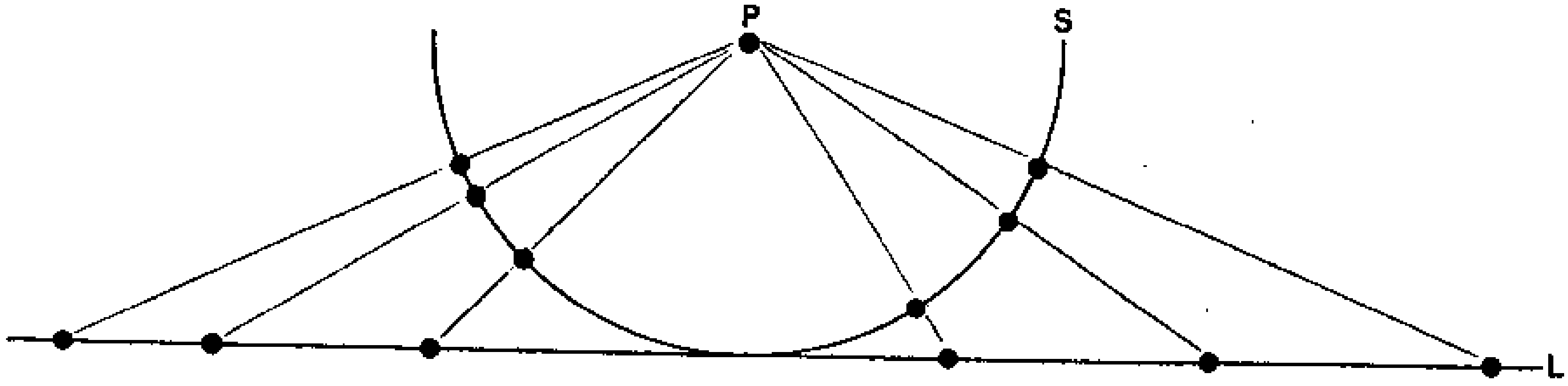
** 译注：代作者交代一句：在狭义集论中有替换公理，从它可推出策梅洛的子集公理. 根据迄今已知的全部事实，只要严格按子集公理行事，无法形成 M 那样的集合.

正像欧几里得列出点和线的某些性质，只把能从这些公理（不是从任何可能的直观论据）获得的几何定理看成已证的，在公理化集论中也把集合简单地看成满足一组给定公理的不定义对象. 当然，我们依然想研究集合（或线，依情况而定），所以公理并不是任意选择的，而是按照我们的直观集合概念或线概念选择的. 尽管如此，我们却禁止直觉起任何更进一层的正式作用；我们只接受能从公理推出的命题. 这些公理所描述的对象可能确实存在于现实世界之中，但这个事实与形式演绎过程不相干（尽管对发现不可少）.

我们约定照章行事，仿佛几何中"线"、"点"、"角"的符号或集论中"集合"、"是__的子集"等等的符号只不过是纸上的印记，可以只按一组给定规则（公理与推论规则）改变排法的印记. 只有按这类符号操作规程得到的陈述才当作定理接受.（在实践上真正接受的只是人付出足够时间与劳力之后显然能够按这种办法得到的陈述.）

在几何史上有条公设起过独特的作用. 这就是平行公设. 它说过给定点恰好可作一条线与给定线平行. 作为公理，这句话引起的困难是不具备自明性，而人总觉得数学理论的基石要有自明性才好. 事实上，平行线定义成哪怕无限延长（"至无穷"）也永不相交的线. 既然我们画在纸上或黑板上的任何线都是有穷长的，这条公理按本性便不能靠感官的直接观察来检验. 尽管如此，它在欧氏几何中却起着不可缺少的作用. 有好多世纪，几何学里的一个主要问题就是要证明平行公设，要表明能把它当作定理从更自明的欧氏公理得出来.

真巧，在抽象集论中也有一条不寻常的公理是某些数学家觉得难于忍受的. 这就是选择公理，它说的是：如果 α 是任何集的汇聚 $\{A, B, \cdots\}$，而且 α 中的集无一是空集，那就存在一集合 Z，



无穷线与有穷线段也可以表明有一一对应. 这里 P 是半圆 S 的中心，S 又与无穷线 L 相切. 从 P 发出的一条射线只在一点穿过 S. 这样，从 P 发出的诸射线就给出 S 上诸点与 L 上诸点的一一配对. 当射线从左到右改变方向时，S 和 L 中的一切点都漏不掉. 足见，无穷线上的点与任意长的有穷线段上的点之间存在着一一对应.

组成它的元素恰好一个来自 A，一个来自 B，依此类推，遍及 α 中所有的集. 举例来说，如果 α 由两个集组成，一是所有三角形的集，一是所有正方形的集，那么 α 显然满足选择公理. 我们只要选择某个特殊的三角形和某个特殊的正方形，然后让这两个元素组成 Z 就行了.

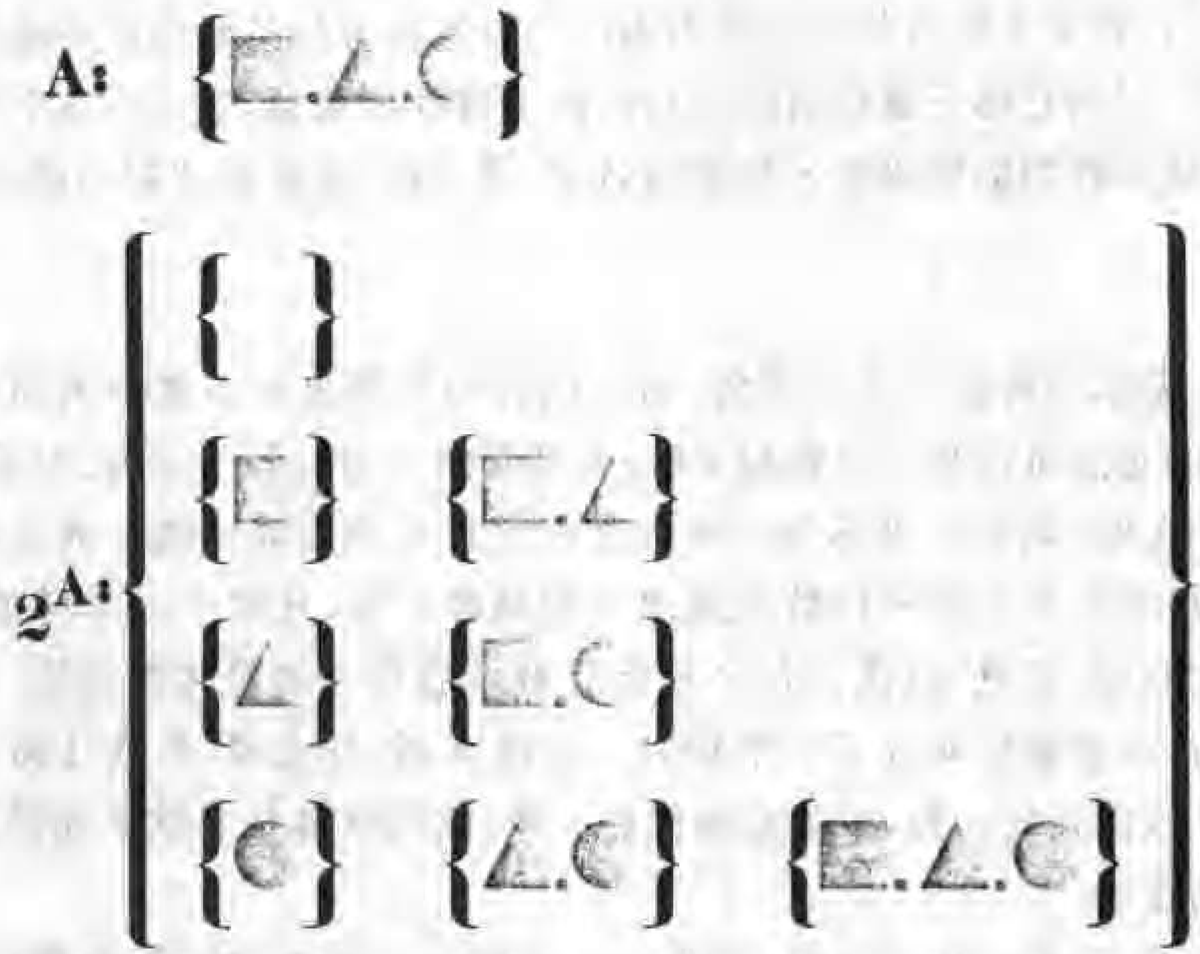
多数人觉得选择公理像平行公设一样，凭直觉就很能言之成理. 它引起的困难在于我们允许 α 享有的幅度："任何"集的汇聚. 我们已经见到了，存在着由越来越大的无穷集形成的无终端链. 像这类多得不可思议的集的汇聚，没法子真从它的所有成员集中一个接一个地去选. 如果我们接受选择公理，也无非是接受可能作这样的选择的信仰，正像我们接受平行公设就是接受两线延长至无穷时性状如何的信仰一样. 事实证明，从貌似无邪的选择公理可推出一些出乎意料的极端强劲的结论. 例如，有了它，我们就能够用归纳推理去证明有关任何集合中的元素的陈述，一如我们能够用数学归纳法去证明有关自然数 1,2,3 等等的定理.

选择公理在公理化集论中起着独特的作用. 许多数学家认为，只要可能，就应当避免用它. 不假定选择公理是真是假的公理化集论则是几乎所有数学家都信得过的. 下面我们用"狭义集论"指这么一个公理系统，用"标准集论"指以策梅洛和亚伯拉罕・弗兰克提出的全套公理为基础的那种集论：狭义集论加选择公理.

1938 年，库尔特・哥德尔深刻阐明了集论这门学问. 哥德尔最出名的是 1930 至 1931 年他那伟大的"不完全性定理"（见内格尔、纽曼的"哥德尔证明"，本书第 30 章）. 这里我们指的是哥德尔稍后的一项工作，非数学家不大了解的. 1938 年哥德尔证明下列根本结果：如果狭义集论一致，那么标准集论也一致. 换言之，选择公理并不比别的公理更危险；如果在标准集论中能找到矛盾，那么在狭义集论内部必定已经暗含矛盾了.

这还不是哥德尔所证明的全部结果. 我们请读者回想一下康托的"连续统假设"，即不存在大于 $\aleph_0$、小于 c 的无穷基数. 哥德尔也表明了，我们尽可放心取连续统假设作集论中的一条补充公理；就是说，如果连续统假设加狭义集论蕴涵矛盾，那么在狭义集论内部又必定已经暗含矛盾了. 这是康托问题的半个解；它不是证明连续统假设，只是证明它不可否证.

想懂得哥德尔怎样达到他的结果，需要懂得公理系统的模型是什么意思. 让我们暂且回到平面几何的公理. 如果取这些公理，包括平行公设在内，我们就有了欧氏几何的公理；反之，如果让其他一切公理保持不变，但是把平行公设换成它的否定，我们就有了某种非欧几何的公理. 对两个公理系统——欧氏的与非欧的——我们都要问：这组公理会导致矛盾么？

对欧氏系统提这个问题似乎不合情理. 我们一向熟悉的教了 2000 年的中学几何怎么会错呢？在非数学家眼里，倒是后一种公理系统绝对有点可疑，因为它否认凭直觉言之成理的平行

给定集合的所有子集的集合如图所示. 顶部的正方形、三角形和圆形构成三元集 A. 这个集合共有 2^3 或 8 个子集(按略微反常的假定把整个集和空集也算在内). 这个新集合由八个元素组成,叫做 A 的幂集,记为 2^A. 如果 A 有 n 个元素,A 的幂集便有 2^n 个元素. 如果 A 是无穷集,2^A 也是无穷集,但不等价于 A.

公设. 尽管如此,从 20 世纪数学的观点来看,这两种几何多少是平起平坐的. 两者都是有时能应用于物理世界的,两者又都是一致的. 所谓"一致"取一相对意义,我们要作点解释.

我们先表明非欧几何一致. 为了做这件事,只要把"线"这个词处处换成短语"大圆",指一穿过球体中心的平面在该球体表面上形成的线. 现在把各公理看成谈到一给定球表面上的点与大圆的陈述. 此外,约定把球面上每一对对径点与单个点等同看待. 只要读者乐意的话,他可以想像非欧几何的公理改写了,其中"线"这个词处处换成了"大圆","点"这个词处处换成了"点对"(即一点与其对径点的一对). 于是,显而易见,所有的公理都是真的——至少可以说,要是我们对球体表面的普遍见解是真的,那些公理就都是真的. 事实上,从欧氏立体几何的公理不难证明一个定理:球体表面是方才描述的那种意义上的一个非欧曲面. 换言之,我们看出来了,如果非欧几何的公理导致矛盾,那么普通的欧氏球体几何也会导致矛盾. 这样,我们就有了一个相对一致性证明:如果欧氏三维几何一致,那么非欧二维几何也一致. 我们说,欧氏球体的表面是非欧几何公理的一个模型.(在我们所用的这个特殊模型中平行公设失效是因为根本没有平行线. 也有可能造一

曲面,叫"伪球面",在其中平行公设为假是因为过一点不止有一条线与给定线平行.)

发明非欧几何、识别它的一致性被欧氏几何的一致性所蕴涵,这是许多伟大的19世纪数学家的工作;我们要特别提到伯恩哈德·黎曼的名字.只是在20世纪才提出欧氏几何本身是不是一致的问题*.

这个问题是由希尔伯特提出并回答的.希尔伯特的解是坐标系观念的简单应用.许多大学新生知道,平面上的每点可以与一对数相关联,就是它的 x 坐标与 y 坐标.然后每条线或每个圆便可以与一方程相关联,就是 x 坐标与 y 坐标之间仅仅对该线或该圆上的点成立的一种关系.靠这类办法,我们就在几何与初等代数之间建立起某种对应,凡属于一学科的陈述都有一属于他学科的陈述同它对应.足见,欧氏几何公理会导致矛盾仅当初等代数规则——普通实数的性质——会导致矛盾.这里我们又有了一个相对一致性证明.过去说,非欧几何一致,如果欧氏几何一致;现在又说,欧氏几何一致,如果初等代数一致.欧氏球体是非欧平面的模型;坐标对的集合又是欧氏平面的模型.

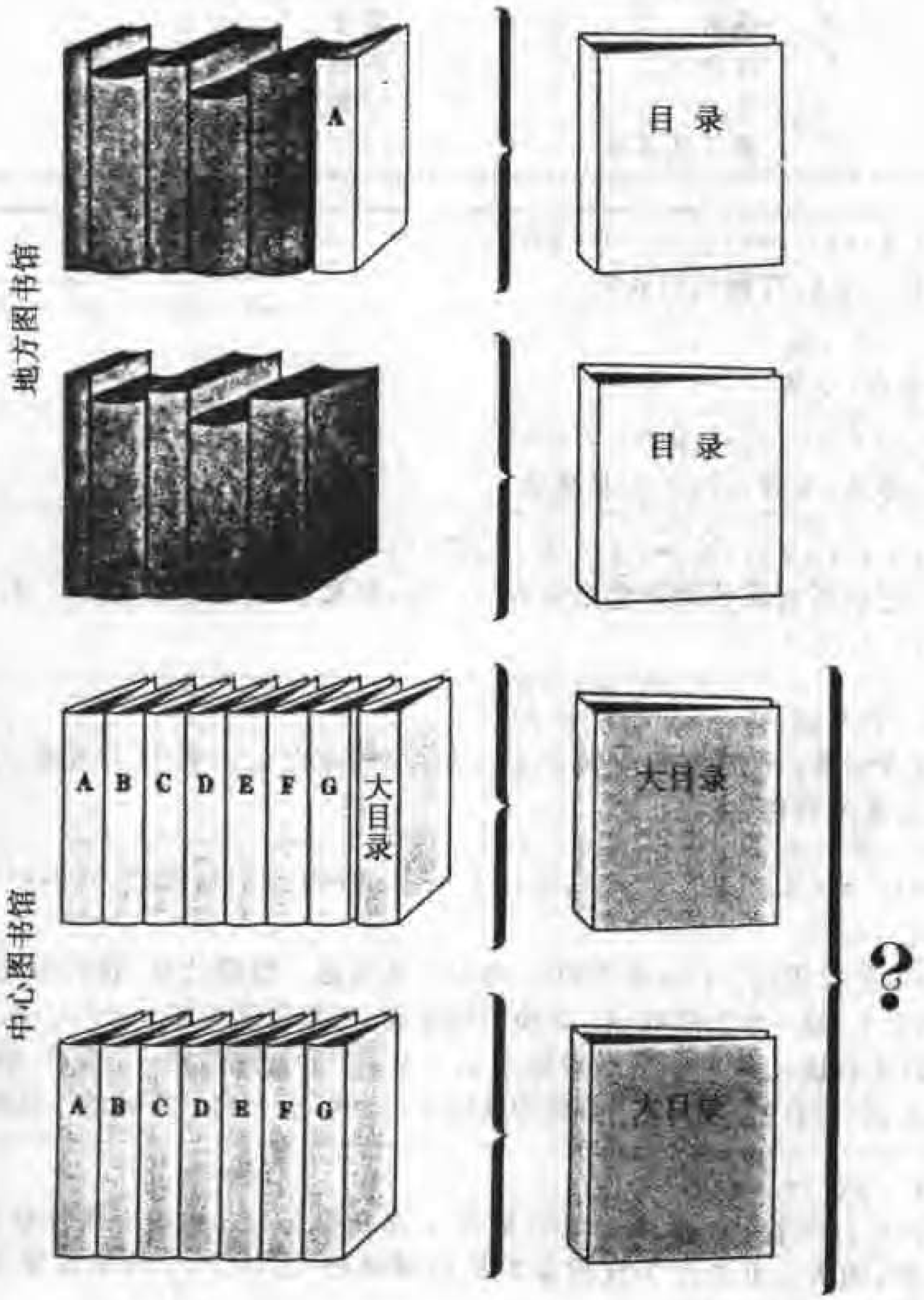
面前有了这些例子,我们就可以说,哥德尔的选择公理和连续统假设相对一致性证明类似希尔伯特的欧氏几何相对一致性证明.在两个场合都是用某种更初等的理论来核正标准理论.当然,从来没有人认真怀疑欧氏几何的可靠性,而布劳威尔、外尔和庞加莱这样杰出的数学家对选择公理却持有严重的怀疑.在这个意义上,哥德尔结果的影响和意义要大得多.

集论中类似非欧几何的那种发展——我们不妨称之为非康托集论——只是从1963年才在本文作者之一(科恩)的工作中出现."非康托集论"是什么意思呢?正像欧氏几何与非欧几何取相同的公理,只有平行公设在外,标准("康托")集论与非标准("非康托")集论也只是有一条公理不同.非康托集论取狭义集论的公理,但不是添上选择公理,倒是添上选择公理的这种或那种形式的否定.特言之,可以取连续统假设的否定作一条公理.我们将要说明,这样一来,连续统问题便有了完备解.哥德尔的发现是连续统假设不可否证,现在添上的则是连续统假设也不可证明.

我们描述过的几何一致性证明要求造模型,同样,哥德尔结果与科恩的新发现也都要求造模型.在这两种情况,我们想证明的东西相仿:如果狭义集论一致,那么标准集论或非标准集论也一致.

哥德尔的想法是给狭义集论造一个模型,证明在这个模型中选择公理和连续统假设是定理.他的做法如下.我们只使用狭义集论的公理(见356页上的详解),先靠公理2保证至少存

* 译注:准确些说,应当是19世纪末期.希尔伯特在1899年出版的《几何基础》一书中提出了这个问题.



罗素悖论示例：设想某国图书馆员依惯例不把他们的书列入卡片目录，而是列入活页目录；就是说，目录本身就是一本书．有些图书馆员把目录自身列入目录（顶部）；有些不这么做（顶部下方第二栏）．仿罗素大名，把第一种目录叫做 R 集；R 集是包含自身的集合．然而，如果国家图书馆长决心编一部所有不列自身的目录的大目录，会怎样呢？他那部大目录属不属于那部大目录？

$\forall$	对所有	$\leftrightarrow$	当且仅当	$\in$	是__的成员(元素)
$\exists$	存在	$\vee$	或者	$=$	等于
$\exists!$	存在唯一的	&	并且	$\neq$	不等于
$\cup$	并	$\sim$	非	$\varnothing$	空集
$\rightarrow$	蕴涵	$\subseteq$	是__的子集		

1. 外延性公理：$\forall x,y(\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y)$.
两个集合相等当且仅当它们有相同的成员.

2. 空集公理：$\exists x\forall y(\sim y\in x)$.
存在一个无成员的集合(空集).

3. 无序对公理：$\forall x,y\exists z\forall w(w\in z\leftrightarrow w=x\vee w=y)$.
如果 x 和 y 是集合，那么(无序)对 $\{x,y\}$ 是集合.

4. 和集公理(并公理)：$\forall x\exists y\forall z(z\in y\leftrightarrow \exists t(z\in t\,\&\,t\in x))$
如果 x 是集的集合，它的所有成员的并也是集合.(例如，如果 $x=\{\{a,b,c\},\{a,c,d,e\}\}$，那么 x 的(两)元素的并是集合 $\{a,b,c,d,e\}$.)

5. 无穷公理：$\exists x(\varnothing\in x\,\&\,\forall y(y\in x\rightarrow y\cup\{y\}\in x))$.
存在一个集合，它包含空集，并且，如果 y 属于 x，y 与 $\{y\}$ 的并也在 x 中. 区分元素 y 与单元集 $\{y\}$ 很要紧. 这条公理保证了无穷集的存在性.

6_n. 替换公理：$\forall t_1,\cdots,t_k(\forall x\exists!\ yA_n(x,y;t_1,\cdots,t_k)\rightarrow\forall u\exists vB(u,v))$，此处 $B(u,v)\equiv\forall r(r\in v\leftrightarrow\exists s(s\in u\,\&\,A_n(s,r;t_1,\cdots,t_k)))$.
这条公理很难改用中文叙述. 它叫 $6n$ 而不叫 6，因为它其实是一整族公理. 我们假定本系统中可表达的全体公式已经枚举出来了；第 n 个公式叫 A_n. 替换公理是说，如果对固定的 $t_1,\cdots,t_k$，$A_n(x,y;t_1,\cdots,t_k)$ 把 y 唯一定义为 x 的函数，比方说 $y=\varphi(x)$，那么对每个 u，y 在 u 上的值域都是一个集合. 粗糙地说，这意味着在集论形式语言中能陈述的任何("合理")性质都能用来定义一个集合(具备所陈述的性质的那些东西的集合).

7. 幂集公理：$\forall x\exists y\forall z(z\in y\leftrightarrow z\subseteq x)$.
这条公理说，对每个 x，存在着 x 的所有子集的集合 y. 虽然这里的 y 也由一种性质来定义，幂集公理却是替换公理包容不了的，因为 y 并未作为任何函数的值域给出. 实际上，y 的基数要比 x 的基数大，所以这条公理才使我们能够造更高的基数.

8. 选择公理：如果 $a\rightarrow A_a\neq\varnothing$ 是对所有 $a\in x$ 都有定义的函数，那么对 $a\in x$ 存在着另一函数 $f(a)$ 并且 $f(a)\in Aa$.
这就是著名的选择公理，它使我们能够作无穷多次"选择"，即使我们手里没什么性质来定义选择函数，从而改用 6_n.

9. 正则性公理：$\forall x\exists y(x=\varnothing\vee(y\in x\,\&\,\forall z(z\in x\rightarrow\sim z\in y)))$.
例如，这条公理明确禁止 $x\in x$.

策梅洛-弗兰克集论公理在此列出. 为了陈述这些公理，有必要使用集论符号，顶部给出了符号一览表. 这个公理系统是由策梅洛和弗兰克提出的.

在一个集(空集),然后靠公理 3 和公理 4 保证存在一越来越大的无穷集的无穷序列;然后靠公理 5 保证存在一无穷集;然后靠公理 7 保证存在一越来越大的不等价无穷集的无终端序列,如此等等. 哥德尔大体就是这样规定了一类集合,它们都可以从较简单的集合一步步地实际构造出来. 他把这些集合叫做"可构造集"*;它们的存在性是由狭义集论的公理来保证的. 接着他又表明,在可构造集的范围内选择公理和连续统假设都可以得到证明. 这就是说,第一,从任何可构造集($A, B, \cdots$)的可构造汇聚 α 可以选择一个可构造集 Z,组成它的元素至少一个来自 A,一个来自 B,依此类推. 这就是选择公理,在这里也许叫做选择定理更合适. 第二,如果 A 是任何无穷的可构造集,那就没有可构造集在 A 与 2^A"之间"(大于 A,小于 A 的幂集,与二者都不等价). 因此,"广义连续统假设"在可构造集论中得到证明了. 只要取第一个无穷基数 $\aleph_0$ 作 A,刚才那句话便是连续统假设.

假使我们准备采纳只存在可构造集这条公理的话,哥德尔的工作就会完全解决掉这两个问题. 为什么不这么做呢? 因为,人们感到,没有理由坚持按任何预定公式来构造集合,否则就不准承认它是真正的集合. 普通的集未必是可构造集,因而在普通集论中既没有证出选择公理也没有证出连续统假设. 无论如何,有一点是确定了:尽可假定它们中的任何一个而不致引起任何矛盾,除非狭义集论的那些"安全"的公理已经自相矛盾. 它们引起的任何矛盾必定会已经出现在可构造集论中,而后者是普通集论的模型. 换句话说,已知两者不能由其他公理否证,却不知它们能不能证明.

在这里,跟欧氏几何中的平行公设作类比尤其恰当. 直到最近人们都认为欧氏公理理所当然是一致的. 几何学家感兴趣的问题是它们是否独立,就是说,平行公设能否根据别的公理予以证明. 为证出平行公设,先后有一大批几何学家试图表明它的否定要导致谬论. 看样子是高斯第一个看出这类"谬论"无非是某种新的非欧几何的定理而已. 然而,高斯有勇气去想的,他却没勇气发表. 引出否认平行公设的逻辑后果这件事留给了鲍耶依、罗巴切夫斯基和黎曼. 这后果就是发现各种"异想天开"的几何. 在这以后才认识到,二维非欧几何恰好是某几种弯曲表面(球面和伪球面)的普通欧氏几何,"异想天开"的几何原来跟"现实世界"的欧氏几何同样具备逻辑一致性.

---

* 译注:constructible sets,我国逻辑家喜欢译作"可构成集",用心良苦,但不合哥德尔的本意. 他引进这个术语时明白交代过"这里'constuctible'一词要按半直觉主义的涵义去理解". 一旦译作"可构成集",他的话反而落空.

“共同的见解”
1. 与同一物相等的物彼此相等.
2. 等物加等物,总和相等.
3. 等物减等物,所余相等.
4. 彼此重合的物彼此相等.
5. 整体大于部分.
“公　设”
1. 从任何一点到任何一点(有可能)作(恰好一条)直线.
2. (有可能)把有限直线循一条直线不断延长.
3. (有可能)取任何中心与任何距离描出一圈.
4. 所有直角彼此相等.
5. 如果落在两条直线上的一条直线使同一侧的内角(之和)小于二直角,这两条直线经无限延长后相交于该侧(的一点).

欧几里得的公理分成两种:“共同的见解”和“公设”.经鉴定出自苏格兰物理学家兼数学家约翰·普莱费尔的一条公理说:对不在给定线 m 上的给定点 A,有一条不与 m 相交的线通过 A.可以表明它与欧几里得的公设 5 等价.把“有一条”换成“没有一条”或“不止有一条”,便得到某种非欧几何.应当说,按现代标准,欧几里得的公理不清楚,也不完备.

集论中类似的一步是否认选择公理或连续统假设.当然,我们的意思是说,这一步要证明否定它们是与狭义集论一致的,正如哥德尔证明肯定它们是与狭义集论一致的.该证明业已在前些年完成,数理逻辑领域中因而掀起一个活动高潮,其最终结果无法预卜.

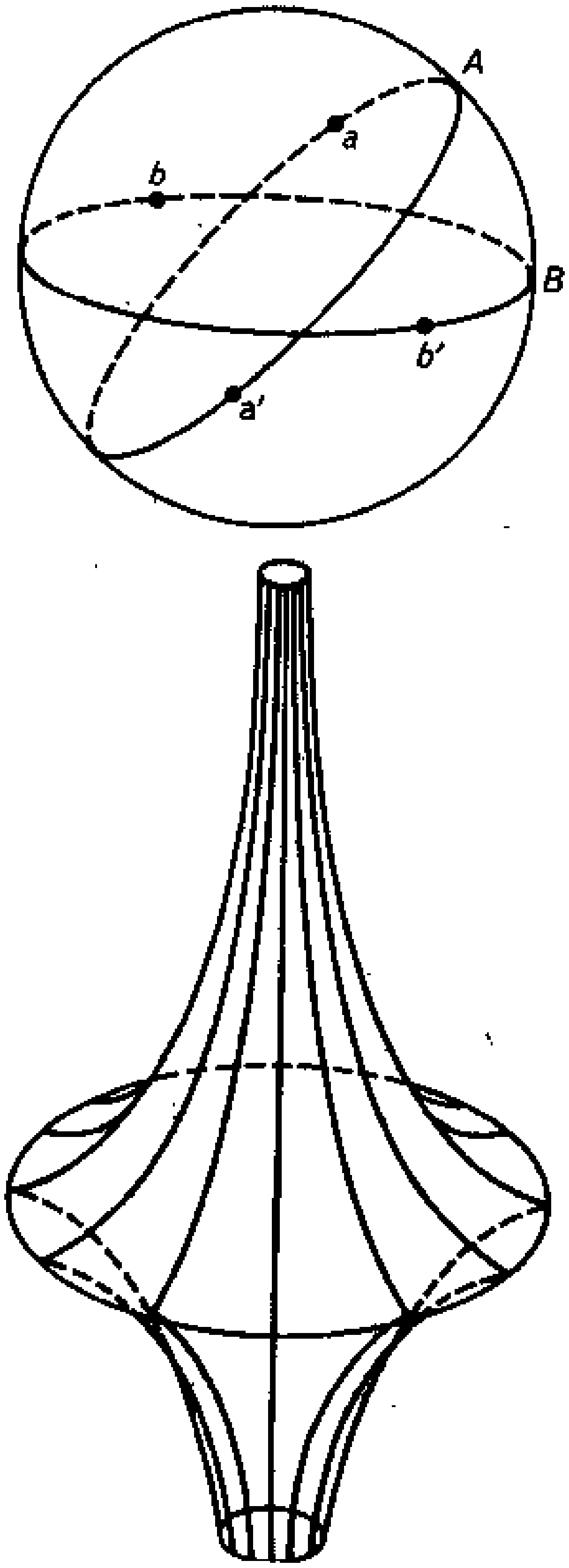
既然这是个求证公理系统相对一致性的问题,自然要想到造模型.我们已经见到了,表明欧氏三维空间中的几种曲面是非欧二维几何的模型也就建立了非欧几何的相对一致性.与此雷同,为了证明选择公理或连续统假设为假的非康托集论的合法性,我们必须使用狭义集论的公理去造一个模型,在其中可以证明选择公理的否定或连续统假设的否定是定理.

不得不承认,造这种模型是一种复杂的棘手的事.这或许原就在意料之中.哥德尔的康托集论模型由可构造集组成,就他的模型来说,任务在于创造本质上与直观集合概念相同但更易处理的某种东西.就我们眼前的任务来说,却必须用狭义集论的常见建筑石料去创造奇异的不合直觉的某种东西,由它们来构成模型.

我们不想认输,不想说声在非技术性文章里不可能描绘这种模型就拉倒.我们想试试,至少

要给它所涉及的一两个主要想法作个描述性说明. 我们的出发点是不含选择公理的普通集论. 我们只希望证明非康托集论在相对意义上的一致性. 前面说过，如果欧氏几何一致，非欧几何模型便证明非欧几何一致. 同样，我们要来证明，如果狭义集论一致，给它添上陈述“选择公理是假的”或“连续统假设是假的”，它仍然一致. 我们不妨假定手头有了一个狭义集论模型作出发点. 这个模型叫做 M，可以看成哥德尔的可构造集的类.

从哥德尔的工作，我们懂得，为了使选择公理或连续统假设失效，至少必须给 M 添上一个不可构造集. 怎么做呢？引进字母 a 代表添到 M 上的一个对象；a 应当是哪种东西仍然有待决定.



在球体表面上“直线”的意思解释成“大圆”（上图的 A 和 B）. 对任何一对对径点（aa' 和 bb'）都有许多大圆通过. 如果我们把“点”的意思解释成“点对”，那么欧几里得的第一公设是真的. 如果允许被延长的“直线”全长有限或者绕球而行时折回许多次，第二公设就是真的. 如果把距离理解为要沿着可折回多次的大圆来测度，第三公设也是真的. 第四公设同样是真的. 普莱费尔公设则是假的，因为任何两个大圆都相交. 足见球面是非欧几何的一个模型. 伪球面（底部）也是一模型，只要把直线解释成连接表面上任何两点的最短曲线. 在伪球体的表面上有许多“直线”通过给定点而不穿过给定直线.

一旦添上 a，也就必须添上用狭义集论所容许的运算——把两个或更多的集并成新集，形成幂集，诸如此类——从 a 能形成的每样东西．按这种方式从 $M+a$ 生成的集的新汇聚将要叫做 N． M 按假定是狭义集论模型，问题就在怎样去选择 a，使得(1) N 也是狭义集论模型，(2) a 在 N 中不是可构造集．只有能做到这两点，才谈得上有希望否认选择公理或连续统假设．

想对该怎么做有点含糊的感觉，不妨先问问 1850 年要去发现伪球面的几何学家可能会怎么做．很粗糙地说，看来他是从欧氏平面上的一条曲线 M 人手，想到不在该平面上的一点 a，然后把那一点 a 与 M 上所有的点相连．既然所选的 a 本不在 M 的平面上，他得到的曲面 N 一定与欧氏平面不是一回事．因此，有理由设想，只要有足够的智谋和熟练技巧，他就能表明 N 确实是某种非欧几何的模型了．

非康托集论中的做法与此类似，就是选一个新集 a 充当不可构造集，把狭义集论的运算应用到 a 和 M 中的集上，然后由这样得到的所有集组成新模型 N．只要能做到这一步，那就已经证明我们能放心否定可构造性公理了*．既然哥德尔表明了可构造性蕴涵选择公理和连续统假设，这就是否定这两个陈述中任何一个都必不可少的第一步．

为了实现这第一步，必须表明两件事：所选的 a 始终是不可构造的，不但在 M 中如此，在 N 中也如此；N 像 M 一样，也是狭义集论的模型．我们采取一种绕圈子的做法来规定 a．我们想像自己要去编一张表，其中列出谈到 N 中的集 a 的一切可能的陈述．如果我们给出一条能决定任何这样的陈述真不真的规则，a 就定下来了．

关键性计谋原来是要把 a 选成一个“通正”(generic)元素，就是说，要把 a 选成只有对 M 中几乎所有的集都成立的性质才对 a 成立．M 中的每个集既有能辨别它的不寻常的独特性质，又有它同 M 中几乎所有其他集共享的通常的典型性质．结果看出，还是有可能完全挑明独特性质与通正性质之间的这种区别，使它化为形式的区别．这样一来，当我们把 a 选成一个通正集(可以说是没有独特性质能把它跟 M 中的任何集区分开来的集)，就能推出 N 依然是狭义集论的模型．我们引进的新元素没有会败坏出发点 M 的令人讨厌的性质．同时，a 是不可构造集．任何可构造集总有某种独特性——能用来构造它的那些步骤——而我们的 a 恰好没有任何这样的个性．

要造连续统假设在其中为假的模型，我们必须给 M 添上不止一个新元素，而是大量新元素．事实上，我们必须添上无穷多个才行．我们的实际做法还能做到，从模型 M 的观点来看，所添的

* 译注：可构造性公理就是“只存在可构造集”．

诸元素具有基数

$$\aleph_2 = 2^{(2^{\aleph})}.$$

粗糙的几何类比也许又会有点帮助：对嵌入非欧曲面中的一个二维生物来说，想认识到他的世界是三维欧氏空间的一部分是不可能的. 在眼前这个场合，站在 M 外面，我们会以为自己只插入了可数无穷多个新元素. 然而，它们却是用 M 中可到手的任何手段都不能"数"的. 因此，我们得到一个连续统假设在其中为假的新模型 N'. 在 N' 中起实数(也就是线段上的点)作用的诸新元素具有大于 $2^{\aleph}$ 的基数，足见现在有了一个无穷基数——即 $2^{\aleph_1}$——大于 $\aleph_0$ 而小于 $\mathfrak{c}$，因为在我们的模型 N' 中，$\mathfrak{c}$ 等于

$$2^{(2^{\aleph})}.$$

既然我们能造一个连续统假设在其中为假的集论模型，我们就能给普通狭义集论添上连续统假设为假的假定；能产生的矛盾无一不是已有的. 依照相同的精神，我们也能造选择公理在其中失效的集论模型. 我们甚至能十分确切地说出哪些无穷集有可能"从中选出"，哪些"太大，不能从中选出".

哥德尔只用一个模型(可构造集的类)产生他的结果，在非康托集论中我们却不是有一个面是有许多模型，每个都是怀着特殊目的造的. 比任何模型更为重要或许是让人能造这一切模型的技术："通正"概念与相关的"力迫"(forcing)概念. 很粗糙地说，通正集只有它们在要像集合的压力下"被迫"才有的那些性质. 为了判别 a 是不是"被迫"才有某种性质，我们必须瞧 N 的全体. 可是，在我们定下 a 以前，N 还没有真定！懂得怎样使这个貌似循环的论证不循环，这是新理论中另一个关键成分.

几何史对集论的未来有何启示呢？非欧几何最引人注目之处是最终成了爱因斯坦广义相对论的重要的先决条件. 黎曼创造黎曼几何原是出于纯抽象目的：统一、澄清和深化罗巴切夫斯基、鲍耶依和高斯的非欧几何. 结果，黎曼几何成了爱因斯基给引力重作革命性解释所不可少的工具.

这个例子就证明了应该期望非康托集论总有一天要在"现实"(也就是非数学)世界找到当前不可预见的应用吗？今天没人会冒险作答. 我们确实看得出来(凭事后聪明)，几何一直提供物理事件发生的重要背景. 在那种意义上，恐怕应当料到几何中的根本进展会找到物理应用. 集论似乎至今与物理毫无这类有机联系. 无论如何，有一些数学家(例如斯坦尼斯拉夫·乌拉姆)主张抽象集论可能会替理论物理提供有用的模型. 在现阶段，最安全的做法是拒不对未来作任何预测——除了它不可预测.

几何	发展阶段	集论
泰利斯，毕达哥拉斯	首批定理的直觉基础	康托
芝诺	揭示悖论	罗素
欧多克索斯，欧几里得	标准理论的公理化基础	策梅洛，弗兰克等
笛卡儿，希尔伯特	表明标准理论(相对)一致	哥德尔
高斯，黎曼	发现几种非标准理论	近期的工作
闵可夫斯基，爱因斯坦	应用非标准理论	??

按历史阶段类比几何(左)与集论(右)的发展. 非标准(非欧)几何在爱因斯坦相对论之类的理论中找到了应用. 非标准集论尚待应用于物理.

30.

哥德尔证明

欧内斯特·内格尔(Ernest Nagel),
詹姆士·R·纽曼(James R. Newman)*,
1956年6月号

1931年,一位名叫库尔特·哥德尔的25岁的年轻数学家在一家德文科学期刊上发表一篇文章,读者只有几个数学家.它的标题让人望而生畏:"论《数学原理》及有关系统的形式不可判定命题".它的主题充其量吸引一小群研究者.它的推理又是那么新奇,那么复杂,连数学家也大多觉得没法理解.但是,哥德尔的文章如今变成20世纪科学的丰碑,人称"哥德尔证明";它的总结论,许多科学家知道,而且体会到确有革命意义了.哥德尔屡获殊荣说明他的成就已经获得承认.文章问世不久,这个年轻人便应邀由维也纳赴美加人普林斯顿高等研究院,自1938年起成为该院的终身成员**.1952年哈佛大学授予他荣誉学位,赞辞说他的证明是现代逻辑中最重要的进展之一.

哥德尔当年攻的是数学基础的一个中心问题.希腊人发明的公理方法,向来被人奉为使数学思维形成系统的威力无比的基础.每个逻辑学者都知道,这种方法就是假定某些命题,叫公理(例如等量加等量其和相等),从公理推出其他命题,叫定理.近代以前,按多数学者的看法,稳稳

---

* 译注:这两位作者1958年写了一本书《哥德尔证明》(*Gödel's Proof*).最近的新版于2002出版:New York University Press,2002.

** 译注:不准确.哥德尔从1938年起接受该院分年任命,于1946年就任终身成员.

库尔特·哥德尔在高等研究院他的办公室内,由阿诺德·纽曼拍摄.哥德尔 1906 年生于捷克斯洛伐克.他 1930 年获得维也纳大学博士学位,赴美前在该校任教.

立足于完好的公理系统的数学分支只有几何. 然而，过去两百年间，包括常见的整数算术在内的另一些数学分支也制订了强有力的严格的公理系统. 数学家于是希望借助于公理方法将全部数学推理编排得井然有序了，而且相信做得到了.

哥德尔的文章毁掉了这个希望. 他让数学家正视他证明的事实：公理方法必有某些内在的局限性，哪怕普通整数算术也决不能靠这种方法全部系统化. 更有甚者，他的证明还揭示一个令人震惊又令人无奈的隐情：不可能建立任何复杂演绎系统的逻辑一致性，除非先假定一些立论原则，其内部一致性与该系统本身的一致性同样成问题.

尽管如此，哥德尔的文章不尽是否定的. 他把一套新的分析技术引进了数学基础，就多产性说可以与笛卡儿把代数方法引进几何的历史性创举相媲美. 哥德尔的工作在数理逻辑中开创了一些全新的研究分支. 它也激发大家重新估价各派数学哲学，乃至一般知识哲学.

哥德尔划时代的文章依然不广为人知. 其中的证明细节过分复杂，非数学家无法逐一领会，但他的结论和论证梗概是能够弄懂的. 这篇文章要讲一讲问题的背景与哥德尔发现的要点.

新数学

19 世纪数学探索呈现出激流猛进的磅礴气势. 解决了许多久悬无解的根本问题；创造了一些新的数学研究领域；始建或改建了形形色色数学分支的基础. 靠更换欧氏几何的某一公理来构造各种新几何则是最具革命性的新事态. 改变欧氏平行公理尤为突出，导致了极富成效的结果(见克莱因："直线"，《科学美国人》1956 年 3 月). 正是这场成功的反叛激励人们去给多少凭直觉培植的其他数学分支制订公理基础.

数学基础的批判性审查产生一个重要结论：把数学看成"量的科学"的传统数学观是不恰当的和引起误解的. 要知道，数学本质上只关心从一组给定公理(也叫公设)引出必然结论，这已经很明显了. 既然如此，只得承认数学远比按传统设想的更"抽象"和更"形式"：更"抽象"，因为可以把数学陈述看作谈随便什么东西的，不仅仅是谈天然划定的某一对象集合或某些对象特征的；更"形式"，因为数学证明的有效性植根于陈述的结构，而不是植根于特定题材的性质. 数学离不开证明. 任何数学分支的公设都不是天然谈空间，谈量，谈苹果，谈角，或者谈预算表. 任何可与公设中的描述性术语相联的特殊意义，在定理推导过程中都不起本质的作用. 纯数学家跟用数学去研究特殊题材的科学家不同，他面对的问题不是他所取的公设真不真、他从公设演绎出来的结论真不真，而仅仅是他心目中的结论事实上是不是初始假定的必然逻辑后果. 这种新的见地使人想起罗素著名的警语：纯数学就是不知在谈什么又不知所云真不真的那门学问.

严格抽象的领地，一个熟识的路标都没有，想闯进去游历一番确实不易.好在得失相抵，它也为迁居新地、瞻望新景提供了前所未有的自由.随着数学变得更抽象，人心从语言积久成习的涵义中解放出来，可以构造新奇的公设系统了.形式化事实上导致一大批很有数学趣味和数学价值的系统.必须承认，有些系统并未获得显然合乎直觉("常识")的解释，像欧氏几何或算术那样的解释，但是不必为此惊慌.首先，直觉能力有伸缩性.我们泰然承认先辈眼里全然不合直觉的想法，我们的子孙也会毫无困难地接受相对性悖论，觉得按直觉是显然的.再者，人人知道，直觉不是可靠的向导，在科学探险中不能充当真理性或多产性的可靠判据.

然而，数学的抽象性剧增也引起一个相当严重的问题.假使认定一组公理在谈某个确定的熟知的对象域，通常总有可能弄明白它们对这些对象究竟真不真；如果都真，它们必定彼此一致.但抽象的非欧公理，当作空间描述来看，好像明明是假的，而且未必能对什么东西真.因此，建立非欧系统的内部一致性是个很不好办的问题.例如，在黎曼几何里，著名的欧氏平行公设换成了这样的假定：过直线外一点不能在同一平面上作任何直线与给定直线平行.试问：黎曼公设集一致吗？对普通的经验空间，它们明明不真.那又怎么检验它们的一致性呢？怎么才能证明它们不会导致相互矛盾的定理呢？

前人提出一种解决这个问题的一般方法.基本的想法是替公设找个"模型"，使每个公设都转变成谈到该模型的真陈述.做法与下面的例子相仿.让我们用"类"字指一可区分元素或"成员"的总体.(例如，小于10的素数的类是由成员2,3,5,7组成的总体.)现在设想我们在考虑两个抽象类 K 和 L，关于它们给出了这么一些公设：

1. K 的任何两个成员正好包含在 L 的一个成员中.
2. K 的每个成员至多包含在 L 的两个成员中.
3. K 的成员不是全都包含在 L 的单个成员中.
4. L 的任何两个成员正好包含 K 的一个成员.
5. L 的每个成员至多包含 K 的两个成员.

从这小小公设集出发，我们能用司空见惯的推论规则推出某些定理.例如，可以表明 K 正好包含三个元素.但是，这公设集果真一致，从中决不会推出彼此矛盾的定理么？正是在这里我们求模型帮忙.令 K 是某三角形的顶点，L 是它的边.于是五个抽象公设都转变成了真陈述：例如，头一个公设断定任何两个顶点正好包含在一条边上.这样一来就证明公设集是一致的.

乍一想，这样的做法仿佛足以建立黎曼平面几何之类的抽象系统的一致性.我们可以采用一个模型来具体解释黎曼公设，在其中"平面"一词指某欧氏球体的表面，"点"指这球面上的点，"直线"指这球面上的大圆弧，如此等等.于是每个黎曼公设都能转变成欧氏几何的一个定理.例

如，根据这种解释，黎曼平行公设是说：过球面上的一点不能作任何大圆弧与给定大圆弧平行.

很遗憾，这种方法难于抵挡严厉指责，说它解决一个领域的问题的办法只是向别的领域一推了事. 换句话说，这等于求欧几里得先去证明一个使他威风扫地的系统的一致性. 只有欧氏几何一致了，黎曼几何一致才得证*. 那么，请问：欧氏几何一致吗？假使又求另一个模型来回答这个问题，我们与原定目标还是没有缩短距离. 总之，凡是用这种方法得到的证明只会是"相对的"一致性证明，不是绝对的.

只要系统能用一个只含有穷多个元素的模型来解释，证明它的公设一致就没有大困难. 例如，我们用来检验 K 和 L 的"类公设"的"三角形模型"都是有穷模型，靠实际清点来决定那些公设是否"真"，因而是否一致，也就比较简单. 可惜，为重要的数学分支奠基的公设系统大多不能反映在有穷模型中，只能被非有穷模型所满足. 在众所周知的初等算术公理集中，有一条公理断定整数序列中每个整数都有一异于任何居前整数的直接后继. 显而易见，凡是用来检验该公设集的模型都必须反映出这条公理所设元素为数无穷. 足见靠清点和枚举无法建立该公设集的真理性和一致性. 我们分明走进了死胡同.

所有绅士是有礼貌的.
没有银行家是有礼貌的.
没有绅士是银行家.

$$g \subset p$$
$$b \subset \bar{p}$$
$$\therefore \quad g \subset \bar{b}$$

$$g\bar{p} = 0$$
$$bp = 0$$
$$gb = 0$$

符号逻辑是 19 世纪中叶由英国数学家乔治·布尔发明的. 这里按两种不同方式把一个三段论译成他的记法. 在上方那组公式中，符号 $\subset$ 的意思是"包含在__中". 因此 $g \subset p$ 是说绅士类包括在有礼貌者的类中. 在下方的等式中，两个字母并置是指兼有两种特征的东西的类. 例如，bp 是指既为银行家又有礼貌的人的类. 下方第二等式说这个类无成员. 字母上的线的意思是"非". (例如，非 p 的意思是没有礼貌.)

罗素悖论

讲到这里，也许有人不禁要说，倘若基本概念一望而知是"清楚的"和"确凿的"，我们便可以确信公设集一致，没有矛盾. 可是，思想史对隐藏在这种主张里的直觉知识说并不留情. 在数学研究的某些领域，尽管初始假定中的概念都是"直觉上"清晰的，理智所实施的构造似乎也是一致的，还是找到了根本的矛盾. 例如，19 世纪康托制订的无穷数理论里就出现了这类矛盾(学名"二律背反"). 他的理论立足于貌似"清楚的"初等的类概念. 既然其他数学分支(特别是初等算

* 译注：正确的说法是：只要欧氏几何一致了，黎曼几何一致便得证. 作者行文稍有马虎之嫌.

术)中的现代系统都基于类理论,就有必要问问它们是否也会受矛盾感染.

事实上,罗素在初等逻辑本身的框架内造了一个矛盾,与康托无穷类理论最初染上的那个矛盾如出一辙.不妨像下面这样来讲罗素二律背反.类显然可以分成两种,一种不含自身为成员,一种含.前者的例子是数学家的类,因为这个类本身明明不是数学家,足见不是自身的成员.后者的例子是所有可思概念的类,因为所有可思概念的类是一可思概念,足见是自身的成员.我们要把前一型号的类叫做"正常"类,把后一型号的类叫做"不正常"类.现在令 N 代表所有正常类的类,问 N 自身是不是正常类.如果是的,它是自身的成员.但在那种情况下 N 就不正常,因为按照定义一个包含自身的类是不正常的.可是,如果 N 不正常,因而是自身的成员,N 又必须正常,因为按照定义 N 的一切成员都是正常的.总之,N 正常当且仅当 N 不正常.这个致命的矛盾是无批判运用表面上清澈的类概念的结果.

稍后又发现了别的悖论,也都是按常见的貌似有说服力的立论方式造出来的.就其本性而言,非有穷模型总得用可能不一致的公设集.由此可见,为建立公理的一致性而设计的模型方法,虽然是一种极其可贵的数学工具,对于本该由它解决的问题却拿不出最后的答案.

希尔伯特的元数学

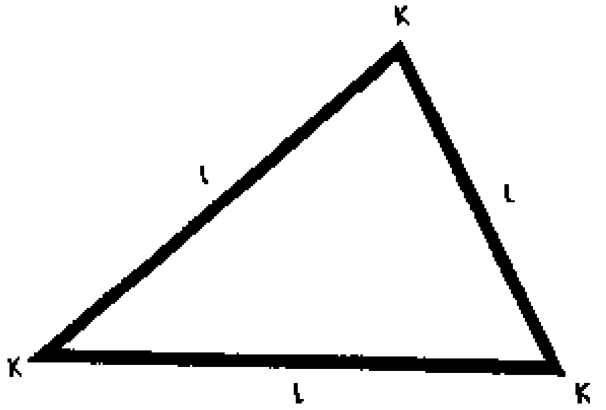
德国著名数学家希尔伯特于是就采取相反的方案,避开模型,索性把数学的意义统统抽掉.像希尔伯特那样全盘形式化之后,数学词语只当作空洞的记号看待.记号系统叫演算,其中的公设和定理只是无意义记号序列,或者叫"串",一板一眼照着交代明白的规则拼成的.从公设推导定理可以只看作按照准确的操作规则把一些这样的"串"变换成另一些"串".希尔伯特指望靠这种办法消除偷用任何未经公布的立论原则的危险.

形式化是难做的细腻活,但好处很大.它无遮盖地把逻辑关系亮了出来,犹如一台机器的剖面工作模型,让人能看清各记号"串"的结构模式:怎样拼接,怎样组合,怎样一个嵌进另一个,等等.形式化数学本无所云,写满它的无意义记号的一张纸什么也没有断定,只不过是一幅具备一定结构的抽象图案或"马赛克".但是,这类系统的构形是能够描摹的,构形的各种相互关系是能够陈述的.你可以说某"串"好看,这"串"像那"串",一"串"仿佛是由另三"串"做成的,等等.这样的陈述显然是有意义的.

不言而喻,凡谈到一无意义系统的有意义陈述都不属于该系统.希尔伯特将它们归入另设的一个部门,叫"元数学".元数学陈述谈到某形式化数学系统的记号和式子,比方说,谈到记号的种类和排列什么时候配得出名为"公式"的一长串记号,谈到公式之间的关系怎么样才算是与

预定的操作规则相符的后承关系.

举几个例来解释一下希尔伯特如何区分数学(无意义式子的系统)与元数学(谈到数学的陈述). 考虑算术式 2+3=5. 这个式子属于数学,它完全是由初等算术记号造出来的. 现在我们可以作一个谈到它的陈述,即"'2+3=5'是算术公式". 这个陈述不表达算术事实;它属于元数学,因为它在叙述一个算术记号串的特征. 与此相仿,式子 $x=x$ 属于数学,"'x'是变号(*variable*)"这一陈述属于元数学. 我们也可以作如下元数学陈述:"用数字'0'代入变号'x',从公式'$x=x$'可推导公式'0=0'". 这个陈述规定用什么办法从一个算术公式能得到另一个公式,因而描述了这两个公式怎样相关. 再者,我们可以作元数学陈述:"'0≠0'不是定理". 它说公式 0≠0 不能从算术公理推出,换言之某种关系在算术系统的指定公式之间不成立. 最后,下列陈述也属于元数学:"算术是一致的",也就是说,从算术公理不可能既推出公式 0=0 又推出公式 0≠0. *



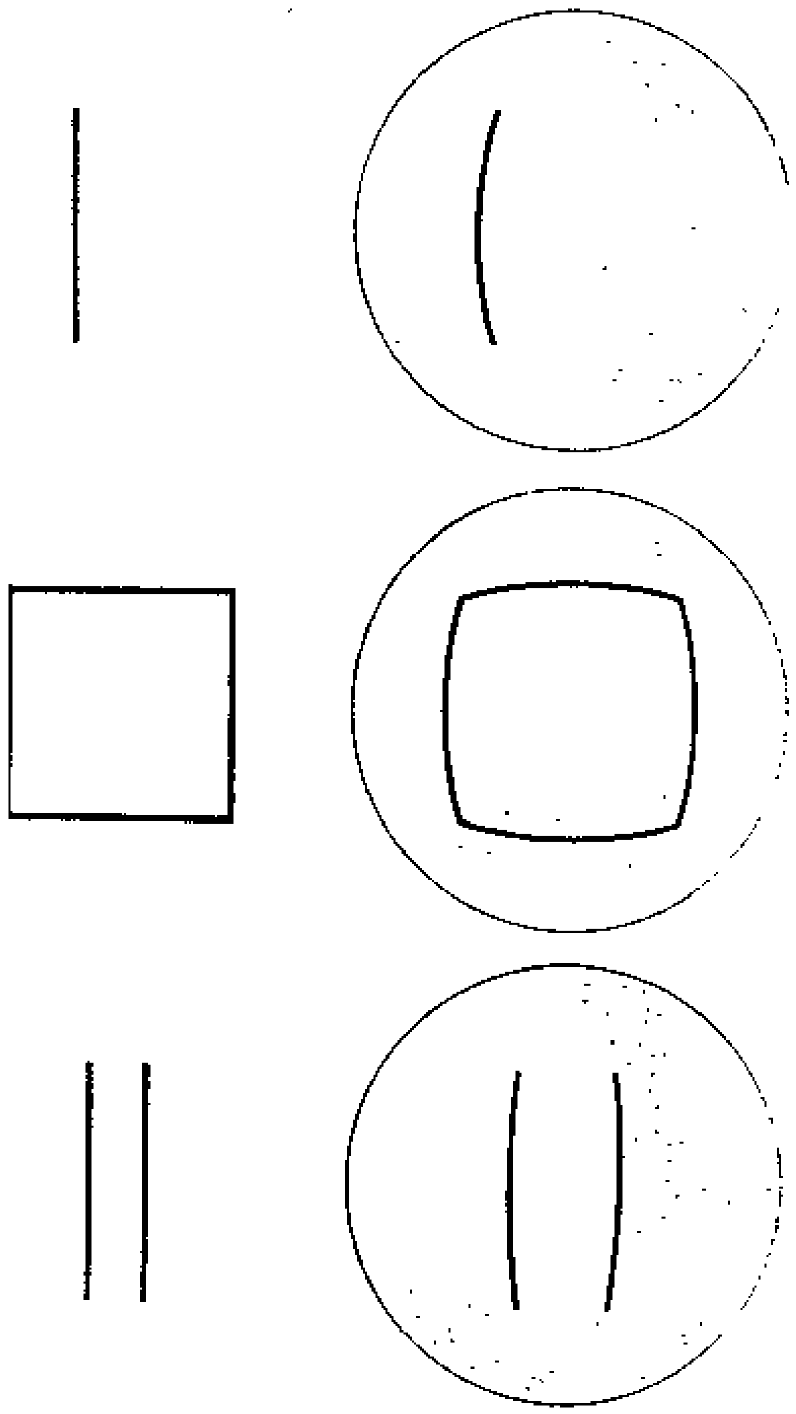
谈到两类 K 和 L 的一组公设的模型是一个三角形,其顶点是 K 的成员,其边是 L 的成员. 这个几何模型表明那组公设是一致的.

在把元数学描述与数学自身分隔开来的基础上,希尔伯特企图建立一种"绝对"证明数学系统内部一致性的方法. 具体地说,他想发展一种证明论,靠分析全盘形式化的(或"未解释的")演算中式子的纯结构特点来得出一致性证明. 这样的分析只注意公式中记号的种类和排列,只判别给定记号串能不能按交代明白的操作规则从别的串得到. 算术的绝对一致性证明,如果造得出来的话,不外是以"有穷主义的"(非无穷的)元数学手段去表明:用正确推论规则从公理或初始公式不能同时推出两个"矛盾"公式,如像 0=0 与它的否定.

为了易于明了,把作为证明论的元数学与象棋论相比也许有点帮助. **我们在一个分成 64 个方格的方棋盘上用 32 个定好名称的棋子下象棋,棋子可按固定规则移动. 棋子、方格、棋子在棋盘上的位置在游戏之外全无所指. 在这种意义上,棋子及其在棋盘上的布局都是"无意义"的. 因此,象棋游戏类似形式化数学演算. 棋子与棋盘上的方格相当于演算的基本记号;棋子最初的位置相当于演算的公理或初始公式;棋子后来的位置相当于从公理推出的公式(即定理);游戏

* 译注:在这整段话里,除去"算术事实"这一处,名词或形容词"算术"都只涉及一形式系统,按预定解释它会成为算术,但我们并未附加这种解释或其他解释. 又,variable 时常有人想译作"变量",这是不对的,因为这里例如 x 不是量,而只是一个"无意义"的符号,所以本文译为"变号"而非"变量".

** 译注:这里"象棋"指国际象棋.



黎曼的非欧几何可用一欧氏模型来表示.平面成了某欧氏球面,平面上的点成了这球面上的点,直线成了大圆.因此,平面上由直线段围成的部分要画成球面上由大圆截段围成的部分(中图).两条平行线段是大圆的两段(下图);如果延长,这两段的确相交,因此与平行公设矛盾.

规则相当于演算的推论规则.虽然棋子在棋盘上的布局是"无意义"的,谈到这些布局的陈述却跟谈到数学公式的元数学陈述一样有意义."元象棋"陈述可以断定白方有20种可能的开局步法,或者断定弈出某种棋局后若白方投子则黑方在三步内必被将死.不仅如此,人们只根据可允许的有穷多种棋局就能够证明全称的"元象棋"定理.例如,可以建立关于白方可能的开局步法数目的元象棋定理,也可以建立如下的元象棋定理:只有两马的白方不可能将死黑方.换言之,凡此种种"元象棋"定理都能以有穷主义推理方法来证,不外乎逐一审查在所说条件下可能出现的有穷多种棋局.希尔伯特证明论的目的,同样是以这类有穷主义方法去证明在某演算中不可能推出矛盾公式.

《原理》

正是希尔伯特的方案,与逻辑本身在怀德海、罗素的名著《数学原理》(*Principia Mathematica*,以下简称《原理》)中的形式化联姻,导致了一场危机,而由哥德尔最终了结.

《原理》发表于1910年.它的大目标本来是要证明数学只是逻辑的一章.但它作出过两个贡献,是我们眼下特别感兴趣的.首先,它继续19世纪先驱者布尔的事业,提供了一套能按标准样式编纂纯数学全部陈述的符号系统.其次,它明确陈述了数学证明中用到的大多数形式逻辑规则.这样一来,《原理》就把整个算术改编成一个能按明确陈述的规则去操作的"无意义"记号系统,为调查这样的算术系统配备了必不可少的工具.

我们现在转向《原理》一小部分的形式化，它叫做初等命题逻辑. 任务在于把这个片断变成未解释记号的"无意义"演算，演示一种证明该演算无矛盾的方法.

建立演算包括四步. 第一，必须规定演算中要用的记号的完备"词汇表". 第二，陈述"形成规则"或"文法"规则，指出哪些记号串可以算公式或"句子". 第三，规定"变形规则"，告诉人们怎么从公式推公式. 最后，选出某些公式作公理，充当整个系统的出发点. 系统的"定理"是应用变形规则能从公理推出来的所有公式，公理也算在内. "证明"是合法公式的有穷序列，其中每一个公式要么是公理要么就是能按变形规则从序列中的居前公式推出来的.

初等命题逻辑经常也称作"句子演算"，它的词汇表极其简单. 有"句子"变号，是一些字母 p，q，r 等等. 然后有若干联结词：～，代表"非"；∨，代表"或者"；⊃，代表"如果__那么"；·，代表"并且". 还有括号，用作标点符号.

1	$(p \vee p) \supset p$ 如果 p 或者 p，那么 p	如果亨利八世是粗人或者亨利八世是粗人，那么亨利八世是粗人.
2	$p \supset (p \vee q)$ 如果 p，那么 p 或者 q	如果精神分析有效，那么精神分析有效或者头痛粉更好.
3	$(p \vee q) \supset (q \vee p)$ 如果 p 或者 q，那么 q 或者 p	如果康德守时或者好莱坞有罪，那么好莱坞有罪或者康德守时.
4	$(p \supset q) \supset [(r \vee p) \supset (r \vee q)]$ 如果 p 蕴涵 q，那么(r 或者 p)蕴涵(r 或者 q)	如果鸭子蹒跚行走蕴涵 $\sqrt{2}$ 是数，那么(丘吉尔饮白兰地或者鸭子蹒跚行走)蕴涵(丘吉尔饮白兰地或者 $\sqrt{2}$ 是数).

句子演算或初等命题逻辑基于四条公理. 无聊的例句说明符号的"意义"何等一般.

每个句子变号都算是一个公式. 若干记号又可以按形成规则组合成别的公式，例如 $p \supset q$. 如果记号串 S 是公式，它的否定 $\sim S$ 也是公式. 如果两个记号串 S_1 和 S_2 是公式，记号串 $(S_1) \vee (S_2)$ 也是公式. 类似约定也适用于其他联结词.

变形规则只有两条. 一是代入规则，它说：如果已经证明 * 一含句子变号的公式，可以把任何

* 译注：原文的用语不是"证明"，而分别是"假定"和"接受"，难免使人误认为对假设的公式也可以作代入. 实际上，代入规则只能应用于已证公式或定理. 其实类似的困难甚至在中学教学中也有. 我们不能说"假定 0 可以作分母"，因为如果"假定"了它，就会得到 1=2. 我们应该只说"如果已经证明"了什么，然后如何如何，就不会出现类似的混乱. 所以，作为一种"习惯"，我们不要轻易地就"假定"什么，"接受"什么，而应考虑是否"已经证明了"什么. 这一段议论当然完全不属于本文讲的形式化的数学.

公式处处代入这些变号，把新句子算成原句子的逻辑后承.例如，一旦证明*了 $p\supset p$，总可以把 q 代入 p，得到定理 $q\supset q$；也可以把 $(p\vee q)$ 代入 p，得到 $(p\vee q)\supset(p\vee q)$.另一条规则是分离规则，说的也挺简单：如果公式 S_1 和 $S_1\supset S_2$ 已经证明，我们可以接受公式 S_2，认为它也已经证明*.

句子演算有四条公理，大体与《原理》相同，已列入上页的表，附有无聊的中文句以示其与“意义”无涉.译文的臃肿(尤其第四条)或许有助于读者懂得专用符号的好处.

搜求一个证明

每条公理看上去都是显而易见、不足道哉的.但借助于两条变形规则，偏偏就能从中推出无穷无尽的一大批定理，远非显而易见又远非不足道哉.然而，此刻使我们感兴趣的不是从公理推定理，而是表明这组公理不矛盾.我们希望证明，运用变形规则，想把任何公式 S 连同它的否定 $\sim S$ 一起从公理推出是不可能的.

为着手证明，让我们先假定公式 S 与它的矛盾式 $\sim S$ 都能从公理演绎出来.现在注意，$p\supset(\sim p\supset q)$ 是句子演算的定理，读作：如果 p 那么(如果 $\sim p$ 那么 q).检查一下凭这个定理能推出什么.按代入规则允许的做法，在这个定理中将 S 代入 p，首先得到 $S\supset(\sim S\supset q)$.由它出发，鉴于假定了 S 可证，我们能用分离规则接着得到 $\sim S\supset q$。最后，鉴于假定了 $\sim S$ 也可证，再用分离规则就会得出 q.既然无论任何公式都能代入 q，这意味着无论任何公式都该是从公理可演绎的.由此可见，如果从公理可演绎出 S 与它的矛盾式 $\sim S$，则任何公式均可演绎出来.于是抵达结论：如果句子演算不一致，从它的公理能推出任何定理.因此，我们证明该演算一致的任务精简成为找出不能从公理推出的公式，至少找一个.

要做到这一点总少不了动用元数学推理来琢磨我们面前的这个系统.实际做法很简洁，无非是找出公式的一种特征，它同时满足下面三项条件.(1)它是所有那四条公理的共同点；(2)它是“遗传的”，就是说，凡是从公理推出的公式(凡是定理)必定也有那种性质；(3)至少有一个公式没有那种特征，所以不是定理.这是一项三重任务.它一旦完成，我们便有了句子演算公理的绝对一致性证明.

让我们选择“重言性”出任方才所要求的那种特征.公式具备重言性当且仅当它是重言式.重言式又称“同语反复”，在日常口头语里照例指废话，如像“约翰是查理之父而查理是约翰之

* 译注：原文中说的不是“已经证明”，而是“逻辑上真”.这是一语义术语，不得进入纯语法的变形规则.诚然，按我们的初衷，逻辑演算中可证的应当是逻辑真理.

联结词及其他基本记号

记号	哥德尔数	意义
~	1	非
∨	2	或者
⊃	3	如果__那么
∃	4	有一个__
=	5	等于
0	6	零
S	7	下一个数
(	8	标点符号
)	9	标点符号
,	10	标点符号

句子变号(各用一能被 3 整除的大于 10 的数命名)

变号	哥德尔数	样本
p	12	亨利八世是粗人
q	15	头痛粉更好
r	18	鸭子蹒跚行走
等等		

个体变号(各用一被 3 除后余 1 的大于 10 的数命名)

变号	哥德尔数	意义
x	13	数值变号
y	16	数值变号
z	19	数值变号
等等		

命题变号(各用一被 3 除后余 2 的大于 10 的数命名)

变号	哥德尔数	样本
P	14	是粗人
Q	17	是头痛粉
R	20	是鸭子
等等		

基本哥德尔数按上表所示的有条不紊的办法配与他的符号逻辑系统中所用的每个符号.*

* 译注:这根本不是哥德尔本人所用的配数法.

子”.在逻辑里,重言式却要定义为一个顾及所有逻辑可能性的陈述,例如“或者在下雨或者不在下雨”.换一种提法,重言式“在所有可能世界中都真”.我们把这个定义应用到眼下考察的系统.一个公式叫重言式,如果不管它的基本构件(p,q,r 等)是真是假,它总规为真.现在注意,我们的四条公理分明都具备重言性.例如,不管假定 p 真还是假定 p 假,第一条公理($p \vee p$)$\supset p$ 必真.举个实例,那条公理说:“如果雷尼尔山高二万英尺或者雷尼尔山高二万英尺,那么雷尼尔山高二万英尺”*.雷尼尔山的实际高度是不是二万英尺都无所谓,这句话怎么都是真的.对其他公理也能作类似的证明.

接着可以证明重言性在变形规则下是遗传的,不过我们不想岔开去讲证明了.由此可见,每个真正从公理推出的公式(每个定理)必定是重言式.

前两步业已完成,我们就要去找一个不具备重言性的公式了.不必费多大力气,例如 $p \vee q$ 就符合要求.**很清楚,它可不是重言式;它等于说:“或者约翰是哲学家或者查理读《科学美国人》”.这句话明明不是逻辑真理,不是与基本构件的真假不相干的真话.足见 $p \vee q$ 不成大器,它是公式但不是定理.

我们的目的达到了.我们至少找到了一个并非定理的公式,所以公理必定一致.

哥德尔的答案

句子演算是完满实现了希尔伯特证明论种种目标的数学系统的一例.但是,这个演算只编纂了形式逻辑的一个片断.问题依然存在:在希尔伯特纲领的那种意义上,能证明囊括着全部算术的形式系统一致吗?

这就是哥德尔所回答的谜题.1931 年他的文章表明,休想这样证明算术无矛盾,那是注定要失败的.

他的主要结论有两个.首先,他表明了,只要系统广博到足以包括全部算术,就不可能建立元数学的一致性证明,除非这证明本身使用的推论规则比系统内部用来推导定理的变形规则强得多.总之,一龙被斩一龙又生.

哥德尔第二个主要结论还要惊人,还要有革命性,因为它挑明了公理方法本身的威力受到根本限制.哥德尔表明,包括《原理》在内,任何能容纳算术的系统本质上都不完全.换言之,给定

* 译注:雷尼尔山位于美国华盛顿州.

** 译注:我很奇怪作者为什么不选更简单的例子:p.

任何一致的算术公理集，总有从该公理集推不出的真算术陈述. 一再试证又一再受挫的数学“定理”的经典例证是哥德巴赫“定理”，说的是每个偶数均为两素数之和. 从来没找着不是两素数之和的偶数，却无人能找出哥氏规则无例外适用于一切偶数的证明. 为反驳哥德尔，有人也许要说，未必不能更改或扩充算术公理集，叫“推不出”的陈述推得出. 但哥德尔表明这也没希望根治不治之症. 就是说，即使添有穷多条别的公理，哪怕数目再多，也总有其他算术真理是用形式手段推不出的.

哥德尔怎样证明他的结论呢？他的文章难懂. 读者必须掌握 46 个预备性定义，加上若干重要的预备性定理，才会明白主要结果. 我们要大走捷径；尽管如此，仍盼望至少能勾画出原论证的概貌.

哥德尔数

哥德尔首先设计一种方法，给形式化系统中每个基本记号、每个公式、每个证明各配一数作代号. 对基本记号，他附上从 1 到 10 的整数充当“哥德尔数”；对变号，他按某些规则来配数(见 373 页的表). 为了看出怎么给公式指定一数，让我们举公式$(\exists x)(x=Sy)$为例，它按字面读成“存在一 x，x 是 y 的直接后继”，意思是说每个数 y 都有一直接后继. 与该公式中 10 个记号相联的数依次是 8，4，13，9，8，13，5，7，16，9(见表). 现在把这些数当作前 10 个素数(即 2，3，5 等等)的指数或乘方，将 10 个素数各自的乘方相乘，得出数 $2^8\times3^4\times5^{13}\times7^9\times11^8\times13^{13}\times17^5\times19^7\times23^{16}\times29^9$. 这个乘积就是公式$(\exists x)(x=Sy)$的哥德尔数. 每个公式都能套用同样办法表示成唯一的数.

A	100
B	4×25
C	$2^2\times5^2$
A	162
B	2×81
C	$2^1\times3^4$
D	1　4 ↓　↓ ~　∃
E	~∃

公式的哥德尔数的造法是取其中所含符号的哥德尔数依次充当各素数的乘方. 因此 100 不是一哥德尔数，因为它的因子跳过了素数 3. 另一方面，162 是“不存在”的哥德尔数.

在证明中是会出现公式序列的，我们也能按相仿的程式给它配数. 好比说我们有一序列含两个公式，从前者推出后者. 例如，前文给出公式$(\exists x)(x=Sy)$，在其中把 0 代入 y 推出$(\exists x)(x=S0)$，它说 0 有一直接后继. 我们把辨认前一公式与后一公式的哥德尔数分别叫 m 与 n. 为了确定这个双公式序列的代号，把 m 和 n 当作指数，将前两个素数(2 和 3)各自的乘方相乘就行了. 这就是

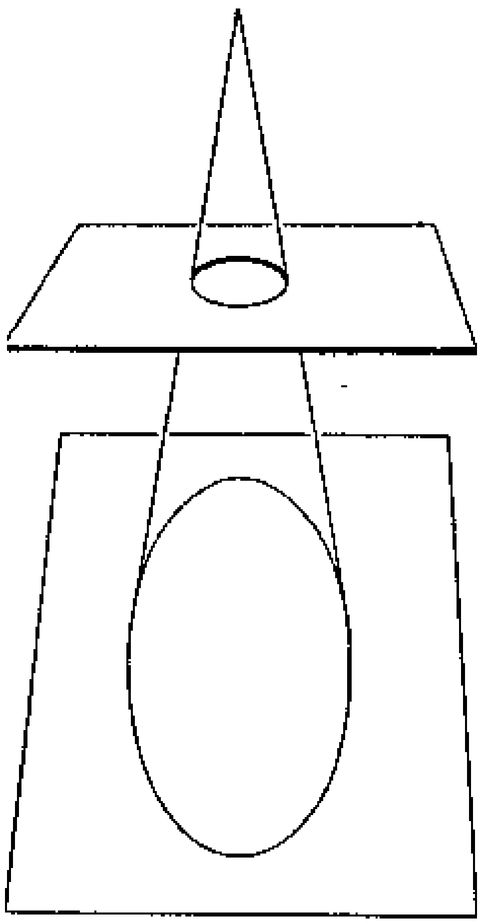
说，辨认该序列的哥德尔数是 $2^m \times 3^n$. 用相似的办法，可以给任何公式序列配数.

A	125 000 000
B	64 × 125 × 15 625
C	$2^6 \times 3^5 \times 5^6$
D	6　5　6 ↓　↓　↓ 0　=　0
E	0 = 0

算术公式"零等于零"的哥德尔数是 125 百万. 从 A 往下读到 E，示意图表明该数怎样译成它所表示的公式；往上读，则表明该公式的数怎样得出.

前面做的一切都是在建立形式系统全盘算术化的方法. 这种方法本质上是一组指令，要在特定的数与系统中各个要素或要素组合之间形成一一对应. 一旦给定式子，就能配上唯一的数. 但是不止于此，我们还能把任何哥德尔数重新译成它所代表的式子，靠的是将它分解成组成它的素数因子，从一条著名算术定理知道，分解法只有一种（见左图）. 换句话说，数仿佛一部机器，可以拆散，看看它是怎么造的，里头有什么东西. 这跟剖析一个式子或一个证明的道理是一样的.

这又引向下一步. 哥德尔想到，用类似制图的程式可以把元数学陈述翻译到算术里. 在地理中，地球上各点间的空间关系能够投影到平图上；在数学物理中，电流性质间的关系能够映射成流体的流动*；在数学自身中，几何关系能够译入代数. 哥德尔看出，谈到一系统的复杂的元数学陈述也能够翻译成或反映为系统自身内的算术陈述，而且从表达清晰、分析方便来看这会大有收获. 处理复杂逻辑关系的算术摹本分明比处理这些逻辑关系本身要容易**. 引用一个不足道的类比：如果超级市场让买东西的顾客领票排队，票上的号数定出这位顾客排在第几的次序的话，有些事就简单了，比方说，查看一下号数便知道多少人已经买



一种对象到另一种对象的映射图示如上. 上方水平面中的点可以唯一地映射到下方倾斜面之上，只要从一点画直线穿过上方面的各点，再加以延伸，直到与下方面相交. 这样一来，上方面中的圆便映射成下方面中的椭圆了. 哥德尔把谈到**算术**的陈述映射成了**算术**式子.

* 译注：见本书第 7 章麦克斯韦传.

** 译注：哥德尔从未"看出"作者幻想的这种收获. 算术化的元数学总是比元数学本身复杂得多.

过了、多少人正在等候、谁排在谁前头、他前头有多少顾客等等.

哥德尔追求的简直就是元数学的全盘算术化. 如果每个元数学陈述都能唯一表示成形式系统中的一个公式,而后者表达着数之间的关系,那么,探查元数学陈述之间的逻辑依赖关系就可以去审查整数之间相应的关系了. 哥德尔事实上极其成功地把算术的元数学映射到了算术自身之上. 我们只需要引一个事例来说明怎么能使元数学陈述对应于形式算术系统中的公式. 以公式 $(p \vee p) \supset p$ 为例,我们可以作元数学陈述说公式 $(p \vee p)$ 是这个公式的起始部分. 于是,我们能够把这个元数学陈述表示成一个算术公式,大意是说该起始部分的哥德尔数是整个公式的哥德尔数的一个因子. 这是显而易见的,因为 $(p \vee p)$ 的哥德尔数是 $2^8 \times 3^{12} \times 5^2 \times 7^{12} \times 11^9$,而 $(p \vee p) \supset p$ 的哥德尔数是 $2^8 \times 3^{12} \times 5^2 \times 7^{12} \times 11^9 \times 13^3 \times 17^{12}$.

不可判定命题

我们已经抵达哥德尔分析的中心点了. 他表明了怎样构造一个算术公式,设它的哥德尔数是 h,它便对应于元数学陈述"有哥德尔数 h 的公式不可证". 换言之,这个公式(称它为 G)其实是在断定它自身的不可证性,但它却是一属于算术形式系统的合法公式. 哥德尔进而审查 G 是不是算术的可证公式的问题. 他能够表明,G 可证当且仅当它的否定 $\sim G$ 也可证. 但是,如果从一个公理集推得出某公式又推得出它的否定,则此公理集显然不一致. 可见,如果算术一致,G 和 G 的否定都不可证*. 这就是说,G 是算术的不可判定公式.

接着哥德尔又由此证明了算术一致性命题不可证. 可以表明,元数学的算术一致性陈述对应于某算术公式 A,而且算术公式 $A \supset G$(如果 A 那么 G)是可证的. 因此,假使 A 竟然可证,G 也该可证. 但方才已经看见 G 不可证了. 由此可见,A 不可判定. 总之,算术一致性,用能在算术形式体系内部表示的任何元数学推理,都是不可判定的.

哥德尔的分析并没有排除算术一致性的元数学证明的可能性;实际上,有人已经建立了这样的证明,最突出的是格哈德·干岑,希尔伯特学派的一员. 不过,这些"证明"在某种意义上不得要领,因为都要用一些推论规则,其内部一致性跟算术自身的形式一致性同样可疑. 干岑的证明用了一条推论规则,大意是准许从无穷多个前提推出一个公式. 采用这种非有穷主义元数学见解再次引起希尔伯特原纲领想要解决的困难.

---

* 译注:作者的表述与历史不符. 哥德尔的 G 的不可判定性的证明需要比"一致性"更强的"ω-一致性"条件. 正是在强条件下才能建立"G 可证当 $\sim G$ 可证". ——译者

还有一件咄咄怪事. 虽然公式 G 不可判定，用元数学推理却能表明 G 毕竟是真的算术陈述，表达着整数的一种性质. 论证十分简单. 我们只需要回想，哥德尔把元数学陈述映射为算术公式的办法是让每个真的元数学陈述对应于一个真的算术公式. 而我们已经看到了，对应于 G 的那个元数学陈述（“有哥德尔数 h 的公式不可证”）是真的，除非算术不一致. 可见，G 本身必定是真的. 我们就这样用一个元数学论证建立了一个算术真理.

哥德尔惊人而深奥的智慧交响乐奏起了终曲. 算术是不完全的，理由非常明白：至少有一个算术真理，不能从算术公理推出，却能用系统外的元数学论证来建立. 而且，算术还是本质上不完全的，因为，即使把真公式 G 当作公理添入原公理集，增补而成的系统仍不足以形式地产生所有算术真理：我们仍可构造一真公式，它用该系统内的形式手段不可证. 无论把这种给初始集添公理的过程重复多少次，情况都不会改变.

这个引人注目的结论挑明了公理方法的内在局限性. 与以往的种种推测相反，从任何固定公理集都无法形式地推出所有真的算术陈述，想一劳永逸指定一公理集来把算术真理这片辽阔的“大陆”整理得有条不紊是不可能的.

人与计算机

哥德尔结论的深远意义尚未完全捉摸清楚. 它们表明，想找到任何表达着全部算术的演绎系统的绝对一致性证明都是无望的，如果这样的证明必须满足希尔伯特原纲领的有穷主义要求的话. 它们也表明，从任何一组指定公理按一组封闭的推论规则不能形式地推出的真算术陈述多得数不清. 由此可见，例如数论吧，它的公理化处理法是不会穷尽算术真理的. 是不是能为数学或逻辑真理设计一个包罗万有的一般定义，是不是像哥德尔本人仿佛相信的那样只有彻底柏拉图式的实在主义才能拿出这样的定义，则是依然在争论之中的问题.

哥德尔结论与能不能造一台数学推理能力等于人脑的计算机的问题有关. 如今的计算机都有一组固定指令存入其中，又都是一步接一步运算的. 鉴于哥德尔不完全性定理，不论这类机器的内部机制多么复杂，也不论其运算速度多么快，总有无穷无尽的初等数论问题是它们按本性便无力提供答案的. 诚然，人脑也可能有它自身的内部局限性，也可能有它无力求解的数学问题. 但是，即使如此，人脑好像还是体现一种运算规则结构，远远比当今设想的人造机器结构来得强大. 眼下看不出自动机有望代替人心*.

* 译注：作者的这些议论似乎默认了人心等于人脑的流行假说，哥德尔对这个假说是极为怀疑的.

不应当认为哥德尔证明是在鼓动绝望. 发现有形式不可证的算术真理并不意味着有永不可知的真理,也不意味着必须用神秘的直觉取代以理服人的证明. 它只是意味着人的智谋没有也不能全都形式化,永远有新的证明原则等待人去发明和发现. 我们已经看见了,不能靠着从给定公理集作形式演绎来建立的数学命题毕竟可以靠着"非形式的"元数学推理来建立.

不可能造一台等价于人脑的计算机也不一定意味着没希望用物理和化学术语来说明生命和人的理性. 哥德尔不完全性定理既没有排除又没有肯定这类说明的可能性. 它只是指出人心的结构和威力远远比迄今设想的任何死机器都要复杂和微妙. 哥德尔自己的工作就是这类复杂性和微妙性的一个突出例子. 它不是泄气的理由,倒是重新领悟创造理性的威力的一个机会.

V.

数学的意义

引言

第Ⅲ，Ⅳ两部分的主题时常被称为“纯粹数学”，而将在这一部分讲的材料将被标为“应用数学”. 然而这些名词本身常引起误会. 它们意味着有这样一个科目称为数学，他们本是数学家们为了与人类其他活动毫无关系的目的建立起来然后再用于实际问题. 可以合理地由此推断：数学之可以应用纯属偶然，是对于人类的一缕好运. 真实情况是，数学是科学之一. 几乎它的全部都是人类为了两个目的而进行的活动的主要部分之一：即了解自然并利用自然现象改进人的生活. 不仅是数学的目的，还有它的特定的问题、主题、甚至如何进行研究的许多启示，都来自对实际的，主要是对物理的探讨. “纯粹数学”这个词违反历史，而“应用数学”这个词其实多余.

一旦为了达到某个实在的目的而创造了一个数学主题，数学家就会去研究这个主题本身，这当然也是真的. 这种工作的合理性有两重的根据. 数学家知道了数学表示一个物理现象以后，就希望能从产生数学的源头得出更多的物理知识. 第二，数学的特征就在于，它的抽象性使它能表示很不相同的物理源头的问题. 水波，声波，无线电波都用同一个偏微分方程，即所谓波动方程. 所以对于本来用以探讨声波的方程作进一步的研究，所得的其他数学知识，可能对来自探讨无线电波而出现的问题有用.

一个数学主题就像是一块含石油的土地. 地面上有黑色油渍可能意味着这是一个可以找到油的地方，找到了油就证明了这块地的价值，就值得进一步钻井. 如果井址离原来的油渍不太远，就有希望可以找到更多的油. 当然也有人选一个很远的井址，只是因为钻起来容易而且仍然声称他在找油. 有些数学家就是以这种声明来为毫无价值的研究辩护.

当今，许多数学家走得更远，他们举一些例子说，一个本是随意选来的主题，后来证明正是科学家们需要的，以此来论证他们随便选什么主题都是值得研究的. 他们的论据换一句话说就是：数学家追随完全产生于自己头脑里的观念，也能以自己的智慧预见科学家的需要. 但是从来

没有过这样的事.

最常举的例子,一是圆锥截线引入数学大约 1800 年以后,开普勒用椭圆来描述行星的轨道. 二是爱因斯坦用黎曼几何和张量分析来建立相对论,可那时这些数学科目已创立了好几十年了. 我们来考查一下这两个例子.

开普勒确实用椭圆来代替圆的组合,这样简化了天文学. 但是椭圆恰好是他真正需要的吗? 答案是否定的. 开普勒用了多少年来找一个曲线使之拟合于火星轨道的天文数据,而且他确实想到了椭圆,因为数学中已经有了椭圆了. 当他发现椭圆路径确与观测数据符合得那么好,使他能把二者之差异归之为实验误差,他就断定椭圆是正确的. 但是行星绕太阳的路径并不是椭圆. 如果天上就只有一个太阳和一个行星,而且二者都可以看作完全的球体,那个行星的路径就真的是椭圆. 然而加于任一个行星的引力并不仅来自太阳,它还包含了许多别的行星和许多月亮的拉力. 因此路径并非椭圆.

爱因斯坦应用黎曼几何和张量分析又怎么说呢? 爱因斯坦一开始是打算用空间的构造来说明原来认为由引力引起的运动. 1911 年他公布了一个理论,说明一个很特殊的人为的例子,而且只用了很简单的数学. 他当然知道这个工作并不太好. 他与他的一位数学家同事皮克(George Pick)讨论了他的困难,皮克请他注意黎曼几何以及由里奇(Gregorio Ricci-Curbastro)和列维齐维塔(Tulio Levi-Civita)的张量分析,皮克认为这些可能有所助益. 爱因斯坦然后找到了在苏黎世的另一位同事和朋友格罗斯曼(Marcel Grossmann)并从他那里学到了这些数学. 几年以后,他就用这些数学来陈述他的广义相对论. 黎曼几何和张量分析用于相对论恰好是对的吗? 几乎可以肯定不是. 有充分理由相信,爱因斯坦只不过是把他能够得到的数学用得最好而已. 广义相对论尽管是精巧的,但也是人为的;它在解决天文学的问题中并不太有用,因为它太复杂;它的证据仅仅在于它在预测三个天文现象时有更高的精度. 如果科学的历史还对我们有教益,则其教益就在于它告诉我们这个理论迟早会被超过. *

这两个例子的历史的要点就在于:认为数学对于科学恰好就是对的,这个想法缺少根据. 科学家们和一个问题拼搏. 但是解答并非唯一的. 科学家在建立一个理论时,他见什么数学理论用得上就抓住不放. 凡用得着的工具他都用,正如一个人可以用短柄小斧代替斧头做许多事. 难道,小斧就是适合于这种事的吗?

---

* 译注:在 21 世纪开始的时候,20 世纪 60 年代本书编者对广义相对论的评价显然很难同意. 随着大爆炸、黑洞、宇宙的扩张等等宇宙尺度问题(宇宙学)的发展,可以毫不夸大地说,广义相对论已成了我们的世界观的最重要支柱之一.

似乎前面的论据也可以反过来说. 如果说科学家可以采用手头上的数学工具并且建立起有用的理论,尽管工具和理论都不是唯一的,那么数学家创造出尽可能多的工具,使科学家能得到更多的帮助,这不是很聪明吗? 换句话说,难道纯粹数学家不应该追随任何吸引他们的概念,这样来增多科学家用得上的数学工具吗? 对这个问题可以用另外一个问题来回答:"应该在什么地方钻油井?"答案是:"在含油的地方."

为什么圆锥截线、黎曼几何和张量分析毕竟是有用的,科学家不得不尽可能好地应用这些工具来建立自己的理论,这是由于这些数学首先是受到物理的启发的. 虽然我们并不知道圆锥截线早期的历史,最有根据的说法是研究圆锥截线是为了造日晷. 此外,可以用圆锥截线来聚焦光线早在阿波罗尼乌斯(Apollonius)写出圆锥截线的经典著作之前就已知道. 在任何情况下这些曲线都是欧氏几何这个物理上有意义的科目中的自然的论题. 既然圆锥截线在物理上可用,开普勒也会去应用它们就不奇怪了.

黎曼几何和张量分析一样,其历史是完全知道了的. 我们前面已经说过,数学家们努力使欧氏几何免于物理上是否站得住脚的问题,最后集中于创立了非欧几何,并且证明了它在表达物理空间的性质上证明与欧氏几何同样有用. 这个未曾料及的事提出了一个问题:"既然这些几何彼此不同,则关于物理空间有些什么我们可以确实断定为真?"黎曼的出发点就是这个问题. 为了回答这个问题,他创造了特殊的几何,这种几何现称为黎曼几何,由于这些几何的特殊性质,按照我们有限的物理知识看来,黎曼几何与欧氏几何同样,可以用来表示物理空间. 那么是不是可以怀疑是爱因斯坦才发现黎曼几何有用呢? 黎曼几何的物理意义并不会使爱因斯坦在应用它时所表现的创造性减色;然而它之所以适用正是由于数学家研究了最基本的物理问题:物理空间的本性,而这是没有研究过的.

张量分析这个科目首先是由贝尔特拉米(Engenio Beltrami),李普希兹(Rudolph Lipschitz)和克里斯多弗尔(E. B. Christoffel)继承黎曼的工作创立的. 贝尔特拉米和李普希兹在理论力学的框架下继续研究它. 然后,里奇和列维齐维塔改造和推广了这三个人的工作. 所以张量分析也是受物理学启发而出现的. 这样,数学科学在科学上的没有料到的用处正是由于研究它们在物理上是有依据的,而不是因为它们是那些与自己的灵魂搏斗的极端聪明的数学家的富有预见的洞察力.

不论人们怎样解释数学的壮观的可应用性,它的应用的成就之力量与广度总是现代文明突出的特点. 理解宇宙的渴望,而且以数学作为首要的工具,始于古希腊人,他们也喜爱数学本身. 他们在所谓"揭示大自然的数学设计"方面最高的成就,就是关于行星运动的第一个有理有据的定量的理论,即托勒密理论. 对于数学光学,力学,音乐的声学,水静力学和数学地理学,他们也都有贡献. 很有意思的是,欧几里得对上述学科中的前三个也写过书. 最伟大的希腊数学家阿基米德创立了

水静力学这个学科，而托勒密，他创立了三角学以用于天文学，也写过确定是地理学的书.

从大约公元 300 年希腊世界的衰落直到大约公元 1500 年现代欧洲文明的兴起，数学和科学的进展都比较小而零散. 但从 1500 年到现在，对大自然的数学研究却是空前地加速进展. 显著的成就多不胜数，其范围则小至摆的运动大至宇宙学. 无须说，所有对数学有大贡献者，其中许多人本人首先还是物理学家，都参与了这个工作.

在物理学领域中最大的成就可分七类：牛顿力学，流体（包括液体和气体）力学，弹性理论，电磁理论，统计力学，相对论以及量子理论.

在这一部分中，狄拉克和戴森的文章讲量子力学：狄拉克讲这个理论的发展和主要特点，戴森则讲怎样用群论为据说是在原子核内的形形色色的基本粒子带来了秩序. 爱因斯坦和伽莫夫的文章则讨论相对论. 第二部分中麦克斯韦的传记则概述了他对电磁理论和统计力学的贡献.

这些文章中讲解和涉及的数学绝非初等的. 说实话，与当代对大自然的更深刻的研究相伴的就是需要使用越来越精巧的数学工具. 菲涅耳（Augustin Fresnel）有一次说过大自然从不为数学上的困难而困窘. 数学家当然也不害怕.

因为科学特别是数理科学的概念都非一望即明，只有在数学物理得到大的成功以后，一些思想家才想到建立数理生物科学和数理社会科学. 在过去一个世纪里，这两门科学都迅速地发展了. 一开始在处理方法上都要模仿数学物理. 基本的方法论和伽里略在物理科学中所用的是一样的，就是找出所研究的现象中似乎是最基本的性质的定量的原理，然后联系这些原理，用数学公理和定理来导出关于这个现象的新的信息. 对生物学和社会科学的数学处理的途径体现在摩尔和斯通的两篇文章中.

生物和社会现象比之绝大多数物理现象复杂得多，因为在前者是成十亿细胞，在后者则是成百万的人决定事物的后果，而其个别的参加者的性态又各不相同. 也可以换一个说法，说是不可能找到细胞的或个人行为的基本性质作为推导的基础. 已经产生某些有用知识的途径是使用统计和概率的方法，数学家已经把这种方法发展起来了以估计天文观测的误差. 统计方法消除了不太重要的个别的偏差，而给出可说是简化的或光滑化的说明. 但这说明仍是有价值的. 所以，人的才智成正态分布的这句话，是关于人类的才智的变化的一种光滑化的描述（见第Ⅲ部分中卡茨的文章）. 这句话并不能告诉我们张三有多少才智，而是告诉我们，在一百万个张三之中才智是怎样分布的. 道尔顿的文章讲了统计方法一个很巧妙的应用. 概率论的应用时常和统计信息相联系，它并不告诉你一定会发生什么事，而是告诉你最可能发生什么事，对发生某一件事的概率给出一个度量. 人到了一定年龄会死的概率是一个简单的例子. 和统计方法一样，应用概率论得到的知识，对于某一个别的事件并非确定可靠的，但是在处理与大量的人群或多次发生

的现象有关的问题中，它是很有价值的．韦弗尔和卡茨的文章中（见第Ⅲ部分）讲了一些应用．下面马上还会讲一些别的应用．

在过去25年中还引入了好几类新的技术来处理社会的、工业的、科学的和军事的问题．这些技术现在叫做对策论、信息论、线性规划和运筹学．这里面并没有新的数学理论；* 这些新应用领域的特点是它们是几种数学技巧的特殊的组合．例如对策论，甚至它的初等的应用，也用到通常的代数，矩阵论和概率论．

数学家波莱尔（Émile Borel）在1921年引入了对策论，以预测博弈的结果．后来它的思想被数学家冯·诺依曼（John von Neumann）和经济学家摩根斯坦（Oshar Morgenstein）所采用、扩大并应用到经济竞争上去．现在它已被应用到各种军事和社会上去了．掷骰子是一种博弈，要预测掷出七点的机遇只有应用概率论．扑克也是一种博弈，但是除去摸出一副特定的牌的组合的概率以外，对手的摸牌以及对一个人的出牌怎样回应，这对于胜负和自己手上有什么牌至少是同样重要．对策论的主题就是，面对着竞争对手可以自由地作出决策时，怎样作出合理的决策．所以对策论应用于经济竞争和军事行动是一件严肃的事．摩根斯坦和拉波波特的两篇文章详细讨论这个科目．

在所有的通讯中，无论是口头的或书面的，还有在应用通道时无论是电话线路、无线电频率还是电视频道，首要的目的都是传输信息．信息论的主题就是想从通讯过程中理出一门科学来．日常语言，作为历史过程的产物，在许多情况下都是信息过剩的．"我活着还有气"这句话显然有冗余，除非是为了戏剧性地强调以外，应该缩短．另一方面，电话和无线电通讯又时常是信息不足，因为设备会引入歪曲．为了能够识别，必须传输的信息有多少？韦弗尔的文章中描述了信息论所研究的问题．所用到的数学是概率论和许多分析数学．

线性规划与编制程序给计算机下一道通知** 不一样．它是用来解决企业与军队后勤中可以说是较简单代数问题的一系列技术．企业家可以生产不同数量的几种产品．他可能知道每种产品售价的变动范围，在各个售价上各种产品的销量是多少．也可能这样一个情况也是真的：各种产品的销量不论价格降得多么低，都有一个最大限度．那么各种产品他应该生产多少，售价多少才能得到最大利润？下面的问题也可用线性规划来解决：工厂的最佳选址（从取得原料和便于运输成品来看），工厂中生产场地的使用，仓库和销售点的选址，如何决定生产流程或者使费用最低或者为维持雇佣工人，各种产品应存货多少以适应需求，应占用多少资金．在所有情况下都

---

* 译注：很难苟同原作者的这个观点．因为它们自己就是合格的新的数学理论，而它们对原有数学理论的刺激和推动也是明显的．

** 译注：线性"规划"与编制"程序"，英文都用同一个字"program"，所以作者要强调一下二者其实不同，以免混淆．

要按可能发生的情况找出最佳的运作计划. 用到的数学有简单的代数、矩阵理论、统计技术和一点符号逻辑. 库柏和查恩斯的文章会把线性规划的本质讲得更清楚.

运筹学是许多技术的混合体的总称，其中包含对策论、线性规划、概率论，而且说真的，凡对大型组织的运行有所指导的都可算在运筹学内. 在应用这些技巧于企业的管理，战役的战术，人机系统复合体运行的预测以及生产的组织时，有关某一个问题的所有因素都要考虑到. 既然运筹学包括了对策论和线性规划，则在这些科目中讲到过的比较有局限性的问题，都可以用它来处理. 它用合理的决策来代替猜测，用策略代替被迫的应对. 莱文森和布朗在他们的文章中对这个学科讲得更充分.

数学对我们的文明的影响过去一般说都是看不见的. 绝大多数人，虽然完全知道无线电的革命性影响，却不知道无线电波早就在数学上预见到了，而且，如果不是数学，就可能永远也发现不了这种波. 但是最新的，效果具有同样革命性的数学的影响，却是完全看得见的. 这就是电子计算机，无论就大小 * 与容量而言都是巨人.

电子计算机是好几个世纪中加速计算的努力的成果. 它是算盘、对数、计算尺和机械计算机的后继者. 一旦制出了快得不得了的计算机，人们不可免地会去寻找它的新用途，而且正在找到与开发这些新用途. 一般说来，计算机能完成任意的符号信息处理. 计算机除有完成巨大的算术计算功能以外，现在还用于存取大量数据，指挥工厂的机器，完成大企业多重商业运作，下棋和教育青年人. 还正在开发许多潜在的用途——识别模式如文字，回应语音指令，翻译外文书籍甚至复制自身. 戴维斯、乌拉姆、伊文思、鄂丁格尔和斯特拉屈的文章讨论计算机的构造和用途. 第Ⅱ部分中巴贝奇的传记中给出了关于第一个大型机械计算机的描述.

增加计算机的功能的研究有双重的目的. 关于人类神经系统和大脑的知识可用于改进计算机的设计. 然而我们对大脑的了解远非完备：我们对大脑活动的生理学知之不多，更不说了解什么是智能了. 所以，当数学家和电子工程师在设计电子计算机的新元件时，他们也可能发现必然在人脑中发生的事. 所有基础研究的目的是关于人类自身的终结的知识，而关于计算机的研究已经达到这样的阶段：计算机与人的相似性值得严肃地考虑. 维纳关于人的自我调节的文章以及肯麦尼关于人作为一种机器的文章探讨了这个主题.

这一部分的文章不可能尽含数学的成千种极有价值的，给人深刻印象的应用. 宁可说他们是在主要的科学领域中已经完成了什么的代表. 然而他们不仅能使读者信服数学的了不起的力量，而且对于那创造了这样的数学的人类，对于人类能做到如此的成就，会产生一种骄傲.

---

* 译注：本书主要是反映了 20 世纪 60—70 年代初的数学科学水平. 因此在这一部分，特别是涉及计算机处，明显落后了. 现在全部按原文译出，不加改动.

31.

物理学家的自然图像的进化

狄拉克(P. A. M. Dirac),1963 年 5 月号

我想在这篇文章里讨论物理学的一般理论的发展:它在过去是怎样发展的,在将来可以预期怎样发展.可以把这个不断的发展看成一个已经持续了几个世纪的进化过程.

这个进化过程的第一个重大步骤是牛顿带来的.在牛顿以前,人们把世界看成一个本质上是二维的世界——这两个维度就是我们可以走到的维度,而上天人地这个上下的维度似乎是本质上不同的什么东西.牛顿引进了引力,说明了它在物理理论中的地位,这就说明了可以如何把上下方向看成和另外两个方向相对称.可以说,牛顿使我们从具有二维对称性的图像到达了具有三维对称性的图像.

爱因斯坦沿这个方向走了另一步,说明如何从具有三维对称性的图像进到具有四维对称性的图像.爱因斯坦引人了时间,说明了它的作用在许多方面和其他三个空间维度是对称的.然而这个对称不是很完全的.人们利用爱因斯坦的图像从四维的观点来思考世界,然而这四个维度并不完全对称.在四维图像中有一些方向与其他方向不同:这些方向称为零方向,即是光线运动的方向;所以四维图像并不是完全对称的.然而,这四个维度仍有很大的对称性.就物理学的方程而言,只有一处失去了对称性,即在方程中关于时间的维度上,比之另三个空间维度,符号相反(见 397 页上第一个方程).

这样,我们就从世界的三维图像发展到四维图像.读者可能不太喜欢这个情况.因为在他的

意识里，世界仍然是三维的. 怎样能把看来如此的东西放进爱因斯坦要求物理学家所具有的四维图像呢?

出现在我们意识里的其实是四维图像的一个三维截面. 我们必须取一个三维截面才能给出在某一时刻出现在我们意识里的东西；在以后的时刻就会有另一个三维截面. 物理学家的工作，很大程度上就是把一个截面里的事件和后来时刻的另一截面里的事件联系起来. 所以，具四维对称性的图像并没有给我们以完整的情况. 如果考虑到由量子理论带来的发展，这一点就变得特别重要了. 量子理论告诉我们，必须把观察过程考虑进去，而观察通常都要求我们引进宇宙的四维图像的三维截面.

爱因斯坦还对我们的物理图像作出过另一个最重要的贡献：他提出了广义相对论，这理论要求我们假设物理学中的空间是弯曲的. 在此以前，物理学家总是用平直空间来进行研究的，先是牛顿的三维平直空间，后来扩展到狭义相对论的四维平直空间. 广义相对论要求我们进入弯曲空间，这对于我们的物理图像的进化是作了一个真正重要的贡献. 这个理论的各种普遍的要求，都意味着物理学的一切定律，都要能在弯曲的四维空间里陈述，同时表现出这四个维度有对称性. 但是我们要引入观察，而如果要从量子理论的观点来看待事物，又必须这样做. 这时我们又一次需要四维空间的一个截面. 既然四维空间是弯曲的，则我们所作的截面也就是弯曲的，因为在四维空间中给一个平直的截面一般是没有意义的. 这就把我们引到一个图像，即必须在四维弯曲空间中取三维的弯曲截面，并且讨论如何在这些截面中进行观察.

过去几年中人们试图把量子概念应用到引力，如同用于其他的物理现象那样. 这引起了意想不到的发展，即当着从截面观点看待引力理论时，有一些自由度漏到理论外去了. 引力场是一个具有 10 个分量的张量场. 人们发现，只需六个分量就足以描述每一个在物理学中有意义的东西，另外四个分量全不出现在方程中. 然而，人们不论怎样做都不可能从完整的 10 个分量之中只取六个重要的，而不至于破坏四维对称性. 这样，如果坚持保留方的四维对称性，又要求使引力理论适用于讨论观察问题，如同量子理论所要求的那样，那就不得不引入超出物理情况之所需的更复杂的描述. 这个结果使我怀疑，物理学中四个维度这一要求究竟基本到何种程度. 不多几十年以前，整个物理学都要以四维形式来表述，这似乎是相当肯定的. 但现在看来，四维对称性并不具有超乎一切的重要性，因为有时背离这一点反而能使对大自然的描述更简单一些.

现在我愿谈一谈量子理论带来的发展. 量子理论讨论非常小的事物，它是近 60 年来物理学的主要部门. 在这一段时间里，物理学家汇集了相当大量的实验的信息，发展了一个与之相应的理论，理论和实验的结合导致了物理学家们关于世界的图像有了重要的发展.

牛顿(Issac Newton, 1642—1727)以他的引力定律把物理学家关于大自然的图像从具有二维对称性变成了具有三维对称性的图像. 这幅画像是 James Macardel 1760 年按 Enoch Seeman 的画像画成的.

普朗克为了解释黑体辐射定律，发现有必要假设，电磁波的能量只能是某一个能量单位的整数倍，而这个单位的大小又依赖于波的频率. 这就是量子的第一次亮相. 后来爱因斯坦发现，同样的能量单位也出现在光电效应中. 在量子理论早期的工作中，人们只是迫于接受能量的这种单位，而不能把它融入一个物理图像之中.

第一个出现的新图像是玻尔关于原子的图像. 按这个图像，电子沿一些确定的轨道旋转，并且时而从一个轨道跃迁到另一个轨道. 我们无法描绘跃迁是怎样发生的. 我们只能把它作为一种不连续性而接受. 玻尔关于原子的图像只能用于一些特例，即在所考虑的问题中只有一个电子有重要性时适用. 所以，这只是一个不完全的初步的图像.

量子理论在 1925 年因量子力学的发现而有了大的进展. 这个进展是由两个人互相独立地

带来的,先是海森堡,很快再有薛定谔,各从不同的观点出发进行研究.海森堡的研究与光谱实验中的证据是密切相联的,这种证据在那时已经大量聚集,而他发现了一个框架,使这些实验信息都能适合于它.这个框架现在称为矩阵力学.光谱学的实验数据都可以非常漂亮地放在矩阵力学的框架里,这就对原子世界给出了一个很不相同的图像.薛定谔则从比较数学化的观点来研究.他力求找到一个描述原子事件的漂亮的理论,而且受益于德·勃罗依关于粒子与波相联系这一思想.他能够推广德·勃罗依的思想,得出一个非常美的方程,来描述原子过程,这方程现称为薛定谔波方程.薛定谔完全是从思维中得到这个方程.他想找到德·勃罗依的思想的美丽的推广,而不是如海森堡那样与这个主题的实验方面的发展保持密切的联系.

我可以告诉你们薛定谔对我讲的故事.当他一旦得到关于这个方程的思想,他就想把它用于氢原子中的电子,而得到一些与实验不符合的结果.产生这种不一致是由于那时还不知道电子有自旋.这件事当然使薛定谔很失望,就把这个工作放在一边好几个月.后来他发现,如果以一种比较近似的方式应用这个理论,即是不考虑相对论所要求的修正,则在这种比较粗糙的近似之下,他的工作就与观察相符了.他发表的第一篇论文就只是这种粗糙的近似的方程,薛定谔波方程就是这样公诸于世的.当然,后来人们知道了怎样正确地把电子的自旋也考虑进来,应用相对论性的薛定谔方程所得的结果和实验之间的不相符的地方就完全弄清楚了.

我想,这个故事有一个教训.就是:要求方程很美比要求它们与实验相适合更重要.如果薛定谔当年对他的方程更有信心,他就会早几个月发表,而且会发表一个更准确的方程.虽然那个方程是薛定谔发现的,而且是在他关于氢原子的非相对论处理之前发现的,现在却称为克莱因-戈登(Klein-Gordon)方程.看起来,如果一个人是从使方程更美的观点出发,而且又确有绝佳的洞察力,他就会走上肯定会取得进展的道路.如果他的工作与实验不全相符,也不必过于气馁.因为这种差异很可能来自没有适当地考虑次要的特点,而理论的发展会弄清这些问题.

量子力学就是这样发现的.它使物理学家关于世界的图像发生极大的变化,也是历来最大的一次.这个变化来自我们必须放弃决定论的图像,而我们从来都是承认决定论的.我们得到一个理论,它不能肯定地预测未来一定会发生什么事,而只能给出有关发生各种事件的概率的信息.这样放弃了决定论曾是一个引起激烈争论的事,有些人完全不喜欢这样做.特别是爱因斯坦从来不喜欢.虽然爱因斯坦是对量子力学的发展大有贡献的人,但是对于量子力学在他有生之年演进到现今仍然维持着的形式,他是大不以为然的.

有些人对于放弃决定论所持的敌意,集中表现在爱因斯坦、波多尔斯基(Podolsky)和罗生(Rosen)合写的一篇论文中.这篇文章讨论,既要有一个自洽(或相容)的图像,又能按量子力学的规律给出结果,会遇到什么困难.量子力学的规律是相当确定的.人们知道怎样由它们计算出

爱因斯坦(Albert Einstein, 1877—1955)用他的狭义相对论把物理学家的具有三维对称性的世界图像变成具有四维对称性的图像. 这是他和他的妻子、女儿玛葛特(Margot)合摄于1929年的照片.

结果，怎样把计算的结果与实验相比较. 人人都同意这个形式结构. 它的作用如此之好，谁也不敢对它表示不赞同. 但是在这个形式结构后面我们该建立一个什么样的图像，这是一个充满争论的论题.

玻尔(Niels Bohr, 1885—1962)引进了电子按确定的轨道绕核旋转的思想. 这张照片摄于1922年，即他的论文发表后九年.

普朗克(Max Planck, 1858—1947)引进了电磁辐射是由量子即一些粒子所组成的思想. 这张照片摄于1913年，即他的原论文发表后十三年.

我想建议，大家不必太为这个争论伤脑筋. 我非常强烈地感到，物理学当今所达到的阶段还不是最后的阶段. 它只是我们关于大自然的图像的演进的一个阶段，我们应该设想这个进化将来还会继续下去，正如同生物的进化将来也会继续下去一样. 物理理论当今所处的阶段只是走向未来更好的阶段的一个踏脚石. 可以相当肯定会有更好的阶段，正是因为今天的物理学中出现的困难.

现在我想多谈一下今天的物理学的困难. 那些不是本行专家的读者可能得出一个印象，既然有这些困难，物理理论还处于相当不妙的境地，量子理论也并不太好. 我想说，量子理论是一个极好的理论，借此纠正这种印象. 它与范围极广的许多现象的观察结果出奇地相符. 无疑它是一个好的理论，物理学家对它的困难谈得那么多，唯一原因在于，正是这些困难是非常有趣的. 这个理论的成功是公认的. 老是反反复复地讲成功并不会得到什么，反而是谈论困难倒有望得到进步.

量子理论的困难有两类. 我可以称之为第一类困难和第二类困难. 第一类困难就是我已讲到的:怎样在现今的量子理论的规律后面构成一个自洽相容的图像. 这些第一类困难其实并不使物理学家心烦. 如果一个物理学家知道怎样计算出结果来并与实验相比较,一旦二者相符,他就很高兴,除此而外他就别无所求了. 只有哲学家,需要对大自然有令人满意的描述,才关心第一类困难.

除了第一类困难以外还有第二类困难,它的来源是,现在的量子力学的规律有时还给不出什么结果. 如果把这些规律用于极端的情况——涉及极高能量和极小距离的现象——有时会得到其含意模糊不清甚至完全无法理解的结果. 这时就很清楚,已经达到了应用这个理论的限度,而需要有进一步的发展了. 第二类困难对于物理学家是很重要的,因为它们给出了应用量子理论得出结果并与实验相比较的限度.

我还想多谈一下第一类困难. 我感到不必为之过于操心,因为它们只是物理图像发展到现今阶段的困难,而几乎可以肯定在将来的发展中会有变化. 为什么对它们将来会变能如此有信心,我想有一个有力的理由. 大自然有一些基本的常数:电子的电荷(记作 e),普朗克常数除以 2π(记作 $\hbar$). 还有光速(c). 由这些基本常数可以作出一个无量纲数:$\hbar c/e^2$. 实验表明,它的值是 137,或者很接近 137. 现在还没有理由说明它为什么取这个值而不取别的值. 许多人提出了种种想法,但是没有为人普遍接受的理论. 人们仍然可以相当肯定,物理学家有朝一日会解决这个问题,解释清楚它为什么取这个值. 将来会有一种物理学,当 $\hbar c/e^2$ 为 137 时它就能用. 而 $\hbar c/e^2$ 取别的值时这种物理学就不能用.

未来的物理学当然不会把 $\hbar$,e 和 c 都作为基本的量. 它们只可能有两个是基本的,第三个则必须由这两个导出. 几乎可以确信,c 是两个基本的量之一. 光速 c 在四维图像中如此重要,它在狭义相对论中起着把空间和时间单位联结起来这个基本的作用,所以它必然是基本的. 这样我们就面对着一个事实:在 $\hbar$ 和 e 这两个量中,一个是基本的,一个是导出的. 如果 $\hbar$ 是基本的,e 就需要用 $\hbar$ 的平方根以某种形式来表示,说有一种基本的理论会把 e 用平方根来表示,看来极少可能,因为在基本的方程中从没有出现过平方根. 更可能的是,将会用 e^2 来解释 $\hbar$. 这样,在基本的方程中就不会出现平方根了. 我认为,如果有人猜想,在未来某个阶段的物理图像中,e 和 c 是基本的量而 $\hbar$ 是由它们导出的,这是靠得住的.

如果 $\hbar$ 是导出量而不是基本量,我们关于不确定性的全部概念就全都要变:$\hbar$ 是出现在海森堡的测不准关系式中的基本的量,这个关系式则把位置和动量不确定性的度量联结起来. 我想,可以做一个靠得住的猜想:现在这种测不准关系式在将来的物理学中是存在不下去的.

当然,不会回到经典物理学的决定论去. 进化是不会走回头路的. 它只能往前走. 会有某种

现在想不到也猜不到的发展，它会把我们带离经典的概念更远，但是它会完全改变我们关于测不准关系式的讨论. 当这个发展到来的时候，人们就会发现，关于观察在理论中的作用所进行过的那么多的讨论，其实都是隔靴搔痒，因为那时会有一种更好的观点来看待事物. 所以我要说，如果我们能找到一个方式来描述现今量子力学的测不准关系式和非决定论，而且使得我们的哲学思考也感到满意，我们就算是交了好运. 但是如果我们找不到这样的方式，那也不必为此真正苦恼. 我们只要想到我们还处在一个过渡阶段，在这个阶段大概不太可能得到一个满意的图像.

我这样就把第一类困难打发了：我只是说它们其实不那么重要，如果能在这方面得到进展，就算是好运气，如果不能，也不是什么真正令人苦恼的事. 第二类困难才是真正严重的困难. 它们的产生主要是由于这样一个事实：当我们把量子理论用于一个领域，而为了使它与狭义相对论一致又只能按这种方式去用，即像我提到的那样用三维截面去解释它，我们会得出初看起来

德・勃罗依(Louis de Broglie，1892—1987)提出了粒子与波相联系的思想. 这幅照片摄于 1929，其时他的论文已发表了五年.

全无问题的方程,但是求解时才发现它什么解也没有. 在这个当头,应该说我们还没有得出一个理论. 但是物理学家在这里却非常聪明,他们找到了面对这个障碍前进的方法. 他们发现,当求解方程时会出现一些量,本来应该是有限的却变成了无限. 得到一些积分,发散而不收敛于某个确定的东西. 物理学发现了处理这种无穷大的方法,按照某些规则就可以得到确定的结果. 这个方法现在称为重正化理论.

我将用一些话语来解释它的想法. 我们从一个理论开始,其中涉及某些参数:电子电荷 e,电子质量 m,诸如此类. 然后发现出现在原方程中的这些量,并不等于电子电荷和质量的观测值. 观测值与它们相差一些修正项——Δe,Δm 等等——所以总电荷是 $e+\Delta e$,总质量是 $m+\Delta m$. 电荷和质量的这种改变来自于基本粒子和其他东西的相互作用. 于是就说,$e+\Delta e$ 和 $m+\Delta m$ 是观察到的东西,它们才是重要的. 原来的 e 和 m 只是数学参数;它们是不可观察的,所以只是工具,用到一定时候就可以丢掉,再换上别的可以与观察相比较的东西. 如果 Δe 和 Δm 都是小的修正(或虽然不小但也是有限的修正),这本来是正确的作法. 但是按照现有的理论,Δe 和 Δm 却都是无穷大. 虽然如此,人们还是用原来那种形式结构,并且得到的结果是用 $e+\Delta e$ 和 $m+\Delta m$ 来表示的,这一点可以这样来解释,就是说 e 和 m 是某种负无穷大的量,抵消了正无穷大的 Δe 和 Δm. 可以用这样的理论推出一些结果,再与实验,特别是量子电动力学的实验相比较. 令人吃惊的是,在量子电动力学的情况,所得的结果与实验相符得极好. 直到许多位有效数字都相符——这种精确度只在天文学中有过. 正是由于符合得如此之好,物理学家觉得重正化理论有点道理,虽然不大符合逻辑.

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

狭义相对论引进的四维对称性并不完全. 上式是四维时空中不变距离的式子. s 是不变距离;c 是光速;t 是时间;x, y, z 是三个空间维度. d 表示微分. 缺少完全的对称性反映在时间方向的贡献($c^2 dt^2$)与三个空间方式的贡献($-dx^2$, $-dy^2$, $-dz^2$)符号不同.

$$\left(\frac{ih}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e^2}{cr}\right)\Psi = \left[m^2c^2 - \frac{h^2}{4\pi^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\Psi$$

薛定谔的第一个波方程与实验结果并不符合. 因为它没有考虑当时还不知道的电子自旋. 这方程是德·勃罗依关于自由电子运动方程的推广. 符号 e 表示电子电荷,i 是 -1 的平方根;h 是普朗克常数;r 是电子到核的距离;Ψ 是薛定谔波函数;m 是电子质量. ∂ 是偏导数的记号.

$$\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Psi = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi$$

薛定谔第二波方程是原方程的一个近似,它没有考虑相对论所要求的修正.

想把这个理论放在可靠的数学基础上似乎是不可能的. 过去物理理论都建筑在本质上很可

靠的数学之上. 我不是说物理学家所用的总是可靠的数学;他们在计算时也时常使用不可靠的步骤. 但是以前他们这样做可以说只是由于懒. 他们想尽快地得到结果而不想做不必要的事. 纯粹数学家总会跟着带来另一些步骤把这个理论弄得靠得住,也许要引进一大堆复杂的记号之类. 从数学的观点看来,为了把每件事都表述得严格,这样做是可取的,但是对物理思想却没有贡献. 过去的数学用这个办法总能弄得很可靠,但是重正化理论却挫败了数学家所有的把它搞得可靠的尝试. 我倾向于怀疑重正化理论是一种将来不会存在下去的理论,它的结果与实验之间令人瞩目的相符应该看成一种巧合.

这可能并非惊人之谈,因为过去也有类似的巧合. 实际上,玻尔的电子—轨道理论,如果仅限于一个电子的问题,也与观察符合得很好. 我想,今天人们也会说这种相符也是凑巧而已,因为玻尔的轨道理论的基本思想已经被一种完全不同的东西超过了. 我相信,重正化理论的成功,也和玻尔的轨道理论用于单电子问题上的成功,是差不多的事.

如果人们能够接受抛弃无穷大不管这种不合逻辑的事,那么重正化理论确实消除了某些第二类困难,但没有消除全部. 在涉及电动力学以外的粒子上,例如形形色色的介子和中微子这些新粒子,还留下许多问题. 在那里,现有的理论还处于原始阶段. 看来相当肯定,要在基本概念上有很大的改变才能解决这些问题.

这些问题之一就是我提到过的 137 这个数字的问题. 另外的问题还有怎样自然而然地在物理学中引进基本的长度的问题,还有怎样解释基本粒子的质量之比,怎样解释它们的其他性质的问题. 我相信,解决这些问题各需要各个的概念,而在物理学未来的进化的各个阶段里会逐一得到解决. 在这一点上我觉得我与大多数物理学家看法不同. 他们倾向于觉得,有朝一日会发现一个大概念,然后一下子解决了所有这些问题. 我觉得,希望什么人能一下子解决所有这些问题是要求太高了. 应该尽可能把这些问题分开然后各个击破. 而且我相信,物理学未来的发展就在于一个个地解决它们. 即令解决了一个,怎样对付其他的还是大大的神秘.

我或许可以讨论一下,为了解决某一些这类问题我有过一些什么想法. 这些想法没有一个已经走得很远了,而且我对其中哪一个也不存过多的希望. 但我还是觉得值得简单地谈谈.

一个想法是引进对应于光以太的什么东西,光以太在 19 世纪的物理学家中间是很流行的. 我前面说过,物理学不会向后进化. 当我说要重新引人以太时,并不意味着要回到 19 世纪所有的那种关于以太的图像,而我的意思是要引入与现在的量子理论相符合的那样一种关于以太的新图像. 以太的老观念之所以遭到反对,是因为你把它设想成一种充满空间的流体,而且它在每一点处都有确定的速度,这就破坏了爱因斯坦狭义相对论所要求的四维对称性. 爱因斯坦的狭义相对论枪毙了以太这个观念.

但是按现今的量子理论，我们没有必要对任一个物理对象都给以确定的速度，因为速度服从测不准关系. 我们所关心的对象质量越小，测不准关系式就越重要. 现在，以太肯定只有很小的质量，所以测不准关系式对它就越发重要. 所以，以太在某个特定位置的速度就不能看成是确定的，因为它要服从测不准关系式，所以可以取相当广大范围内的任意值. 这样就可以解决把以太的存在与狭义相对论调和起来这个难题.

这会使我们对于真空的图像发生重要的变化. 我们愿把真空看作时空四个维度完全对称的区域，这正是狭义相对论所要求的. 如果区域中有服从测不准关系式的以太存在就不会有准确的对称性. 我们可以假设以太的速度在一个宽广的值域中取一切值的机会都是相同的，但这只能给出近似的对称性. 我们不能以任一种精确的方式达到如下的极限情况，即是允许取正负光速之间的一切值，而想要得到完全的对称性又必须这样做. 所以真空是一种达不到的状态. 我并不以为这是从物理上反对这个理论的依据. 这意味着真空是一种可以非常接近的状态. 接近到什么程度都没有限制，但就是达不到. 我相信，对于实验物理学家来说这已经够令人满意了. 然而这意味着要背离量子理论中的真空状态，在量子理论中我们正是从恰好具有狭义相对论所要求的对称性的真空态开始的.

这就是为了物理学在未来发展的一个概念，它会改变我们关于真空的图像，但是这种改变不是实验物理学家所不能接受的. 把这个理论发展下去是困难的，因为有必要从数学上建立起以太的测不准关系式，在这个方向上迄今还没有发现满意的理论. 如果能够满意地发展，它就会在物理理论中给出一类新的场，可能有助于解释某些基本粒子.

另一个我想提一下的图像是关于为什么在自然界观察到的电荷都是某一个基本单位 e 的倍数. 为什么大自然中的电荷值不能是连续的呢？我所建议的图像可回溯到法拉第关于电力线的概念，是它的一个发展. 法拉第的电力线是描述电场的一种方法. 如果在空间的某一区域有一个电场，遵照法拉第，可以作出一组电力线，其方向即电场的方向. 电力线接近的程度就是电场强度的一种度量. 电场强处电力线就很接近，电场弱处就不太接近. 法拉第的电力线给了我们经典理论中的电场的一个好的图像.

当我们过渡到量子理论时，就在基本图像中引进某种离散性. 我们可以假设，经典理论中连续分布的电力线会被几条电力线所取代，而它们之间再也没有电力线了.

好了，法拉第图像中的电力线的端点就是电荷. 所以对于量子化的法拉第电力线，假设与每一条电力线相联结的电荷都是相同的（除了符号以外）就很合理了. 它们一定位于端点，如果电力线有端点的话. 而且一定是电子电荷，$-e$ 或者 $+e$. 每条电力线各有方向，所以有两个端点的电力线，其两端是不一样的，一个端点有电荷 $+e$，另一个则有电荷 $-e$. 当然我们也有通向无穷

薛定谔(Erwin Schrödinger,1887—1961)把德·勃罗依关于必定有波与粒子相联结的思想推广到电子绕核运动而作出了他的方程.这幅照片摄于他发表其第二方程后的四年,即1929年.

远处的电力线,这时就没有电荷.

如果我们设这些离散的法拉第电力线是物理学中基本的东西,而且是我们关于电磁场的图像的基础,我们就能解释为什么电荷总是以e的倍数出现.这是由于,如果我们设有任何一个粒子而有若干电力线以它为端点,电力线的数目只能是一个整数.这样就可得到一个定性地说是相当合理的图像了.

我们设这些电力线可以运动,其中有一些成为闭环或者简单地由负无穷远伸向正无穷远.

这些都相应于电磁波. 另一些电力线有端点，端点就是电荷. 有时电力线也会折断. 这时就会出现两个端点，在那里就会有电荷. 电力线的折断这个过程就是生成一个电子(e^-)和一个正电子(e^+)的图像. 这将是一个相当合理的图像. 如果有人能把它展开，它就会成为一个理论而 e 是其中的基本的量. 我还没有找到合理的力线运动方程组，我只是把这个想法提出来，而它可能是未来的物理图像.

这个图像有一个很吸引人的特点. 它能相当大地改变关于重正化的讨论. 我们现在的量子电动力学中的重正化的起点是人们说的所谓裸电子；即没有电荷的电子. 在这个理论中，电荷是在某个阶段才引进来放在这个电子上的，这样才使它与电磁场互相作用. 这就对方程式带来一个摄动，并使电子质量有了改变 Δm，再把 Δm 加到电子原来的质量上. 这个过程是相当迂回的，

海森堡(Werner Heisenberg，1901—1976)引进了矩阵力学，这和薛定谔方程一样是为了讨论电子的运动的. 这张照片摄于 1929 年.

因为它是从裸电子这个颇为"非物理"的概念出发的. 说不定在将来改进了的物理图像中，是不会有裸电子存在的.

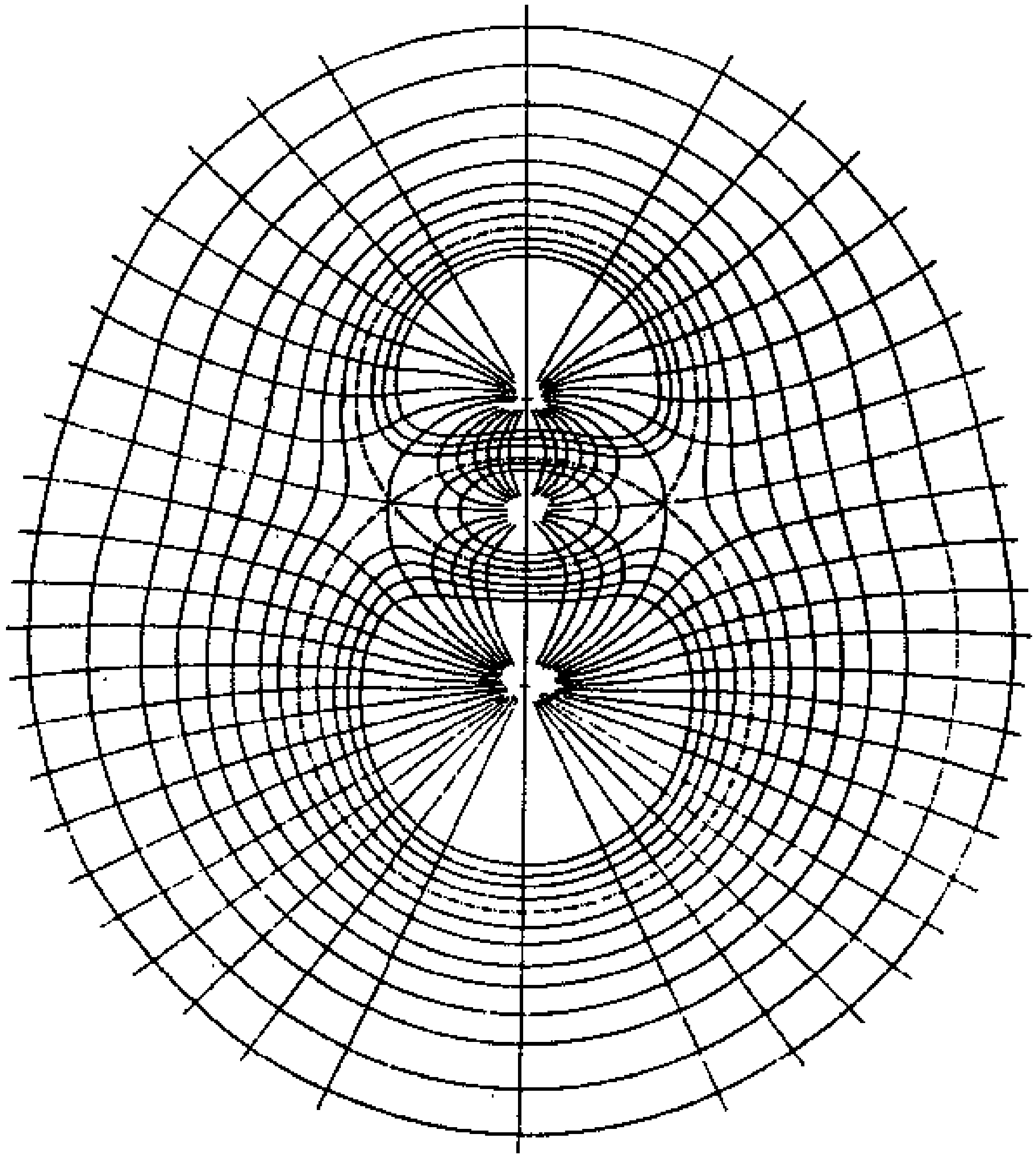
现在的情况正如离散的电力线情况一样. 我们可以把电力线看成弦，图像中的电子就是弦的端点. 弦本身就是电子附近的库仑力. 裸电子就是周边没有库仑力的电子. 这个图像是很难设想的，正如考虑弦的端点而不考虑弦本身一样难于设想. 我想，这大概就是试图发展物理图像的道路——即引进一些使得我们不想要的东西成为难于设想的. 我们又有了一个看来合理的图像，只不过我还没有找到发展它的适当的方程.

我还可以提一下我近来正在做的第三个图像. 它要背离把电子设想为一个点的图像而把它设想为一个有限大小的球. 当然，把电子设想为一个球是一个老观念了，但以前在讨论对球加速或使之作不规则的运动时会有困难. 它会变形，而又怎样去处理变形呢？我提议，应该允许电子一般地具有任意形状和大小. 在有些形状和大小之下，它的能量比其他情况小，它会趋向于一定大小的球，这时它的能量最小.

这个把电子放大的图像是受到物理学中一个新粒子即 μ 介子的启发而来的. μ 介子有一个令人惊诧的性质，即它的质量大约是电子质量的 200 倍，其他性质则几乎与电子完全一样. 除了质量与电子不相配以外，μ 介子以极高的精确度与电子相似，自旋相同，磁矩与质量之比也与电子相同. 这就导致一个想法，即应该把 μ 介子看成受激的电子. 如果电子只是一个点，要想像它如何受激，是一件别扭的事. 但是若电子是一个有一定大小的物体的最稳定的态，μ 介子可能正是这个物体在振荡时的下一个最稳定的态. 这就是我最近正在研究的想法. 这个想法的展开有许多困难，特别是很难引进正确的自旋.

我提到了可以设想我们的物理图像如何发展的三种可能的途径. 无疑，别人还会想到其他的途径. 人们可能会想，有朝一日什么人会找到一个真正合适的思想从而引到一个大的发展. 我则相当悲观，并且倾向于认为这些想法都不够好. 基本物理学将来的进化——就是真正能解决某一个问题的发展，例如引进基本长度，解释各种粒子之质量比——都需要对物理图像作重大得多的改变. 这就会意味着，我们现在的设想新的物理图像的种种企图，都是让想像力依靠不充足的物理概念驰骋. 如果真正是这样，又怎么能希望将来得到进展呢？

还有另一条路线，可以沿着它依靠理论手段前进. 大自然似乎有一个基本的特点，就是基本的物理定律都是用非常美、非常有力的数学理论来描述的，要有很高标准的数学才能理解它. 你可能奇怪：为什么大自然是按这样的路线构造出来的？我们只能回答说：我们现有的知识似乎就是表明大自然是这样构造出来的. 我们干脆就非接受不可. 人们或者也可以这样来描述这个情况，说上帝是一个非常高明的数学家，他用很高深的数学来构造宇宙. 我们对于数学的谦卑的



电磁场中的电力线，若在量子理论中设为离散的，就可以提示，何以电荷总是电子电荷的整数倍. 按狄拉克的观点，当一条电力线有两个端点时，则在一个端点上有一个电荷为 $-e$ 的粒子，如电子；在另一端则有一个电荷为 $+e$ 的粒子，说不定是正电子. 一条封闭的电力线折断时，就会物化为一个电子——正电子对.

追求使我们能理解宇宙的一麟半爪，随着我们进而发展越来越高深的数学，我们就有望对宇宙了解得更好.

这种观点还给我们指出了另外一条道路，有望我们的理论沿着它取得进展. 去研究数学吧. 我们可以希望能猜到，什么样的数学将要进入未来的物理学. 许多人在研究量子理论的数学基础，试图更好地懂得这个理论，并使它更有力、更漂亮. 如果有谁碰上了正确的途径，沿着它可以得到这个发展，它就会引导到未来的进步，这里，人们先是找到方程，然后研究它们，逐步地学会怎样应用它们. 这和薛定谔发现他的波方程的发展道路多少有些相应. 薛定谔只不过是寻找一

个数学上很美的方程才发现他的方程.当方程才被发现时,人们看到它在某些方面很适合,但是,应用这个方程的一般原则是两三年以后才发现的.很可能物理学的下一次进步先会是沿着这样的路线:人们先找到方程,然后再需要几年时间的发展才能找到这些方程后面的物理思想.我的信念是,比之试着猜想某些物理图像,这是一条更有希望的前进的路线.

当然也可能甚至这样的前进道路也不行,那时剩下来的唯一道路就是实验了.实验物理学家们不太理会理论的事,而不断地工作,收集了一大仓库的信息.有朝一日会出来一个新的海森堡,他能从这些信息中挑出重要的特性,而且能看出怎样去使用它们,有点像海森堡当年用关于光谱的实验知识建立起矩阵力学的办法.物理学最终会沿着这样一些道路发展,这是不可避免的.但是如果人们找不到聪明的思想以发展其理论方面,我们就可能还得等待一个相当长一段时间.

32.

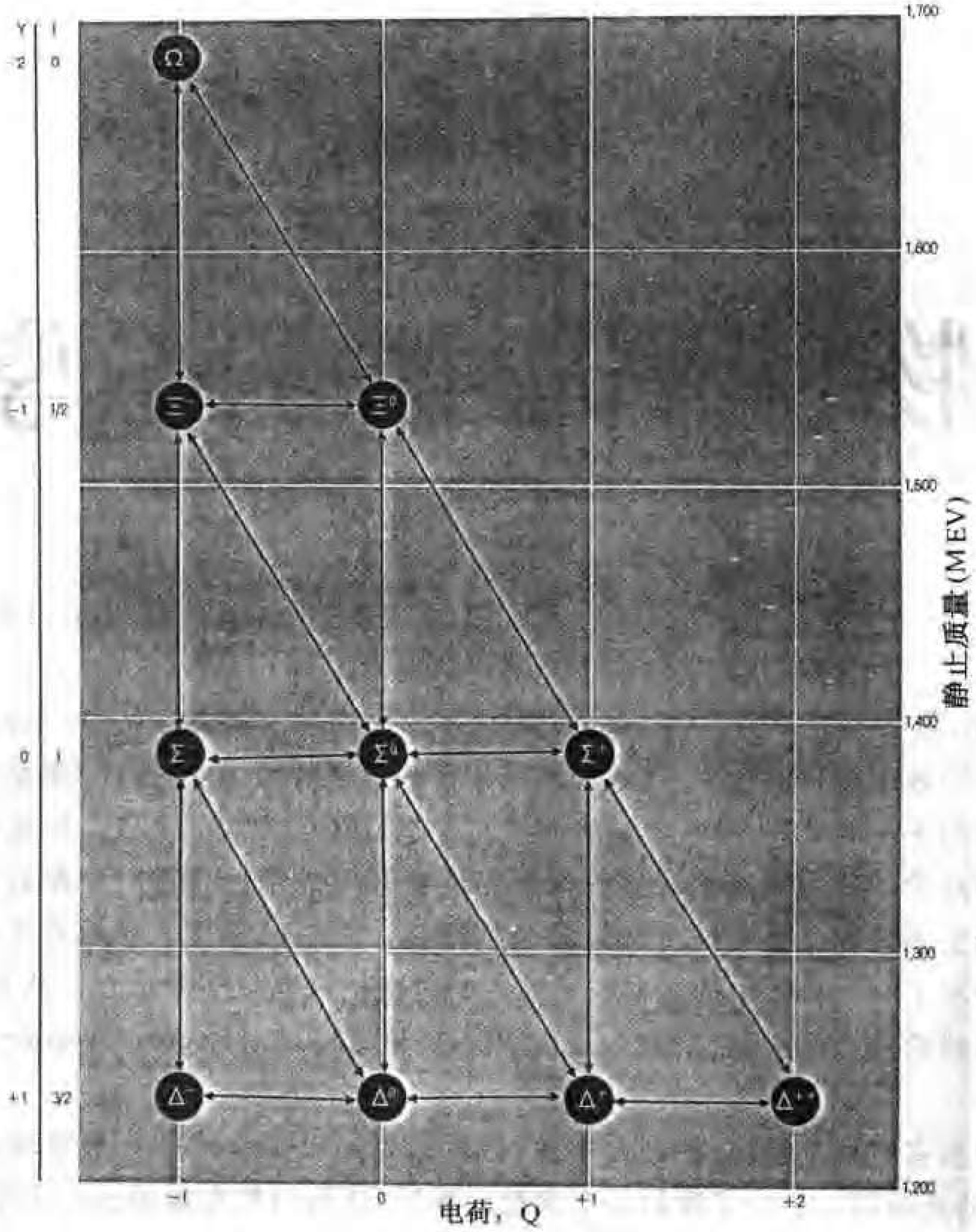
物理科学中的数学

戴森(Freeman J. Dyson),1964 年 9 月号

1910 年,数学家维布伦（Oswald Veblen）和物理学家琴斯（James Jeans）讨论普林斯顿大学数学课程的改革．“我们可以把群论也砍掉”，琴斯说：“那是一门在物理学中永远用不上的课”．没有记录表明维布伦是反驳了琴斯的论点，还是在纯数学基础上为保留群论而辩护．我们知道的就是群论课仍然要开．维布伦没有听琴斯的意见．这对普林斯顿的科学历史多少有点重要性．真是命运的嘲笑，群论后来成了物理的中心主题，它主导了我们这些力求了解大自然中的基本粒子的人的思想．这也是一个巧合，从 20 年代到现在开创了物理学的群论观点的外尔（Hermann Weyl）和威格纳（Eugene Wigner）后来都是普林斯顿的教授．

这个小故事有好几个教训．教训之一是:科学家不应该在自已胜任的领域之外轻易宣称砍掉什么．琴斯的武断的恶果给了我们一个清楚的教训．从他与维布伦的这个不幸事件开始,他后来每况愈下,成了一个成功的科普作者和在无线电台上的讲演者,接受了爵士封号,却因他对宗教和哲学上的儒雅但却浅薄的思辩毁了自己的职业名声．

但我们不应因为琴斯的兴衰而暗自庆幸．如果不是上帝的恩宠，我们都会落到这个地步．不论如何，1910 年代的琴斯是一个受人尊重的物理学家（然而普林斯顿大学除了也有仿哥特式建筑以外，在头衔上也效颦于英国习俗，称琴斯为应用数学教授)．他与大多数同事相比，并非不能胜任，也非学问不多．那时，对于物理学与群论的联姻会如此成果丰硕，谁也没有最少的知觉．所以我们的故事的第二个也是更重要的教训是：科学的未来是不可预测的．数学在物理科学中的地位不可以一劳永逸地决定．数学与科学的关系，也和科学本身一样多姿



群论在基本粒子物理中由于今年在布鲁克哈文国立实验室发现了 Ω⁻ 重子而有了戏剧性的成功．Ω⁻ 的存在是用"八重方式"预见到的，这是一个由盖尔曼和涅依曼独立建立的理论．"八重"指的是一种基于抽象群的数学理论得出的分类方式．早前的理论证明"同位旋"对称性(黑箭头)把有不同电荷值(Q)的一族粒子联系起来．八重方式用一种新的对称性(灰箭头)把有不同超荷(y)和同位旋(I)的粒子的超族联结起来．需要有 Ω⁻ 重子把含十个成员的超族补全起来，其中几个成员是早已知道了的．这就是一个四元组(Δ)，一个三元组(Σ)，一个二元组(Ξ)．Ω⁻ 是唯一的具有负电荷的单个重子，而它的观测质量与理论预测的质量只相差不多几个百万电子伏(mev)．

多彩.

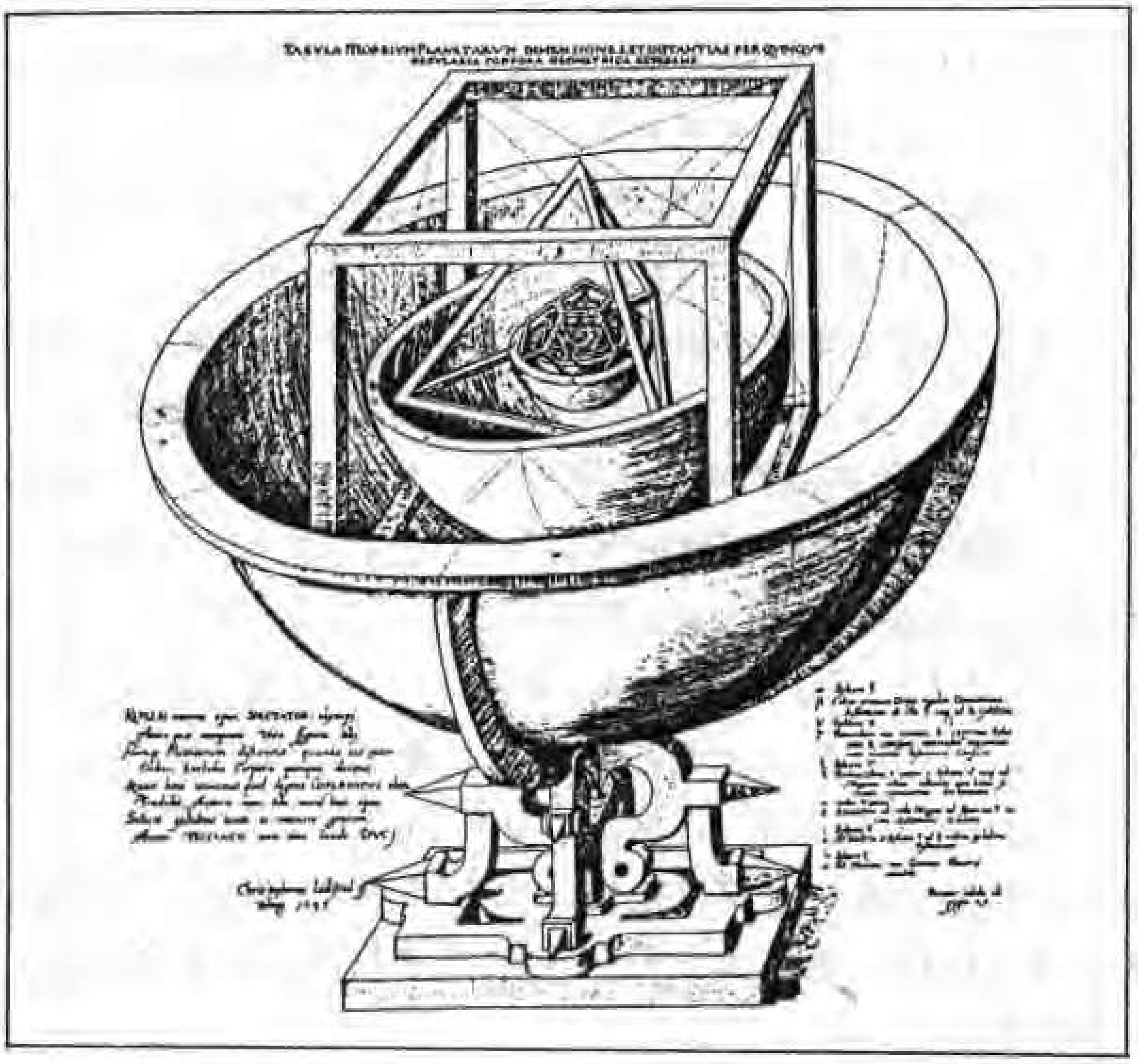
物理科学的曲折历史中有一个始终未变的因素,这就是数学想像力的决定性的重要.在每一个世纪中,科学各有其专注,数学也各有其风格.但在每一个取得重大成就的世纪中,物理学的理解之增长,无不是在经验性的观察与纯粹的数学直觉共同指导下取得的.数学之于物理学家不仅是计算现象的工具;它是创造新理论的概念和原理的主要源泉.

在各个世纪中,数学反映物理宇宙的性态的力量一直使物理学家感到惊异.伟大的17世纪天文学家开普勒(Johannes Kepler),行星运动规律的发现者,用神学的词句表达了自己的惊异:“上帝实是宅心仁厚.他悠游自在,不事雕琢,始作符号游戏,将他的爱好镌刻于世界之中;故我时而想到,整个大自然与深恩的苍天都以几何学的艺术为表征.”在更加观念论的19世纪,第一次验证了电磁波的存在而使麦克斯韦的电磁场方程得到证实的物理学家赫芝(Heinrich Hertz)写道:“人们无法避免这样一种感觉,这些数学公式自有独立的存在,并有自己的智慧,它们比我们聪明,甚至比它们的发现者聪明,因为我们由它们得到的,多于我们赋予它们的.”最后,在理性主义的20世纪,比较现代的数学观念,虽然以枯燥而且质朴为其特征,却取得了如此的成就,这使威格纳感到迷惑不解:“我们的处境像是一个拿了一大串钥匙的人,要依次开几扇门.他总是试验一次两次就找到了正确的钥匙.他就怀疑了是不是钥匙和门只有一种匹配方法.”

开普勒的数学、赫芝和威格纳的数学几乎毫无共同之处.开普勒关心的是欧氏几何:圆、球还有正多面体.赫芝想的是偏微分方程.威格纳写的是复数在量子力学中的应用,还有(但是他没有明说)他自己胜利地引入物理学的许多领域的群论.欧氏几何,偏微分方程和群论属于数学中三个不同分支,相距遥远,似乎属于不同的数学宇宙.然而它们又都紧密地与统一的物理宇宙相关.这些事实令人惊奇,而谁都不能完全理解,只是,从这些事实有保证地可以得到一个结论.人类对于物理世界、对于数学世界以及它们的相互关系,还远未接近于完全的理解.

在本文中我不打算对于为什么数学会为物理学提供这样大的力量作深入的哲学讨论.每个世纪中只有少数物理学家——在20世纪或者只有爱因斯坦,外尔,玻尔(Niels Bohr),布里奇曼(P. W. Bridgman)和威格纳——才对我们的知识的基础挖掘得如此之深,才会遇到真正的哲学困难.绝大多数从事通常研究工作的科学家,我自己也包括在内,则可以从法国数学家勒贝格(Henri Lebesgue)的话中得到安慰:“在我看来,一个数学家就他作为数学家而言,不必全神贯注于哲学,——此外,许多哲学家也表示了同样的意见.”

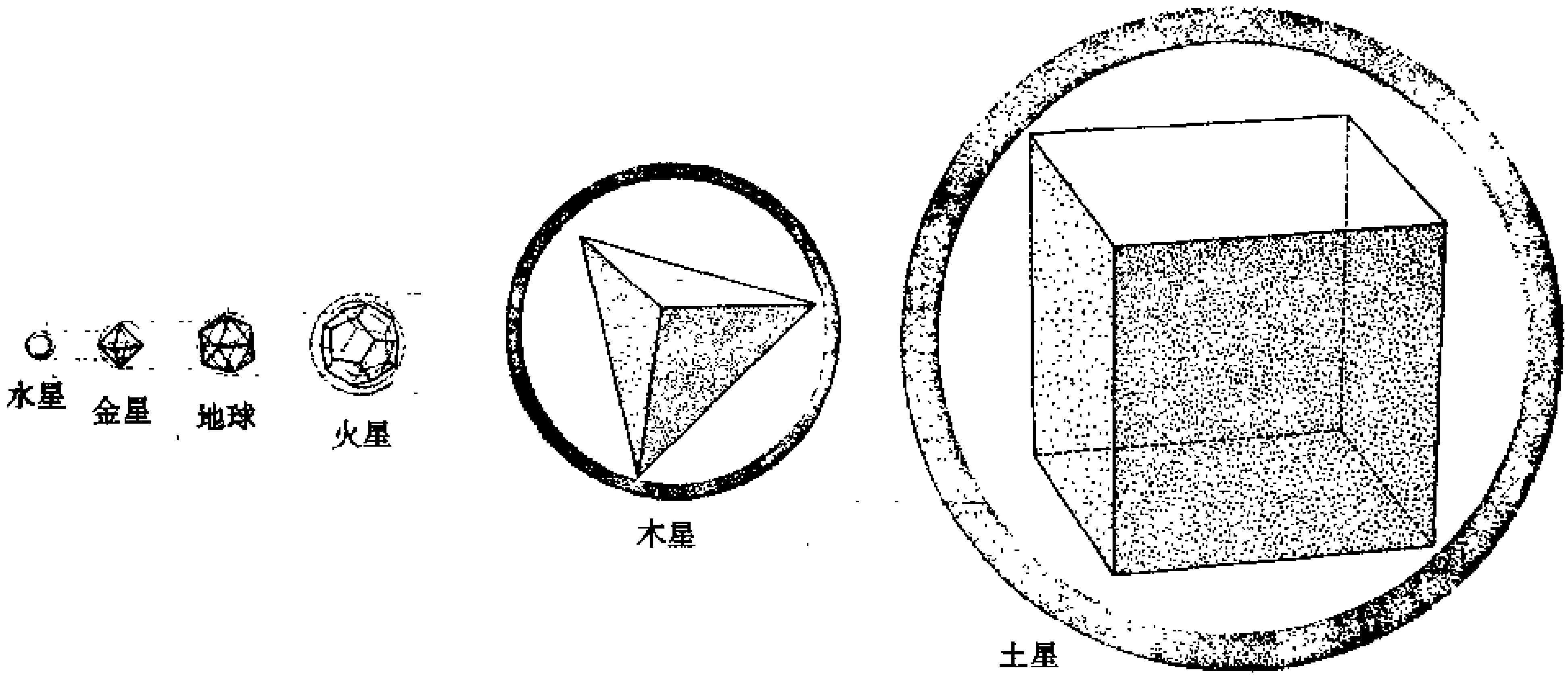
我们就满足于把哲学化的任务留给玻尔、威格纳这样的巨人,我们则在比较表面的层次



开普勒的太阳系模型发表于1596年，基于欧氏几何的五个"完全"多面体．行星轨道依次内接或外切于正八面体，正二十面体，正十二面体，正四面体和正立方体．这个模型是误导的数学模型的最重要的例子．尽管开普勒知道他的理论与当时最好的观测结果有差异，他仍认为这个模型是他的最大成就之一．

上探讨大自然以自娱吧．循此，我们不进一步讨论数学概念在物理学中卓越超群的终结的理由了．我愿听从哲学去讨论，而我自己则作为一种信仰，相信只有用数学语言才能理解大自然．我将讨论一些实在的问题，即数学如何作用于物理学的问题．数学为物理学家树立了怎样一种趣味和判断的标准？数学的哪些部门现在为新的物理学的理解给出了希望？作为结论，因为一个实例优于成堆的话语，我要概述一下群论在物理学中的作用，直到基本粒子的所谓"八重方式"的理论（见 Geoffrey F. Chew，Murray Gell-Mann，Arthur H. Rosenfeld，Strongly interacting particles，《科学的美国人》单行本，# 296）．这个理论是由盖尔曼（Murray Gell-Mann）和涅依曼（Yuval Ne'eman）独立地发展起来的，由于 Ω^- 粒子的发现，它得到了光辉的证实．

轨道之比	哥白尼的值	开普勒的模型	现代的值
水星最大值/金星最小值	.723	.707	.650
金星最大值/地球最小值	.794	.795	.741
地球最大值/火星最小值	.757	.795	.735
火星最大值/木星最小值	.333	.333	.337
木星最大值/土星最小值	.635	.577	.604



开普勒关于太阳系的多面体模型的放大图表示各行星轨道怎样位于一个球壳之中.球壳厚度表明行星到太阳的最大与最小距离之差.上方表格列了三组数值,表明每一个行星的最大轨道半径与其外层的下一个行星之最小轨道半径之比.第一行是开普勒得自哥白尼的观测值.第二行是得自开普勒多面体模型的理论值.第三行是当代测出的值.开普勒在水星情况下作了一些假,来照顾他的理论和哥白尼的值之间最显而易见的不符:虽然外面的四个多面体都被里面一个行星的壳层以通常的方式相切(壳层切于外面一个行星的多面体的面),正八面体却被自己的轨道球面以特殊的方式相接(壳层接触到正八面体的顶点*).

* 译注:原文误作正八面体的棱.

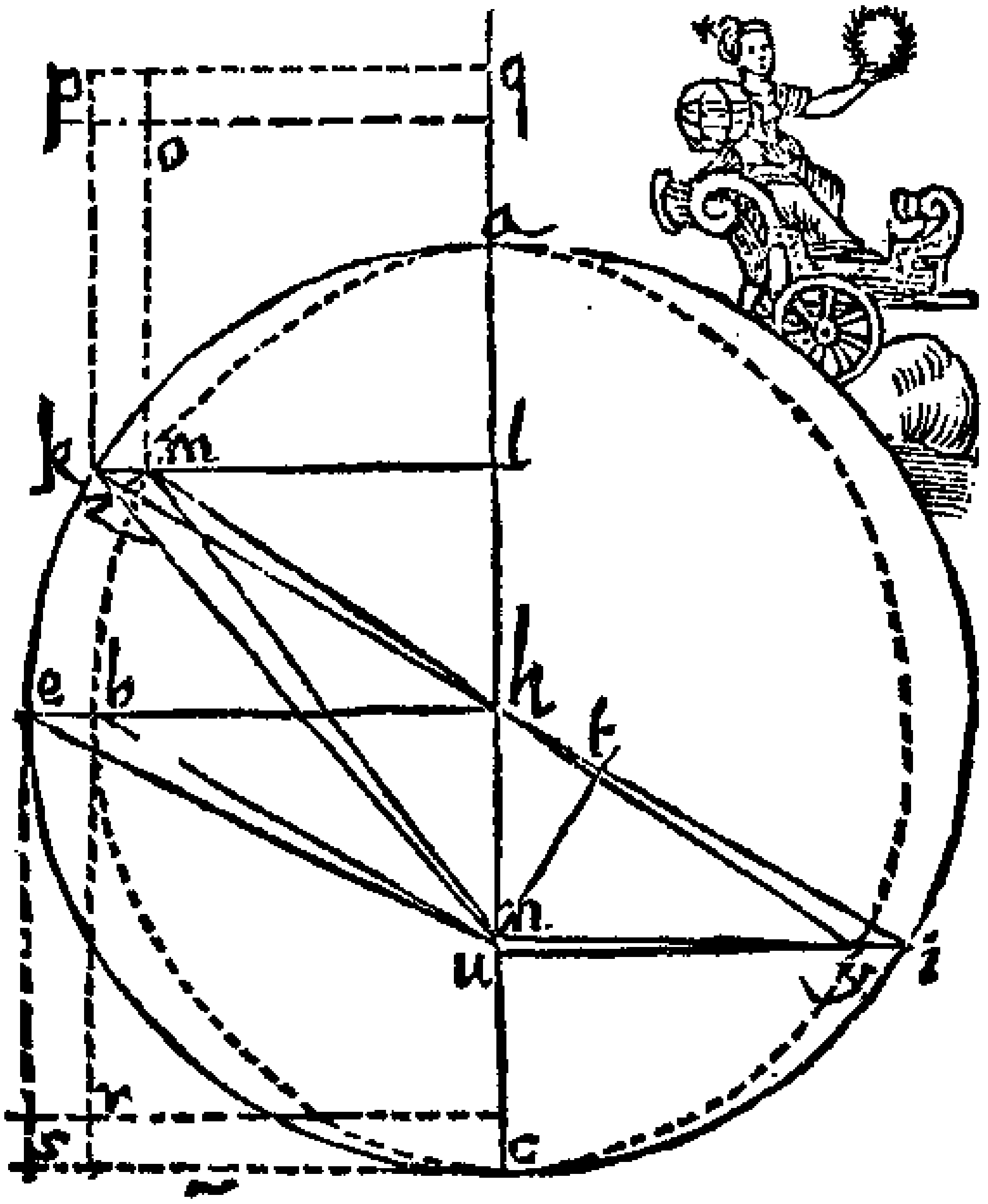
在进入今天的问题的细节之前，我还想用一些历史的实例说明数学的趣味和偏见对物理学的影响. 为了对非专业的听众讲解专业的事，考查过去的历史，在过去的问题与当前的问题中作一些类比，时常是有好处的. 应该要警告读者不要对历史的类比过于认真. 极少有活跃的科学家对科学史真有研究，而几乎没有一个人在自己的工作中是以历史类比为指导的. 在这一方面，科学家可以和政治家比较. 我们时代最伟大的政治家大概是列宁，他是在一个历史观之下成功地运作的，但这个历史观是完全受局限与歪曲的. 近代唯一重要的历史学家而又在政治上得高位的，是法国在 1840 年代的首相基佐（Francois Guizot），但他对历史的理解并未使他免为政治家的庸才. 一个好的历史学家太专注于过去，使他既不能成为创造性的政治领导人，也不能成为创造性的科学家. 至少在科学中是这样，一个人想要达到伟大，就应该遵从布莱克（William Blake，1757—1827，英国诗人）的劝告："驱驰战车，犁过死者的骨骼".

在物理学中成功地运用数学想像力最光辉的范例，仍是爱因斯坦的引力理论，也称为广义相对论. 爱因斯坦用非欧几何学为材料来建立起自己的理论. 非欧几何学是 19 世纪发明的关于弯曲空间的理论. 爱因斯坦采取了一个革命的步骤，把我们的物理时空与弯曲的非欧空间等同起来，于是物理的定律就变成了一种与经典的平直空间几何学全然不同的几何学的命题.（见本书第 16 章《几何学》.）这一切都是爱因斯坦以非常一般的论证和美学判断为基础完成的. 理论的观测检验是在理论基本完成以后才做的，它在理论创造的过程中没有起一点作用. 爱因斯坦本人对他的数学直觉的信念十分坚定，他从未对观测会出现什么结果而感到不安. 观测方面的肯定的结果对于说服其他物理学家相信他是正确的，当然起了决定作用.

物理理论建筑在数学的"在黑暗中跃进"基础上，广义相对论是一个最重要的例子. 如果没有一位有着爱因斯坦那样有特殊数学想像力的人，广义相对论可能一个世纪也不会被发现. 然而对于 20 世纪物理学的另一个主要成就量子力学就不能这样说了. 量子力学是由海森堡（Werner Heisenberg）和薛定谔（Erwin Schrödinger）从很不相同的观点出发创造出来的，它的完成是许多人的一项集体事业. 然而在量子力学中决定性的步骤仍然是思辨性的数学想像力，这在薛定谔的工作中看得最为清楚.

薛定谔的工作建筑在光线理论和粒子轨道理论的形式的数学相似性上，这个相似性在他之前 90 年就已被爱尔兰数学家哈密尔顿（William Rowan Hamilton）发现了. 薛定谔注意到光线理论只是光的波动理论的特殊的极限情况，光的波动理论是在哈密尔顿之后由麦克斯韦和赫兹建立的. 薛定谔是这样论证的：为什么不应该有一个粒子波的理论，它与粒子轨道理论的关系正如光的波动理论和光线理论的关系一样？这一个纯粹数学的论证引导他建立了粒子波的理论，现在称为量子力学. 这个理论立即就与关于原子动态的已知实验结果相对照，其互相之符合比之

广义相对论给人更深的印象. 在物理学中常发生这样的事,一个基于一般数学理论再加上少量实验事实的理论,能够预见多得不可计数的实验结果,其精确永不失误使人倍感神奇.



火星的椭圆轨道的发现是开普勒多年试图使圆形轨道满足第谷. 布喇(Tycho Brahe)的观测结果所得的大胜利. 他用这个图表明火星绕着 h 处的太阳在相等时间中扫过相等的面积.

广义相对论和量子力学是成功的故事表明数学想像力起的富于成果的、解放思想的作用. 不幸的是,还有另外一面. 数学直觉更多地是保守的而非革命的,起束缚作用而不是解放的作用. 物理科学最糟的历史挫折是亚里斯多德和托勒密明确地采用了地心天文学,假设所有的天体都在以地球为心的球面或圆周上运动. 亚里斯多德天文学使科学几乎完全沉睡了 1800 年(从公元前 250 年到公元 1550 年). 这样长时间的停滞当然有多方面的理由,但是必须承认,亚里斯多德天文学之所以广为流传来自一个误导的数学直觉,即只有球和圆才是美学上满意的.

托勒密用均轮和本轮来解释月球和行星的运动，这就是一层又一层的大小不同的圆，每一个圆在另一个圆上滚动．托勒密体系之所以使一切都荒芜了，是因为它在细节上都剪裁得与每个行星的观测到的运动相符，无法用观测来推倒它．在托勒密的时代（公元 150 年），希腊数学的蓬勃生机已经熄灭，没有新的数学观念来对抗欧几里得的球和圆对于科学想像力的束缚．既没有关于天象的新的观测，又没有新的数学来惊醒人们，1000 年的黑夜笼罩了一切．

开普勒在 1604 年发现了行星轨道是椭圆，最终地废除了本轮宇宙学，这并不是得助于任何偏爱椭圆运动的数学的预见．完全相反，他必须与自己的数学成见作血肉之搏，这种成见还不折不扣地是属于中世纪的．只在经过与种种本轮系统多年搏斗之后，他才克服了自己保守的趣味，接受了椭圆系统．在物理学的大思想家中，这种数学保守主义实在是通例而非个别．那些开创了思想新世纪的人，通常其本人仍是旧思想的囚徒．甚至牛顿，他发明了微积分．作为他在物理学和天文学上划时代发现的数学传达工具，但他宁愿用古代的几何语言来表述，他的《原理》一书通篇是用经典的希腊几何语言写成的．他的助手彭伯顿（Henry Pemberton），（他曾编辑了《原理》的第三版）就说过，牛顿经常表示自己对古希腊几何学家的仰慕，而且常为自己没有更紧地跟随他们而自责．经济学家凯因斯（John Maynard Keynes）勋爵，有收集和研究牛顿未发表手稿的爱好，这样概括了自己对牛顿的印象：

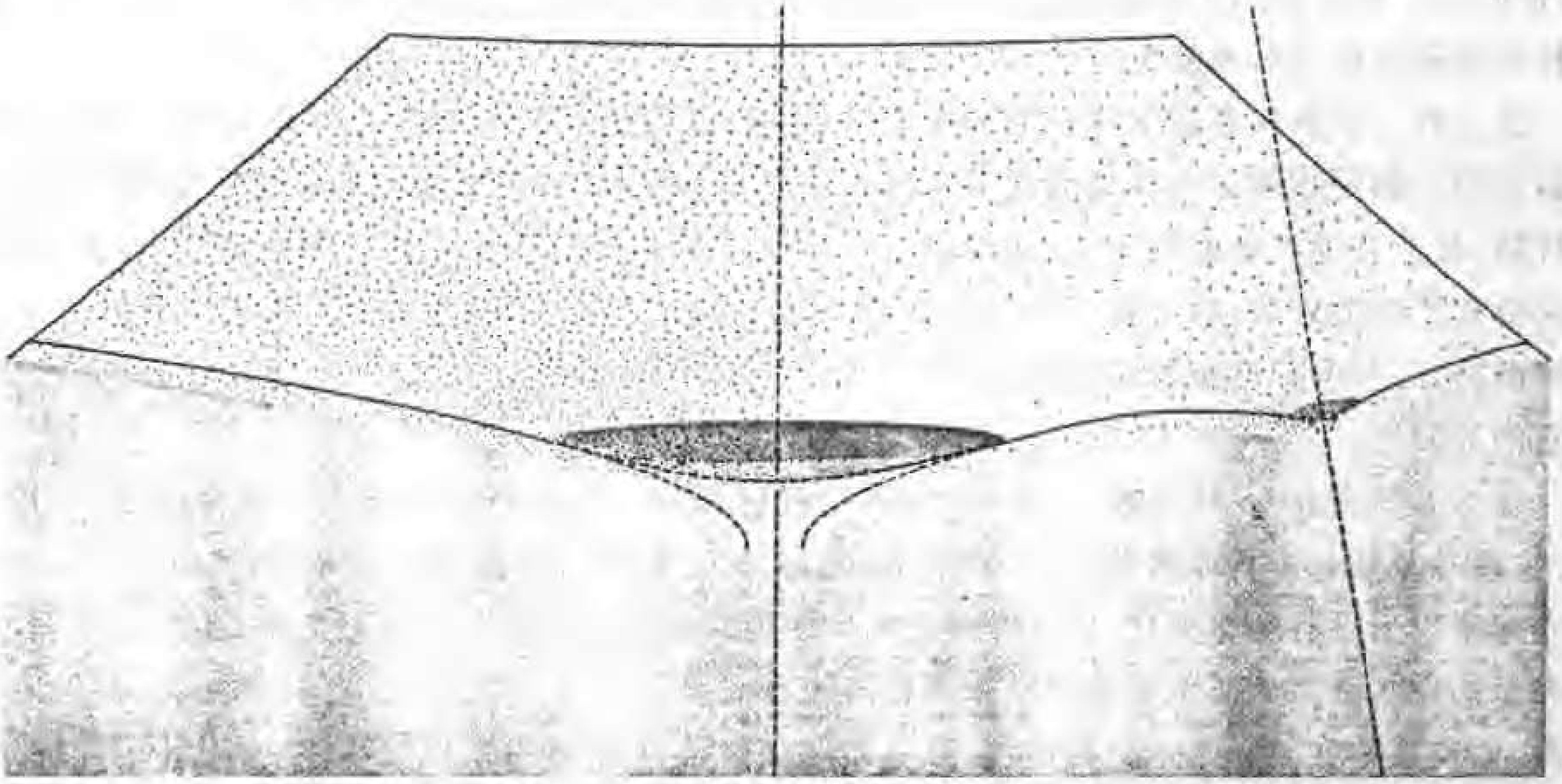
“在 18 世纪以及后来，牛顿常被设想为近代科学家之第一人，最伟大的人，一个理性主义者，一个教导我们用冷峻而不带感情的事物的因果去思考的人．我想任何一个看过他的手稿箱子的人都不会这样去看他，这些箱子是他在 1696 年最后离开剑桥时收拾留下的，虽然部分散失，却传到我们手中．牛顿不是理性时代的第一人，他是最后一个术士，最后一个巴比伦人，苏末人．他是最后一个伟大的思想家，他用造成我们几千年来的心智遗产的那些人同样的眼光来看待可见的世界与灵魂世界．艾萨克·牛顿，遗腹子，生于 1642 年的圣诞节，是最后一个东方贤人可以向他膜拜顶礼 * 的神童．”

牛顿的性格，他对炼金术与神的启示的著作的热衷，是一个吸引人的课题，但这与我们并不相干．我们关心的只是他的数学风格和趣味，他的数学对他的科学的效果．关于他对数学的态度，我们所知道的一切都与凯因斯的结论一致．毫无疑问，牛顿和开普勒一样，只在克服了深刻的数学成见以后才作出他的发现．

从这一些历史的例子，我们只能断言，数学直觉既是好的又是不好的，对于物理学的创造性

* 译注：圣经故事说，耶稣诞生时，有三位东方贤人按北斗星所指找到了圣婴，向他膜拜，尊他为救世主．

的工作，既是必不可少的，又是全然不能信赖的. 这种两重性来自数学的本性. 正如物理学家马赫(Ernst Mach)说过："数学的力量在于它避免了一切不必要的思考，在于它对心智活动的令人惊奇的节省". 物理学家用数学的材料来建造物理理论. 因为数学使他能想像到的，多于他能清楚地思考到的. 物理学家的艺术就是选择自己的材料，用来建造大自然的形象. 他只是模糊地、直观地知道这些材料是否适合他的目的. 在关于理论的设计完成之后，理性的批判和实验的检验将会表明这个理论在科学上是否靠得住. 在理论建造的过程中，数学直觉是不可少的. 因为"避免不必要的思考"就有了想像的自由；数学直觉也是危险的，因为为了理解科学上的许多情况，需要的是思考而不是避免思考.



空间的曲率爱因斯坦是在很一般的论证与美学判断的基础上建立起来的. 爱因斯坦用非欧几何做材料建立他的理论. 非欧几何是 19 世纪发明的关于弯曲空间的理论. 本图中用两个维度来表示二维曲面上的两个有质量的物体. 它们的引力性质用物体周围的空间之曲率来说明. 实际上，物理时空是四维的.

我现在来讨论物理学的现状. 我不是要对固体物理学、核波谱学等等方面的专家大不敬，我用"物理学"一词是作为高能物理学即基本粒子的研究的简称. 这个狭义的物理学当前的处境异常光明. 新一代的大型加速器过去五年内揭开了粒子的整整一个新世界. 细节之众多，结构之丰富是始未料及的. 我们必须对有关的物理学家和政治家深致谢意. 10 年前当他们还不知道会有

这么些东西时，就有信心和勇气领先建造了这些加速器. 他们的事业的成果就是，我们对于一个新世界有了大量的确切信息，堪与1910年时的原子世界相比. 正如1910年那时一样，现在我们还没有一个包罗广泛的理论. 从实验数据做出些什么来，理论家们现在有完全的自由.

在这种情况下，理论物理学家以自己的数学口味为准来选择研究的对象和方法. 理论家的首要问题现在还不是"我的理论是否管用?"而是"我现在所做的是不是一个理论?"做理论工作的手头材料只有片断的数学，如烹调手册式的计算规则，还有过去保留下来的少数一般原则. 这些东西怎么样的组合才称得上是理论，这是一个数学趣味问题.

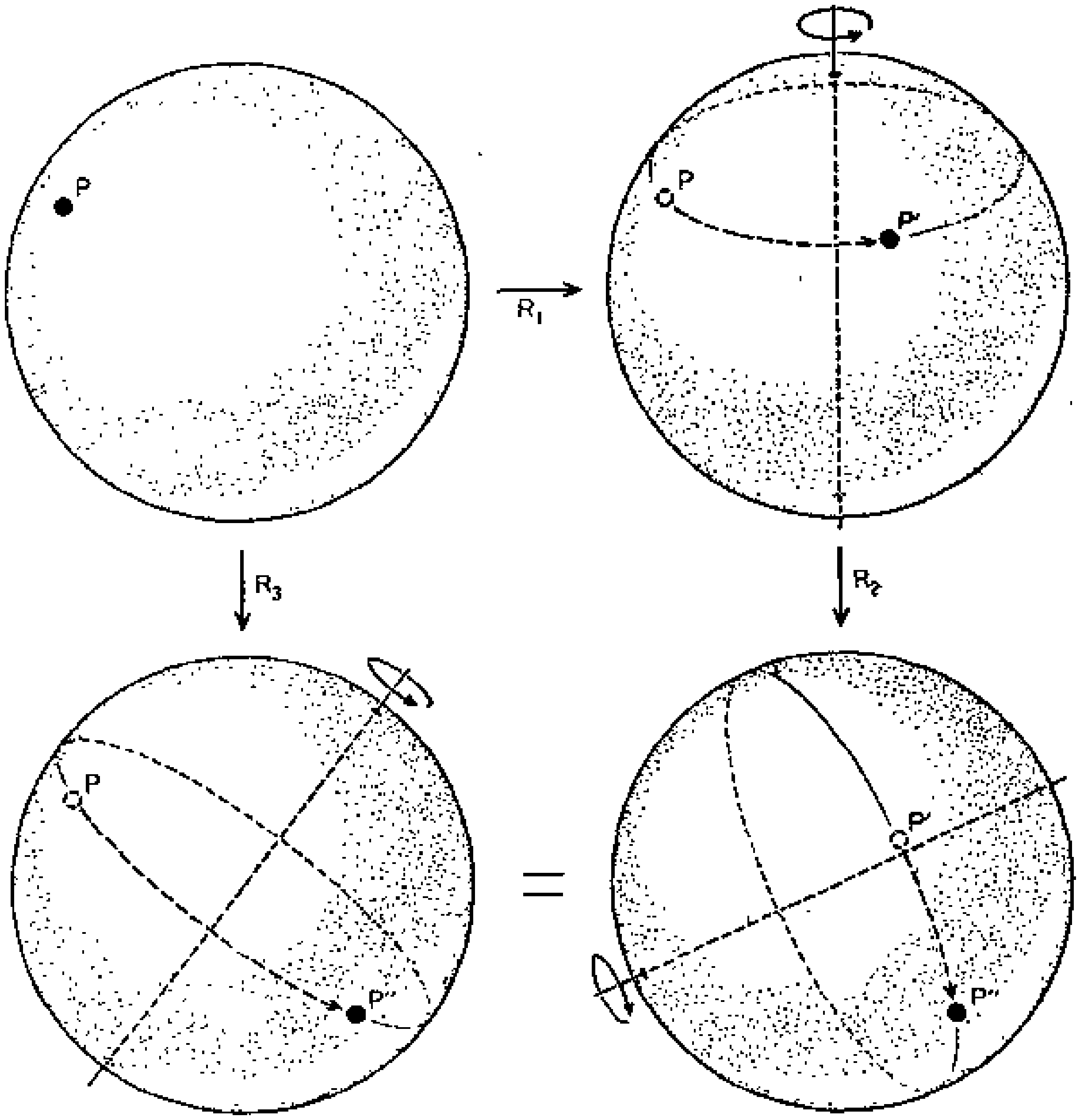
当代的理论主要有三种工作方法，即场论，S 矩阵理论和群论. 它们不是彼此互斥的. 至少是，依附这三种方法的人所做的事并不互相矛盾，虽然有时他们说的东西有一点矛盾. 很可能这三种观点最终都会对理解大自然作出贡献.

这三种方法不仅在数学材料的选择上，而且在怎样使用上都不相同. 场论偏爱数学的深度，相信深刻的物理理解必与深刻的数学应当相伴而行. 所以选择的数学材料是希尔伯特空间的算子代数，加上其他很难的数学，以便构成一个体现真实世界的某些显著特点的结构. 着重点在对理论要有严格的理解，而不在于与实验作详细的比较. 在这三个方法中，场论离实验最远，数学上最严格，心智的格调最野心勃勃，其物理意义也最模糊. 我本人对它最上瘾，所以最有资格指出它的局限性.

在 S 矩阵理论(S 代表德文 Streu，即英文散射 Scatter)中，有意地把数学材料选得越初等越好. 主要是复变量解析函数论. 这个理论自从19世纪早期由法国数学家柯西(August Cauchy)建立起来以后没有什么变化. S 矩阵理论大量使用实验数据以补数学基础之薄弱. S 矩阵理论专家典型的作法就是用其他实验的结果来计算或预见某一个实验的结果. 有时也从"最初的原理"出发，而与其他实验无关地进行预测，并且希望最终能从最初的原理推导出一切. S 矩阵理论的一个令人愉快而且耳目一新的特点是，在计算过程中可以改变"游戏"规则. 它现在所用的方法还只是过渡性的；我们并不是在应用一种明确干脆的理论，而是在边试边改的过程中创造一个理论. 在工作的每一步都与实验比较，就可以无情地除去不合适的概念而为真理留下生长的余地.

S 矩阵理论在解释实验，并给实验者以指导上取得的成功是很引人的. 我自己偏好场论是基于个人的口味，这口味若按历史的证据来判断，不能说是很可靠的. 我觉得 S 矩阵理论太简单，太少数学深度，我不能相信事实真的就是如此. 如果 S 矩阵理论能证明可以解释一切，我就会很失望：造物主竟然如此不够精微. 然而我也看到，造物主有一个习惯，他会以人们想不到的方式而十分精微.

现在我要比讨论前两个方法更详细一点讨论群论，即现代理论物理使用的第三种主要方



三维旋转群 O_3 定义为通常三维空间中绕固定点的旋转的集合. 若 R_1, R_2 是任意两个这样的旋转,它们的组合的结果可以用第三个旋转 R_3 表示出来.

法. 这里的数学材料主要是来自 20 世纪前$\frac{1}{4}$的一个有相当深度和力量的理论. "群"和"表示"是它的两个主要概念. 群就是运算的一个集合而有以下性质,即依次作此集合的两个运算必等价于此集合中的另一运算. 举例来说,三维旋转群 O_3 定义为通常三维空间中绕一固定点的旋转. 若 R_1 和 R_2 是两个这样的旋转,则依次作 R_1 和 R_2 其效果可以用第三个旋转 R_3 来重现. 群的表示就是一组数以及这些数的一个变换规律,使得群中的每一个运算都会生成这组数的一个特定的变换. 表示中讲的变换限于线性变换;即是说若有一特定的变换把 p 变成 p', q 变成 q', 则一定把 $p+q$ 变成 $p'+q'$. O_3 的表示的一个例子就是决定一点 P 在空间的位置的坐标(x,y,z)(见上图)当施行旋转 R 时, P 点变成 P', 其坐标为(x',y',z'), 这就是(x,y,z)的变换规则. O_3 的这个表示称为三元组表示,因为其中涉及三个数.

群论在物理中的巨大力量来自两件事.首先,量子力学的规律昭示,若一个物理对象有某种对称性,则必有保持该对称性的运算所成的群(G),而物体可能有的量子态恰好与 G 的表示对应.其次,所有性态良好的群都早由数学家一一列举,并且分类.不论要应用群的物理状况如何,这种列举和分类都完全一样.由这两个事实就有可能作出基本粒子的对称性的纯粹抽象的理论,它以群及其表示的抽象性质为依据,而不需要力学的或动力学的任何模型.

由具体的群到抽象群的这个至关重要的转变,最好是用例子来解释.一个在稀薄气体中漂浮的原子对于空间并没有其特殊偏爱的方向,所以有通常的旋转群 O_3 的对称性.O_3 的表示中有三元组表示.原子的所有具有一个单位自旋的态都属于这个表示,所以称为三元组态;这种态总是三个为一组同时出现,而且这三个态的能量都是相同的.现在加上一个磁场,破坏了旋转对称性;这三个等能量的态会稍稍分开,这三个态就可以在光谱计上看见为三条谱线.原子的态按其旋转对称性来分类,是使用具体的群论的一个标准的例子.

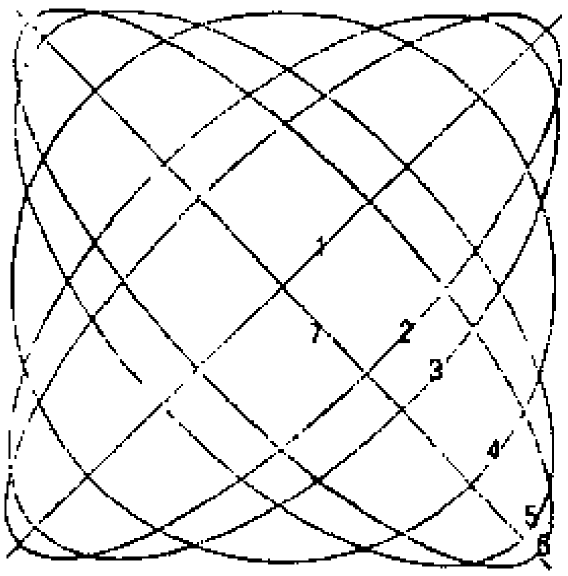
现在转到另一个例子.有一种基本粒子即 π 介子分成三类,一个荷正电,一个荷负电而一个是中性的.它们的质量和核相互作用都大体相同.我们来想像,它们是群 O_3' 的一个三元组表示,O_3' 与 O_3 有同样的抽象构造,但与通常的空间旋转毫无关系.我们只需要从抽象的群论就可以预见 π 介子的许多性质,完全不需要知道构成 O_3' 的运算的内在的性质.事实是,关于 π 介子性质的所有预测都是正确的.更引人注意的是,这些预测来由凯末尔(Nicolas Kemmer)在 1938 年在抽象群论的基础上作的,这是 π 介子发现前的九年.群 O_3'(稍加修改)在物理学中称为"同位旋群".

最后讲一下八重方式,它给了我们对最近发现的粒子作分类的钥匙.这种分类依据于一个群 U_3,它比 O_3 大些,也不太为人熟知.为使不搞数学的人也懂 U_3,我要引入一个力学模型,它与抽象群 U_3 的关系正如三维空间中的旋转与抽象群 O_3 的关系一样.无需说明,这个力学模型并不一定在现实世界中存在.它只是用来说明 U_3 的构造的.

考虑一个太阳系,其中的引力不与距离平方成反比而与距离成正比.设行星都很小,其相互作用可以略去不计.于是每个行星彼此独立地沿椭圆轨道运动,太阳则位于椭圆中心.这些轨道的特点是,它们的周期都相同,外面的行星运动比里面的行星更快.我们称每个轨道的周期为一"年",所以每个行星的位置都以一年为期周而复始.

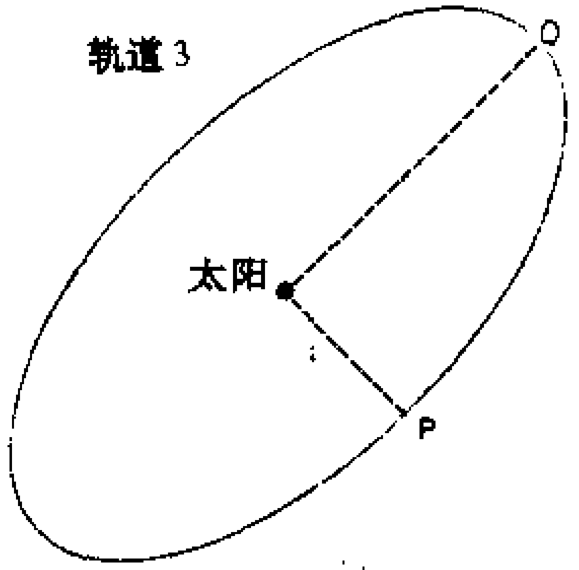
行星的运动可以用空间中两个点(P,Q)来表示:P 是行星现在的位置,Q 是它三个月后的位置.若在此轨道上还有另一个行星走在第一个行星前三个月,则它应该用(Q,$-P$)来表示,$-P$ 就是 P 在轨道上的对径点.这些行星每一个总能量都是(OP^2+OQ^2),即点 P,Q 到 O 点(太阳)距离之平方和.群 U_3(若用这个特殊模型来展示)就是满足以下三个限制的行星运动之变换的集合.这些变换所要适合的限制是:(1)变换是线性的;(2)变换之下运动的总能量不变;(3)如果有两

a



轨道	1	2	3	4	5	6	7
p_1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	3	$\sqrt{10}$
q_2	$\sqrt{10}$	3	$\sqrt{8}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	1	0

b



轨道 3: $p_1=\sqrt{2}, q_2=\sqrt{8}$

$p_2=q_1=p_3=q_3=0$

轨道 3 的总能量 $=[p_1^2+q_2^2]=[2+8]=10$

c. 八重方式轨道的表示

$$a_{12}=p_1q_2-p_2q_1$$
$$a_{23}=p_2q_3-p_3q_2=0$$
$$a_{31}=p_3q_1-p_1q_3=0$$
$$s_{11}=p_1^2+q_1^2$$
$$s_{22}=p_2^2+q_2^2$$
$$S_{33}=p_3^2+q_3^2=0$$
$$S_{12}=p_1p_2+q_1q_2=0$$
$$S_{23}=p_2p_3+q_2q_3=0$$
$$S_{31}=p_3p_1+q_3q_1=0$$

d. S_{11}, a_{12}, S_{22} 之值

轨道	1	2	3	4	5	6	7
S_{11}	0	1	2	5	8	9	10
a_{12}	0	3	4	5	4	3	0
S_{22}	10	9	8	5	2	1	0

所有轨道的总能量 $=S_{11}+S_{22}=10$

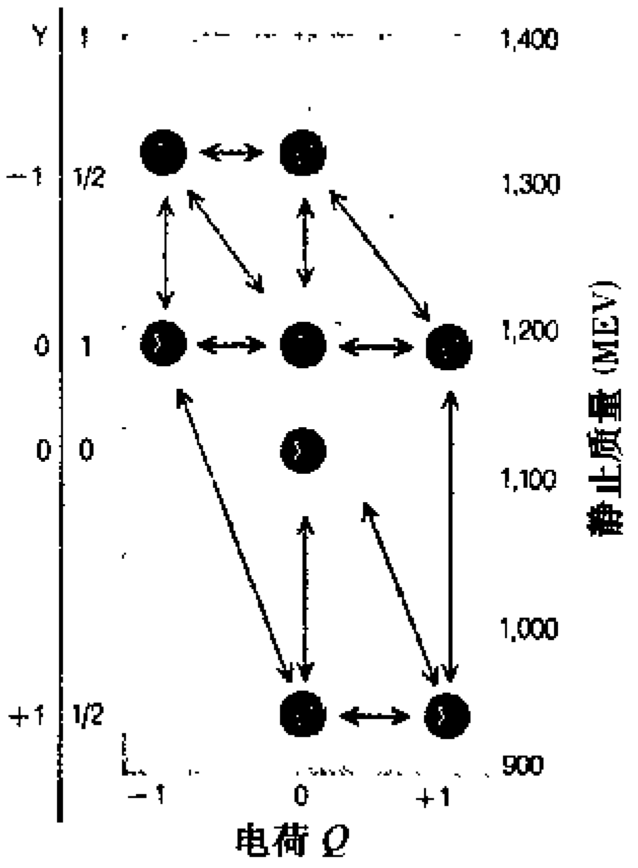
八重方式的模型与抽象群 SU_3 的关系正如三维空间的旋转(见 415 页插图)与抽象群 O_3 的关系一样. 模型(a)画出 7 个可以用 SU_3 的变换而互相转变的轨道,见正文的讨论. 恰好有 7 个轨道并无特别的含意;可以再指定任意多个轨道以满足这个特殊模型的需要. (b)中单独画出轨道 3 以表明行星轨道怎样用值为 p_1 和 q_2 的两点 P 和 Q 决定. 但因这个模型中选择坐标轴的特殊方式,p_2 和 q_1 为 0,因为所有轨道都在同一平面上,所以 p_3, q_3 也是 0. 所有轨道有相同总能量($p_1^2+q_2^2=10$),但角动量不同,用 a_{12} 表示. 特别是两条直线轨道(1 和 7)角动量为 0,而圆形轨道(4)有最大角动量. 按八重方式,这 7 条轨道可各用一组 9 个数来表示,列在(c)中. 因为 p_2, p_3, q_1, q_3 都是 0,所以 9 个数中有 6 个显然为 0. 余下的只有 3 个分量 S_{11}, a_{12}, S_{22}. 如果添上 p_1, p_2 的适当值. 这三个分量的值见(d). 当施以 SU_3 对称性运算时,这些值可以互相转变. 其所以可能,部分地是因为所有轨道的总能量都是相同的: $S_{11}+S_{22}=10$.

个或更多的行星在同一个轨道上，若变换将其中之一变到新轨道上，则必把其他几个也变到同一新轨道上.

如果只加上前两个限制，就得到所有保持(OP^2+OQ^2)不变的线性变换之群. 这只是6维旋转群(P,Q各有三个维度). 对U_3的第三个限制可以用一个更简明但是等价的形式表述：若一变换把运动(P,Q)变成(R,S)，则必把$(Q,-P)$变为$(S,-R)$.

容易看到，U_3中含有变换的两个特殊的类别. 第一，考虑同时对P和Q作通常的旋转. 它们显然适合这三个限制. 所以O_3是U_3的子群. 第二，考虑时间平移变换，即把一个行星变到它在一定时间之前或之后的位置. 时间平移也属于U_3而且成为U_3的另一子群T.

为了物理学中的应用，把它化为较小的群SU_3更为方便(我写的是SU_3，而专业人士却称之为SU_3/Z_3). 只要在U_3中忘记时间就得到SU_3. 对于SU_3，同一轨道上的所有运动都认为是相同的，不管它是在何时达到何处. U_3是把一个行星运动变为某一特定时刻的另一行星运动，SU_3则把一个轨道变为另一个轨道，而不管时间. 用数学语言来说，SU_3就是群U_3除以时间平移子群T. SU_3的表示正是U_3的与时间无关的表示.



八元超族就是八重方式建议的第一个分组方式. 它含有八个最熟悉的重子：中子(N^0)和质子(N^+)——称为核子二元组，(Λ)一元组，原来的(Σ)三元组和原来的(Ξ)二元组. Σ三元组和Ξ二元组出现在包含Ω^-的10元超族中(见417页)是具有相同y值和I值的较重的粒子.

现在来寻找SU_3的简单的表示. 行星的运动(P,Q)由P和Q的六个坐标$(p_1,p_2,p_3,q_1,q_2,q_3)$决定. 这些坐标本身已是$U_3$的一个表示，但是因为它们依赖于时间，所以不是$SU_3$的表示. 最简的与时间无关的量是把$p$和$q$乘起来再组合起来(其理由我们不说了)，见前页之图. 这种量共有九个而且恰好是九个. 其中三个是角动量分量记作a_{12},a_{23}与a_{31}；另外六个是另一种分量而与系统的总能量有关：S_{11},S_{22},S_{33},S_{12},S_{23},S_{31}. (下标表示在定义这些量时用了哪些p，哪些q，例如$a_{12}=p_1q_2-p_2q_1$,$S_{12}=p_1q_2+p_2q_1$).

因为SU_3的表示涉及九个量，所以说它是九维的. 然而和$S_{11}+S_{22}+S_{33}$是系统的总能量，所以在U_3中的任一个变换下是不变的. 当三个量之和为常数时，显然只有两个是独立的，只要任意给出两个，第三个就一定可以求出. S_{11},S_{22}和s_{33}可以用多种方式组合成两个独

立的量，但由于技术上的原因，通常是这样组合的：其中之一是 $S_{11}-S_{22}$，另一个是 $S_{33}-\frac{1}{2}(S_{11}+S_{22})$. 结果 S 的分量中只有五个是独立的而不是六个，再加上 a 的三个分量，总共有八个量，它们在 U_3 之下仍变为这八个量. 这八个量是与时间无关的，所以给出 SU_3 的八维表示. 这个表示是存在的最简单的，就是著名的八重方式.

最后，让我们想像大自然中的 SU_3 对称性是不完全的. 例如想一下有“三个方向”(即坐标取值 p_3, q_3 的方向)与其他两个方向多少有些不同. 在我们虚拟的太阳系中，只有当轨道全在同一个平面中时对称性会保持，而若旋转变换把轨道带离这个平面时，对称性就不会保持. 这时对称群 U_3 将被代之以其子群 U_2，它由 U_3 中保持这三个方向不变的变换构成. 在 U_2 的作用之下，八重方式不再是统一的表示. 它的八个分量按以下方式分成一些子集：

$$S_{33}-\frac{1}{2}(S_{11}+S_{22}) \qquad \text{(一个一元组)}$$

$$\left.\begin{matrix} S_{23}, S_{31} \\ a_{23}, a_{31} \end{matrix}\right\} \qquad \text{(两个二元组)}$$

$$(S_{11}-S_{22}), S_{12}, a_{12} \qquad \text{(一个三元组)}$$

每一个子集都是 U_2 的一个表示. 换言之，由一元组表示所定义的变换是关于整个集合的唯一子集的：只含一个元的子集. 两个二元组的每一个都表示一个稍大的子集：含两个元的子集. 同样的，三元组子集有三个元.

现在回到实际的物理世界，把这个八元结构与八个原来的重子比较一下，这八个重子就是重“基本”粒子中最为人熟知的，即(Λ)一元组，质子——中子(即核子)二元组，Ξ 二元组和 Σ 三元组. 这里精确相符.

SU_3 的其他表示中有 10 个，27 个或更多的元. 盖尔曼指出，含 10 个元的集合之对称性，若对已知的九个重子再补上一个未知的一元组后，就可以满足. 这个尚未找到的一元组，他事先就称之为 Ω^- 重子. 这 10 个元中已知的有一个四元组 Δ，一个三元组 Σ，还有另一个 Ξ 二元组. 预见到的一元组是今年二月 * 在布鲁克哈汶国立实验室的气泡室照片中发现的.

现在有大量的证据表明 SU_3 的构造的抽象的对称性在大自然中确实存在并且控制了强相互作用粒子的性态. 对称性是不完全的，由于相对弱的摄动而破损，把群 SU_3 化为其子群 U_2. 遗留下来的 U_2 对称性与前面讨论过的抽象的同位旋对称基本一致. 由于这些简单而令人不得不信的群论的思想，我们关于强相互作用粒子的整个图像已经从混沌变得相当有序了.

---

* 译注：是在 1964 年 1 月 31 日由 N. Samios 和 J. Leitner 发现.

铌的谱线（下）当加上一个磁场时就分裂为三个分量，破坏了原子的旋转对称性. 可以看到两个分量与磁场垂直（中），第三个则与磁场平行（上）. 谱线的三元组对应于原子的各有一个单位自旋的三个态；这些态总是三个一组出现的，而每一个态都有相同能量. 按旋转对称对原子的态分类是应用群论的一例. 这些谱线图是在麻省理工学院光谱实验室中作的.

在我已讨论过的三个理论方法中，群论在许多方面是最令人满意的. 与 S 矩阵理论不同，它既漂亮又有无懈可击的严格数学基础；与场论不同，它有清楚而可靠的实验支持. 那么还缺少什么呢？问题在于，群论留下了那么多我们想说明的问题未得说明. 它以一种非常漂亮的方式只把大自然的一些侧面分离出来，而那些侧面只需抽象对称性即可理解. 对于解释生活中比较杂乱的事，对于粒子的寿命和相互作用的强度的数值，即对有待解释的实验的定量数据的主体，它没有给出多少得到解释的希望. 抽象化似乎走得太远，以致实际世界的许多本质的、具体的特性都没有考虑. 总起来说，群论之所以成功，正因为它的目标比较有限. 它没有打算解释一切，看来它也不像会成为物理世界的完全的包罗一切的理论.

在理论物理中，我们有了三种工作方法：场论，S 矩阵理论和群论. 如果我们说理论是指类似于过去那些伟大理论的东西，例如广义相对论或量子力学，则它们没有一个真正称得上是理论. 它们太模糊，太片面，太零碎. 这当然只是我的判断. 即令它们达到了自己宣布的目的，它们也没有满足我关于理论应该是什么样的审美感觉. 我很想说它们是“在无知的深渊的冰缝上用雪造的桥”，这样来表达我的不满足. 这句绝妙的话对于刻画一个人不赞成的理论概念是很有用的. 然而，最好是记住，第一个说这句话的是固执的数量生物学家皮尔逊（Karl Pearson），他用这句话来抨击孟德尔（Gregor Mendel）的遗传定律.

33.

引力理论的推广

阿尔伯特·爱因斯坦(Albert Einstein),1950 年 4 月号

《科学美国人》的编者们曾经要求我就新近发表的我的最近的研究写篇文章. 这项研究是关于场的物理学的基础的数学研究.

有些读者会感到困惑:我们不是在中学里就学过了物理学的基础吗? 答案既可以为"是"也可以为"否",看如何解释而定. 我们已经熟悉了一些概念和一般的关系,使我们能理解范围十分广泛的经验,使得能用数学来处理它们. 在某种意义下这些概念和关系甚至可能是终结的. 例如光的折射定律是这样,以压强、容积、温度、热和功这些概念为基础的经典热力学是这样,永动机不存在这一假设也是这样.

那么,是什么迫使我们去搞出一个又一个理论呢? 搞出这些理论究竟是为了什么呢? 后一个问题的答案干脆就是:因为我们爱好"理解". 理解就是用逻辑过程把各种现象归结为已知的或者(看起来是)显然的东西. 如果我们遇到一些现存理论不能"解释"的新事实,新理论就是首先需要的. 但是建立新理论的这个动机还可以说是肤浅不足道的,是外加的. 还有一个重要性并不稍次的更深层的动机,这就是对理论的各种前提作为一个整体力求其统一与简化(这就是看作一种逻辑原理的马赫(E. Mach)的思维经济原则).

存在一种对于理解的激情,正如同存在一种对于音乐的激情. 这种激情在孩子们身上很普遍,但是对于大多数人,这种激情后来就消失了. 没有这种激情,就既不会有数学也不会有自然科学. 这种追求理解的激情一再造成一种幻觉:人可以完全不需要经验的基础,仅仅用纯粹的思维,即形而上学,就可以理性地理解客观世界. 我相信每一个真正的理论家都是一种驯化了的形而上学家,不论他怎样幻想自己是一个"实证主义者". 形而上学家相信,逻辑上简单的也就是真

实的. 驯化了的形而上学家则相信，并非一切逻辑上简单的东西都会体现于经验的真实之中，但是感官经验的整体可以在一个概念系统的基础上被"理解"，这个系统则建立在伟大的简单性这一前提之上. 怀疑论者会说这是一种"神示". 就承认是这样吧，但是这个神示在令人吃惊的程度上正是来自科学的发展.

原子论的兴起是一个好例子，留基帕斯(Leucipas)怎么会得出这个大胆的观念呢？当水结成冰——一种看起来与水完全不同的东西——为什么解冻以后又会变成与原来的水无法区别的东西呢？留基帕斯感到迷惑而去寻找一个"解释"，他被引到一个结论，即在这些转化中，事物的"质"并没有改变. 很可能这种事物是由许多不会变化的粒子组成的，只是它们的空间排列改变了. 那些一再以几乎完全的质出现的东西难道不也是这样吗？

原子论的思想在西方思想的长期蛰伏中从没有完全消亡. 留基帕斯以后的两千年，伯努利*(Bernoulli)对于气体为什么会对容器壁有压力感到不解. 这可以用气体的各部分在牛顿力学意义下的互相排斥来"解释"吗？这个假设是荒谬的，因为如果一切条件都不变，气体的压力依赖于温度. 假设牛顿的相互作用力依赖于温度是违反牛顿力学的精神的. 伯努利知道原子论，他就会倾向于得出如下结论：是气体的原子(或分子)与容器壁碰撞，这样产生了压力. 说到底，必须假设原子在运动，不然怎么能考虑到气体的温度变化呢？

简单的力学考虑表明压强只依赖于粒子的动能及其空间密度. 这本会把那时的物理学家引到热是原子的随机运动的结论. 如果他们当时就足够认真地对待这种想法，做到他们本应做到的那样认真考虑，热的理论，特别是热与功的等价的发现会大大推进.

举这个例子是想说明两点：一方面，理论概念(这里的原子论)的产生并不是与经验分开无关的；另一方面，它也不能由经验用纯粹逻辑导出. 它是由一种创造活动产生的. 一旦得到了一个理论观念，就要紧紧抓住它，一直到得出站不住脚的结论时，才放弃它.

至于我最近的工作，我觉得在一大群对科学有兴趣的读者面前详细讲解并不恰当. 只有那些已为经验充分证实了的理论才适于这样做. 迄今为止，我的理论只因其前提的简单性以及它与已知的结果(即纯引力场定律)的紧密联系才使它可以讲一讲. 然而，对于一大群读者，知道一点引导到一种极具思辩性质的探索的思路，也是有意思的. 此外，还可以表明，这里会遇到什么类型的困难，在什么意义下又克服了它们.

在牛顿物理学中，对物体作理论描述是基于质点或粒子这个基本的理论概念. 所以，物质是被先验地看作不连续的. 这就必然要把质点之间的相互作用看成一种"超距作用". 因为这种概

* 译注：这是丹尼尔·伯努利(Daniell Bernoulli，1700—1782).

念与日常经验大相径庭，很自然地，牛顿的同时代人——其实还有牛顿自己——觉得难于接受. 然而，由于牛顿体系近乎奇迹的成功，后代的物理学家也就习惯于超距作用了. 很长一段时期里，怀疑也就被淹没了.

但是在 19 世纪后半叶当电动力学定律为人所知之后，就看出这些定律难以满意地融合于牛顿体系中. 开一个发人深省的玩笑：如果法拉第受过正规的大学教育，他能发现电磁感应定律吗？他不太受传统思维方式的束缚，感到如果把“场”作为物理实在的独立的元素，有助于把经验事实协调起来. 是麦克斯韦(Clerk Maxwell)才完全理解场的概念的价值. 他作出了一个基本的发现，即电动力学的定律的自然的表述是电场和磁场的微分方程. 由这些方程可以导出波的存在，而这种波的性质和当时已知的光的性质相应.

把光学纳入电磁理论是力求达到物理学基础的统一的最大胜利之一. 麦克斯韦早在赫兹(Hertz)用实验证实它的多年以前就纯粹用理论论证完成它了. 新的洞察使他能够丢开超距作用的假设，至少是在电磁现象领域里. 居于物体之间的场成为它们的电磁相互作用的唯一载体，场的性态完全由微分方程所表示的邻接过程所决定.

现在产生了一个问题：既然场在真空中也存在，应该把场看成某种“载体”的状态呢，还是对它赋以独立的存在性而不必再化约为别的东西？换言之，有没有承载着场的“以太”，当它承载着光波时，就把以太看作是处于某种振荡态？

这个问题有一个自然的答案：既然不能抛开场的概念，最好是不要再引入外加的假设具有某种性质的载体了. 然而，首先认识到场的概念不可少的探路者们仍然太深地为机械观的传统思维所浸染；所以难于毫不犹疑地接受这个简单的观点. 但在以后几十年的过程中这个观点不知不觉地占了上风.

引入场作为基本的概念使得理论整体不协调. 麦克斯韦理论虽然充分地描述了荷电粒子的相互作用，却不能解释电荷密度的性态，就是说它没有对粒子本身给出一个理论. 它们必须在旧理论的基础上当成质点来处理. 把连续的场的思想与空间中不连续的质点的思想合在一起，显得不协调. 一个协调的场论要求它的一切要素不仅对于时间连续，而且在空间中，在空间的一切点处都连续. 所以，质点不能是场论的基本的概念. 甚至不必提及麦克斯韦的电动力学不能包括引力这件事，也不能把它看作一个完整的理论.

如果对空间和时间坐标作一个特殊的线性变换，即洛伦茨(A. Lorentz)变换，真空中的麦克斯韦方程的形状不变(这称为对洛伦茨变换的协变性). 当然对于多个这个变换复合而成的变换，也有协变性存；这一点称为洛伦茨变换的群性质.

由麦克斯韦方程可以引导出“洛伦茨群”，但由洛伦茨群却导不出麦克斯韦方程. 洛伦茨群

的定义其实与麦克斯韦方程无关，它就是保持某个特殊的速度值——光速——不变的线性变换群. 当从一个“惯性系”转到另一个对之作匀速运动的惯性系时总是有这种变换成立. 这个变换群最引人注目新性质就在于它把使得空间中不同点处发生的事件的同时性不再有绝对性了. 由于此，就应该希望物理学中的所有方程都在洛伦茨变换下协变(这就是狭义相对论). 情况就是，麦克斯韦方程引导到一种助探性的原理，其适用范围远远超出麦克斯韦方程可应用的范围，甚至达到其不一定成立的地方.

狭义相对论在有一点上与牛顿力学是相同的：这两个理论的定律都假设只对某些坐标系成立：即是“惯性系”. 惯性系就是在这样一种运动状态下的系统，其中“不受力”的质点对于坐标系没有加速度. 但是如果没有一种独立的手段来认定确实没有力存在，这个定义就是空的. 但是，若把引力看成一种场，这种确认手段是不存在的.

设 A 是对某“惯性系”I 有匀加速的系统，对 I 没有加速度的质点，对 A 却有加速度，而且所有这些质点的加速度大小方向都一样. 这些质点的性态就好像 A 中有一个引力场一样，因为引力场的最根本特点就是，场中一切物体，不论其特性如何，所得到的加速度都是一样的. 没有理由排除以下的可能性，即把这种性态解释为“真正的”引力场的效应(这就是等效原理). 这个解释蕴含着 A 也是一个“惯性系”，虽然它对另一个惯性系 I 有加速度.（这里的论证有一个要害之处，即虽然找不到产生引力场的物质，引入引力场仍被认为是合理的. 所以，这种论证对于牛顿是没有说服力的.）这样一来，惯性系的概念，惯性定律乃至运动定律都被剥夺了其具体含意——不仅在经典力学，而且在狭义相对论中都是这样. 此外，按照这样的思路，相对于系统 A 无法用相同的时钟在不同点上确定时间，甚至坐标之差一般也都失去了直接的物理含意. 考虑到这些困难，说到头也就不该再坚守惯性系的概念，而消去了解释引力现象的根本特性的企图，这一特性表现在牛顿体系中就是惯性质量与引力质量的等效性. 相信大自然是可以理解的人必须回答：不该.

这就是等效原理的要点：想要顾及到在一个理论中惯性质量和引力质量二者相等，就必须承认四个坐标的非线性变换. 就是说，洛伦茨群以及“可容许的”坐标系之集合，都必须推广.

可以用什么样的坐标变换群来代替洛伦茨变换群呢？数学提示了一个答案，它是以高斯(Gauss)和黎曼(Riemann)的奠基性的研究为基础的；适当的代替品是坐标的所有连续(解析)变换之群. 在这种变换下，唯一不变的是这样一个事实：相邻的点坐标几乎相同；坐标系只表示时空中的点的拓扑次序(四维性也算是拓扑次序). 表现自然规律的方程必须对坐标的一切连续变换为协变. 这就是广义相对论的原理.

上面描述的过程克服了力学基础中的一个缺陷，其实牛顿已经注意到了这一点，后来莱布

尼兹(Leibniz)以及两个世纪后的马赫都批评过:我们说,惯性就是抵抗加速度的性质,但是对什么东西的加速度呢?在经典力学的框架里只能回答说:相对于空间.这是空间的一个物理性质:它可以作用于物体,物体不能作用于它.也许这就是牛顿的论断 spatium est absolutum(空间是绝对的)的深层的含意吧!但是这个想法却使一些人困惑不解,特别是莱布尼兹,他不认为空间是独立的存在,而只把它看成"事物"的一种性质(物理客体的邻接性).要是他的这个有根据的怀疑当时就占了上风,对于物理学却不一定是好事,因为想要跟随这个思想所必须的经验和理论基础在17世纪都还不具备.

按照广义相对论,没有物理内容的空间概念是不存在的.空间的物理实在性由一个场来表示,这个场的分量是四个自变量——即空间和时间坐标——的连续函数.正是这种特定的依赖性表示了物理实在的时空特性.

既然广义相对论蕴含着物理实在用连续场来表示,粒子或质点的概念就不能起基本的作用,运动的概念也不行.粒子只能看成是空间中的一个区域,其中场强或能量密度特别高.

一个相对性的理论必须回答两个问题:1) 场的数学特性是什么?2) 什么方程在此场中成立?

关于第一个问题:从数学观点看,场在本质上由其分量在坐标变换时如何变换来刻画.关于第二个问题:方程必须在充分的程度上决定场,而且还要满足广义相对论的公设.这个要求能否满足要看如何选择场的类型.

要想在这么抽象的纲领的基础上去理解经验数据之间的关系,初看几乎是无望的.这个程序事实上相当于提出以下的问题:对于最简单的对象(场),可以要求哪些最简单的性质,而同时保持广义相对论的原理成立?从形式逻辑的观点看来,这个问题的双重性是不幸的,还不说"简单"这个概念的模糊性.此外,从物理观点看来,没有什么能够保证,逻辑上"简单"的理论就应该为"真".

然而,每一个理论都是思辩的.当一个理论的基本概念比较"接近于经验"时(例如力、压强、质量等等),就不太容易注意到它的思辨性质.然而,如果一个理论到了这样的地步,要想从它的前提得出可以与观察相对照的结论,就需要经过复杂的逻辑过程.这时,人人都会意识到理论的思辩本性了.在这种情况下,一个人如果没有作认识论分析的经验,在他们熟悉的领域中,又没有注意到理论思维的性质,那他就不可免地会感到一种反感.

另一方面,又必须承认,如果一个理论的基本概念和基础前提"接近于经验",它就有一个重要的优势,对这个理论有更大的信任感肯定是有道理的.误入歧途的危险会小一些,特别是因为用经验来否证这种理论,费时费力都要小得多.然而,当我们的知识的深度增加时,则在寻求物

理学理论基础的逻辑简单性和一致性时，就越来越要放弃这种优势了. 必须承认，为了达到逻辑简单性而"接近于经验"这一点上，广义相对论比过去的物理理论走得更远. 对于引力理论已经是这样，对它的新的推广就更其如此了，这种推广是企图囊括整个场的性质. 在这个推广的理论中，从理论的前提导出可以与经验数据对照的结论是太难了，迄今还没有得到结果. 迄今，对这个理论有利的是它的逻辑简单性和它的"刚性". 这里的刚性是指它要么为真，要么为伪，而且不能修正.

妨碍相对论的发展的最大的内在困难在于其问题的双重性. 我们所问的两个问题就表明了这一点. 由于这种双重性，理论的发展分成了两步，其间相隔了很长的时间. 第一步是引力理论，其基础就是上面讨论过的等效原则，而且也基于以下的考虑：按特殊相对论，光有固定的传播速度. 若真空中的光线在时间 x_4 时由三维坐标为 x_1，x_2 和 x_3 的点发出，它以球面波形式发出而在时刻 x_4+dx_4 时达到相邻点（x_1+dx_1，x_2+dx_2，x_3+dx_3）. 引入光速 c 以后我们可得出表达式

$$\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}=cdx_4.$$

它也可以写为

$$dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2-c^2dx_4^2=0.$$

这个表达式表示了相邻的四维时空点之间的关系. 若限用狭义相对论中的坐标变换，则它对一切惯性系均成立. 然而，如果按照广义相对性原理许可任意的连续坐标变换，则它的形状会变化. 这时这个关系式将取更为一般的形状

$$\sum_{i,k}g_{ik}dx_idx_k = 0.$$

g_{ik}是坐标的某些函数，而在连续的坐标变换下它们按一定的方式变化. 按照等效原理，g_{ik}这些函数描述了某特定的引力场：即可以由"元场"空间经一定变换而得. g_{ik}满足一定的变换规律. 从数学上说它们是有对称性的"张量"之分量. 这里的对称性在一切坐标变换下都得保存而为

$$g_{ik}=g_{ki}.$$

现在，这里的思想可以看清楚了：虽然引力场不能由空洞的狭义相对论空间仅用坐标变换而得出，能否对此对称张量给以客观意义？虽然我们不能希望这样的对称张量即可描述最一般的场，它完全可能描述"纯引力场"这个特例. 这样就很清楚，广义相对论，至少对其一个特例，需要假设什么样的场：对称张量场.

这样，余下的只有第二个问题：对于对称张量场可以假设哪一类一般的协变场定律？

在今天这个问题不再难以回答了，因为必要的数学工具，曲面的度量理论，已经在手. 这个理论是高斯在一个世纪前创立的，后来又由黎曼推广到任意维流形. 这个纯粹形式的研究在许多方面令人惊诧. 作为场定律的 g_{ik} 的微分方程不能低于二阶，即这些方程至少要含有 g_{ik} 对于坐

标的二阶导数. 假设场的定律的方程中不含 g_{ik} 的高于二阶的导数，这组方程由广义相对论原理从数学上完全决定. 方程组可以写为

$$R_{ik}=0,$$

R_{ik} 的变化规律和 g_{ik} 完全一样，就是说，它们也是对称张量.

这些方程完全取代了关于天体运动的牛顿的理论，只不过质量表为场中的奇点. 换言之，它们既包含了力的定律，也包含了运动定律，而消除了"惯性系".

质量作为奇点出现表明了这些质量本身还不能用对称的 g_{ik} 场，即"引力场"来解释. 甚至仅有正的，有引力的质量存在，也不能从这个理论导出. 显然，一个完全的相对论的场论必须基于本性更为复杂的场，它是对称张量场的推广.

在考虑这个推广以前，要对引力理论作两个说明，这对后面的解释是不可少的.

其一是：广义相对论原理对于可能的理论作了极严格的限制. 没有这个限制性的原理，任何人尽管知道必须用对称张量来表示场，实际上也不可能碰上引力方程，使用了狭义相对论也不行. 要是不用上广义相对性原理，收集再多的事实也不能导出这些方程. 我觉得，如果基本的概念不是从一开始就用上广义相对性原理，要对物理学的基础得到更深的知识是注定不会成功的. 这种情况使得，要用经验的知识(不论多么广泛)来寻求物理学的基本概念和基本关系是困难的，这就迫使我们更多地应用自由的思辩，其程度远远超出绝大多数当代物理学家之设想. 我看不出任何理由去假设广义相对性原理的助探性的意义只限于引力，而可以把物理学的其余部分分开来，只用狭义相对论来处理，然后又把它与引力理论相容地合成一个适合广义相对论框架的整体. 我觉得这样一种态度虽然在历史上是可以理解的，却没有客观的依据. 我们今天所知道的引力效应都比较小，但这不是在具有基本性质的理论探讨中可以忽略广义相对论的决定性的理由. 换言之，我不相信下面的问题是有道理的：没有引力理论的物理学会是什么样的?

其二是我们必须注意，引力方程组是关于对称张量 g_{ik} 的 10 个分量的 10 个方程. 在非广义相对论的情况，一个方程组若其方程的个数与未知函数个数相同，则它通常不会是过定的. 它的解的全体是这样的：通解中含有若干个可以任意选取的三个变量的函数. 对于广义相对论当然就不能这样设想. 坐标系可以任意选择蕴含着：在作为解的 10 个函数中，即场的 10 个分量中，可以假设有 4 个可以通过适当选取坐标系而取已给的值. 换言之，由广义相对论原理，需由微分方程组决定的函数不是 10 个面是 $10-4=6$ 个. 对这六个函数只能假设六个独立的微分方程. 引力场的 10 个微分方程中只有六个是互相独立的，而其余四个必须通过四个关系式(即恒等式)与这六个相关. 确实，在 10 个引力方程左方的 R_{ik} 之间有四个恒等式——比安基(Bianchi)恒等式——存在，它们保证了方程组的相容性.

若场变量个数等于微分方程个数，在类似于此的情况，若方程可以由变分原理得出，相容性总是有保证的. 引力方程其实就是这样的.

然而，又不能用六个方程来完全取代 10 个微分方程. 这个方程组确实是“过定的”，但由于有这四个恒等式存在，虽然过定却未丧失相容性，即是说解的全体并未受到根本的限制. 由引力方程可以导出质量的运动定律正是与这种过定性(可悲地)密切相关的.

有了这样一些说明以后，不必进入数学细节而理解这项研究的本性，也就容易了. 问题就是要建立整个场的相对性理论. 解决这个问题的最重要的线索就是：纯引力场的特例已经有了解答. 所以我们想寻求的理论必须是引力场理论的一个推广. 第一个问题是：对称张量场的自然的推广是什么？

孤立地回答这个问题是不可能的，只能与其他问题联系在一起来回答：场的什么样的推广能给出最自然的理论系统？我们正在讨论的理论基于以下的回答：必须用非对称张量场来代替对称张量场. 这意味着，关于场分量的条件 $g_{ik}=g_{ki}$ 必须抛弃. 这样，场就有 16 个分量而不是 10 个分量.

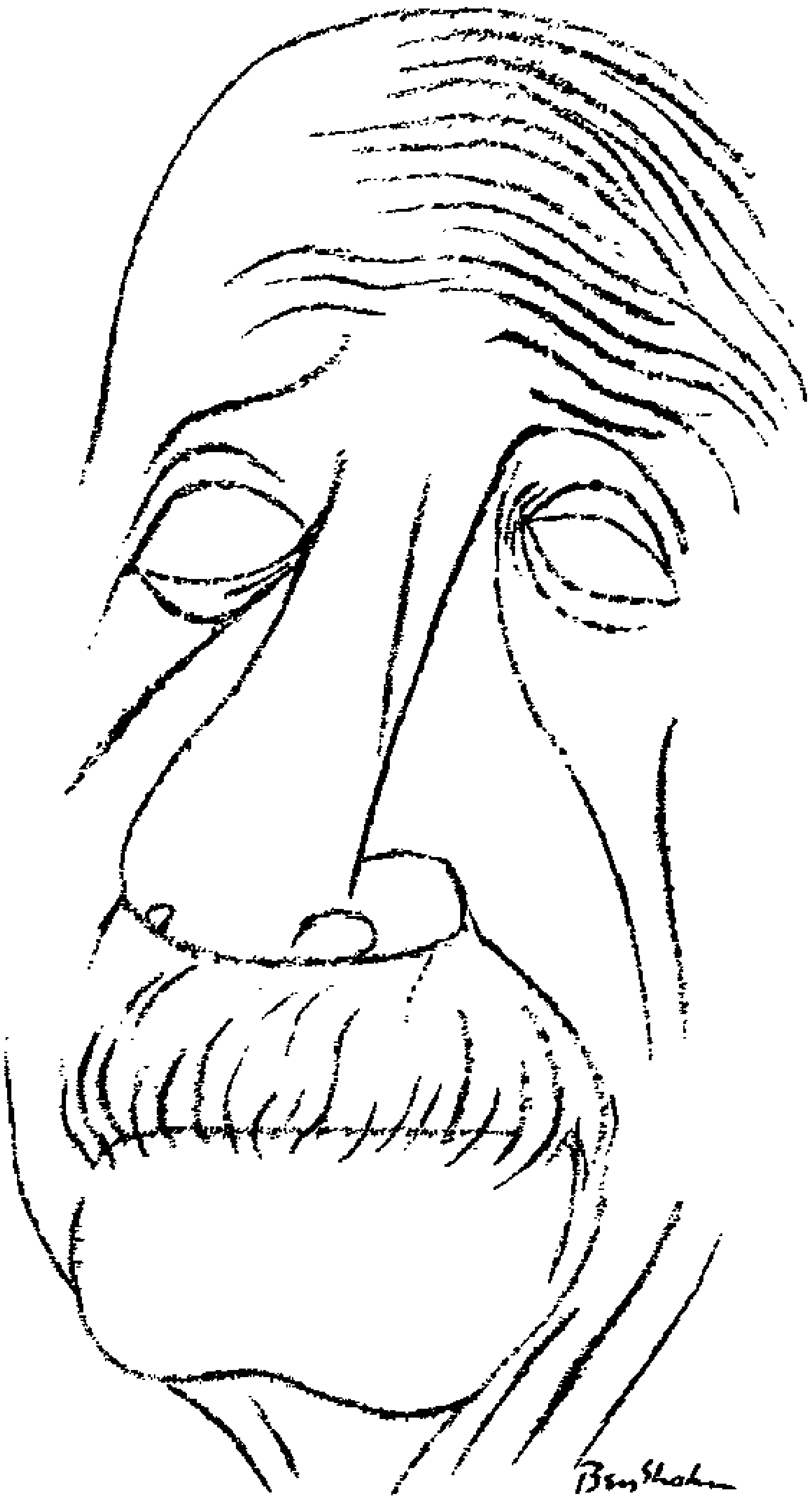
余下的工作就是建立非对称张量场的微分方程. 解决这个问题时，会遇到对称场情况下不出现的困难. 广义相对性原理不足以完全决定场方程，主要因为场的对称部分的变换规律并不涉及其反对称部分的分量，反之亦然. 大概这就是过去几乎没有人试作这种推广的原因. 如果在这理论的形式框架中只是整个的场起作用而不是其对称与反对称部分分别起作用，则只有把这两部分综合起来才是自然的程序.

事实是这个要求确可自然地满足. 但是甚至这个要求加上广义相对性原理仍不足以唯一地决定场方程. 记住，方程组还要满足一个条件：各方程必须相容. 上面说过，如果这些方程来自变分原理，这个条件也是可满足的.

这一点已经做到了，虽然不如对称场情况那样自然. 有两个不同的方式可以做到这一点，而这却是困扰人的. 这些变分原理给出了两个方程组——记为 E_1 和 E_2——它们不全相同(虽然差别很小)，各有其特定的不完全之处. 所以，甚至相容性条件也还不足以唯一决定方程组.

事实上，正是 E_1 和 E_2 的形式上的缺陷指出了可能的出路. 还有第三个方程组 E_3 没有 E_1 和 E_2 的形式缺陷，而是它们的组合，意思是说，E_3 的每一个解都同时既是 E_1 又是 E_2 的解. 这暗示 E_3 可能就是我们要找的方程组. 那么，为什么不就用 E_3 作为方程组呢？如果不作进一步的分析，这个程序仍然根据不足，因为由 E_1 和 E_2 的相容性得不出更强的方程组 E_3 的相容性，它的方程个数比场分量的个数多四个.

另外一种考虑表明，如果不管相容性问题，只有 E_3 才是引力场方程真正自然的推广.



但是 E_3 不是如 E_1 和 E_2 那种意义下的相容的方程组，E_1 和 E_2 的相容性是由足够多的恒等式来表示的，这意味着每一个场若在一确定的时刻满足方程组，则必可连续拓展为四维时空中的解. 然而方程组 E_3 就不能这样拓展了. 我们可以用经典力学的语言这样来表述这件事：在方程组 E_3 的情况，"初始值"不能自由地选取. 真正关系重大的是回答下面的问题：方程组 E_3 的解的全体是不是包含了那么多的东西以适合一个物理理论的需要？这个纯粹的数学问题至今仍未解决.

怀疑论者会说："从逻辑的观点来看，这个方程组确实可能是合理的. 但是这还没有证明它与大自然相符."亲爱的怀疑论先生，你是对的. 只有经验能决定真伪. 然而，如果我们能成功地陈述出一个有意义的精确的问题，我们终究做成了一点事. 虽然知道了大量的经验事实，要对此加以肯定或反驳，都不是容易的事. 从方程导出可以与经验相对照的结论，还需要作艰苦的努力，可能也还需要新的数学方法.

34.

引　力

乔治·伽莫夫(George Gamow),1961 年 3 月号

在所有有知识的人都相信世界是平坦的那个年代,他们确实没有理由去思考引力.有"上"有"下".所有物质的东西都自然而然会向下走,会下落,谁也不去问为什么.绝对的上与下的概念持续到中世纪,直到那时,人们还力求去证明地不可能是圆的.

第一道穿破关于落体的学院派迷雾的亮光来自伽里略的工作.因为自由落体下降太快不好直接测量,伽里略决定研究放在斜面上的物体来延缓运动.他的论据如下:—在当时这是新奇的论据——因为放在水平面上的球完全不动,而平行于垂直平面的球下落之快就好像根本这个垂直平面没有放在那里,所以斜面上的球应该以居间的速度下落,速度大小视倾角大小而定.他观察了球沿着不同倾角的斜面下降的速度以及在一定时间区段里走过的距离,其间他用水钟来测量时间.实验表明,速度总是按时间(从释放球时算起)正比增加,而经过的距离与时间平方成正比.伽里略还发现,如果把一个很重的铁球与一个轻得多的木球放在高度相同,倾角也相同的斜面上,而且同时释放,则它们会并排滚下.

他还使用单摆——即悬在细绳上的重物——来作为另一种延缓下落的方法.这里,只要调整摆长,就可以改变重物运动的弧的陡度.同样长度的摆尽管重物不同,振动周期都是一样的,这个结果与斜面实验的结果是一致的.伽里略从这些观察中推断出:一切物体,不论是轻是重,自由下落的情况完全一样.这个想法与当时占据统治地位的亚里斯多德哲学学派的意见直接相反,按这种意见,重物下降比轻的东西更快.按一个著名的传说,这传说可能实有其事也可能没有,伽里略爬上比萨斜塔,抛下了一轻一重的两个球,它们同时触地,这使得当时的哲学家们大为狼狈.

牛顿的引力定律

这些研究奠定了力学科学的基础，而主要的结构则是牛顿建立的，牛顿生于伽里略的卒年. 牛顿用他的运动定律引入了力和惯性质量两个概念. 当力作用于物体时，就会改变其速度之大小、或方向或二者都改变. 它们的惯性质量反抗这些改变. 牛顿指出，物体速度的变率(加速度)与作用于其上的力成正比而反比于其质量. 力加倍则加速度也加倍；质量加倍则加速度减半；二者都加倍则加速度不变.

从这个定律的观点来看，伽里略关于自由落体的结果隐含了一个事实，它其实是很奇怪的，但是一直被认为当然而视若无睹；这就是，一物的重量(即地球加于它的引力)与其惯性质量严格成正比. 若不是这样，同样大小的铁球和木球不会以同样的速率下降. 若两个物体下落时加速度相同，则铁球中反抗运动的改变的惯性质量必定大于木球的惯性质量，而且恰好与作用于二球的向下的力成正比例. 这种比例性绝非小事；事实上，只有引力如此而其他我们所熟知的力均不是这样. 所以，一个电子和一个质子在引力场中下落的加速度是一样的，而在同一电场中，电子得到的加速度要比质子的大 1 836 倍.

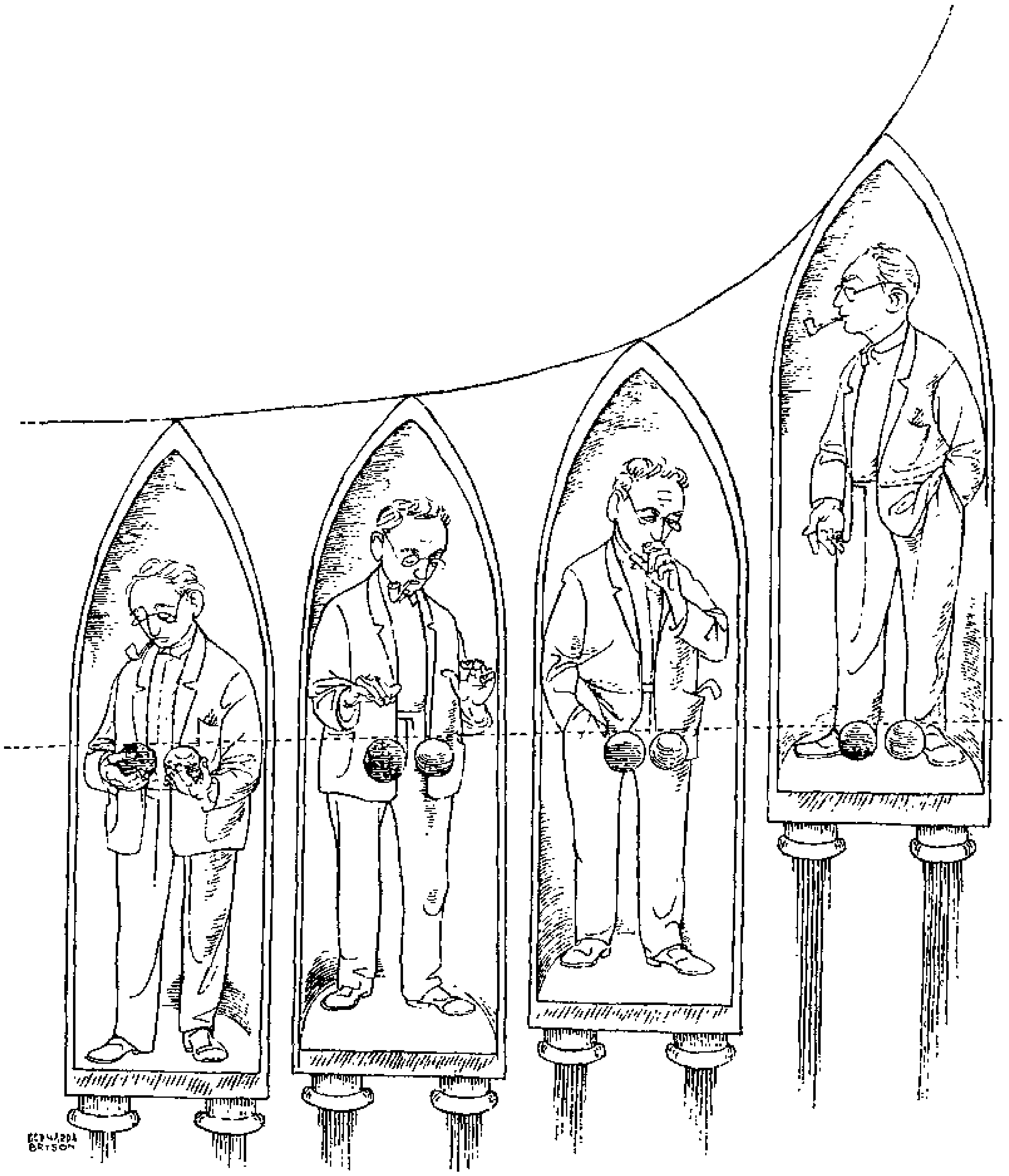
牛顿分析了向地面下降的球(或者苹果)以后，继续在更宽大的尺度下考察引力. 他在《原理》* 一书中一段非常有趣的讨论足以表明他的思路. 他说，设在一个高出大气层的山顶上水平地射出一发炮弹(见 435 页插图)**. 炮弹将沿弯曲的轨道进行而在离山脚一定距离处落地. 炮弹出膛速度越大，落点离山脚越远. 在充分高的初速之下，炮弹落点将会在地球表面上与山正好相反处；初速更高时，它就永远不会落地而成为绕地旋转的小月亮. 牛顿论辩说，如果可以这样做出一个人造卫星，为什么不可以假设天然的月球的运动也是一种自由落体运动呢？而如果月球绕地球旋转是地球的引力吸引而成，则假设地球自己也位置于一轨道上是由于太阳的引力所致，这不是合乎逻辑的吗？于是；对于其他的行星及其卫星这不也是成立的吗？万有引力这个深刻的重要的思想就是这样产生的，这个思想就是：宇宙间一切物体都互相吸引，引力之大小由它们的质量与相互距离决定.

为了确定引力与质量及距离的准确的关系式，牛顿先假设地球与接近地球表面的物体之间

---

* 译注：《自然哲学之数学原理》(*Mathematical Principles of Natural Philosophy*, 1686)有王克迪中译本，武汉出版社 1992.

** 译注：此例实出于牛顿的《宇宙体系》一书，该书英译本与中译本均与《原理》合订. 见武汉出版社译本 559 页. 其中讲的是石块而非炮弹.



等效原理是由爱因斯坦确切表明的，这原理指出，加速运动产生的效应与引力场的效应是无法区别的．一个匀加速的飞船中的观测者，如果同时让两个不同重量的球同时下落，他会看到地板以同样的速度迎着球而来．一个飞船外的观测者则会看到这两个球继续上升（虚线）其速度就是放球时刻飞船的速度，而地板运动则有加速度，于是终于追上了这两个球．

的力正比于物体的惯性质量,它也应正比于地球的惯性质量.这立即说明了何以小质量的物体,如两个苹果之间的引力从没有为人注意到.它太微弱了.直到牛顿死后半个世纪,这个力的存在才由另一个英国的天才卡文迪希(Henry Cavendish)在实验中证实.

已经规定两个物体间的引力正比于其质量的乘积后,牛顿进而讨论它怎样依赖于它们的距离.他比较了为了维持月球位于离地球约 60 个地球半径的轨道上所需之力与作用在离地心仅一个地球半径处的苹果上之力.重要的是要看到,尽管月球与苹果之质量有如此巨大的差别,这种比较仍是适用的.事实上,若把一个苹果放在月球轨道上,并给它以月球的轨道速度,则苹果将和月球完全一样地绕地球旋转;用同样的证据,如果把月球挂在一个树枝上再落下,则它落地的速度也必和苹果一样.牛顿的数学分析表明,彼此吸引着的物体的引力随距离平方而减少.

他现在可以写出引力公式:$F=G(M_1M_2)/d^2$,G 是比例常数,称为引力常数,这是一个极小的数;如果质量以克计,距离以厘米计,则 G 约为 $0.000\,000\,066=6.6\times10^{-8}$.这意味着,若有两个 1 克重的物体,放在相距一厘米处,则其引力略大于 6 亿分之一达因,或即 6 千亿分之一克质量所受的重力.

牛顿把他的引力定律与运动定律结合起来,就能从数学上导出开普勒所发现的行星运动的三大定律.在紧接着的值得纪念的年代里,牛顿和他的继承者们把天体的运动解释到纤细入微的地步.但是引力作用的本质,特别是引力质量与惯性质量为什么神秘地成正比,其理由在 200 多年中完全隐藏不见.

爱因斯坦的引力定律

然后到 1914 年,爱因斯坦终于揭开了帷幕.他所提出的思想来自大约十年前他提出的狭义相对论.那个理论基于如下的解释,闭而限于室内,则不论如何观测也无法得知此室是静止的还是沿一直线作匀速运动.所以如果一个人处于作者写下这几行文字时的位置——在伊丽莎白皇后号一间不向大海的舱中,航行在平静的大海上——则不论他做力学的、光学的或不论什么实验,他都无法得知这船已在海上航行,还是仍然停泊在港中.如果风暴骤起,情况就发生令人痛苦的变化;这时,这船远非匀速地运动就再明显不过了.

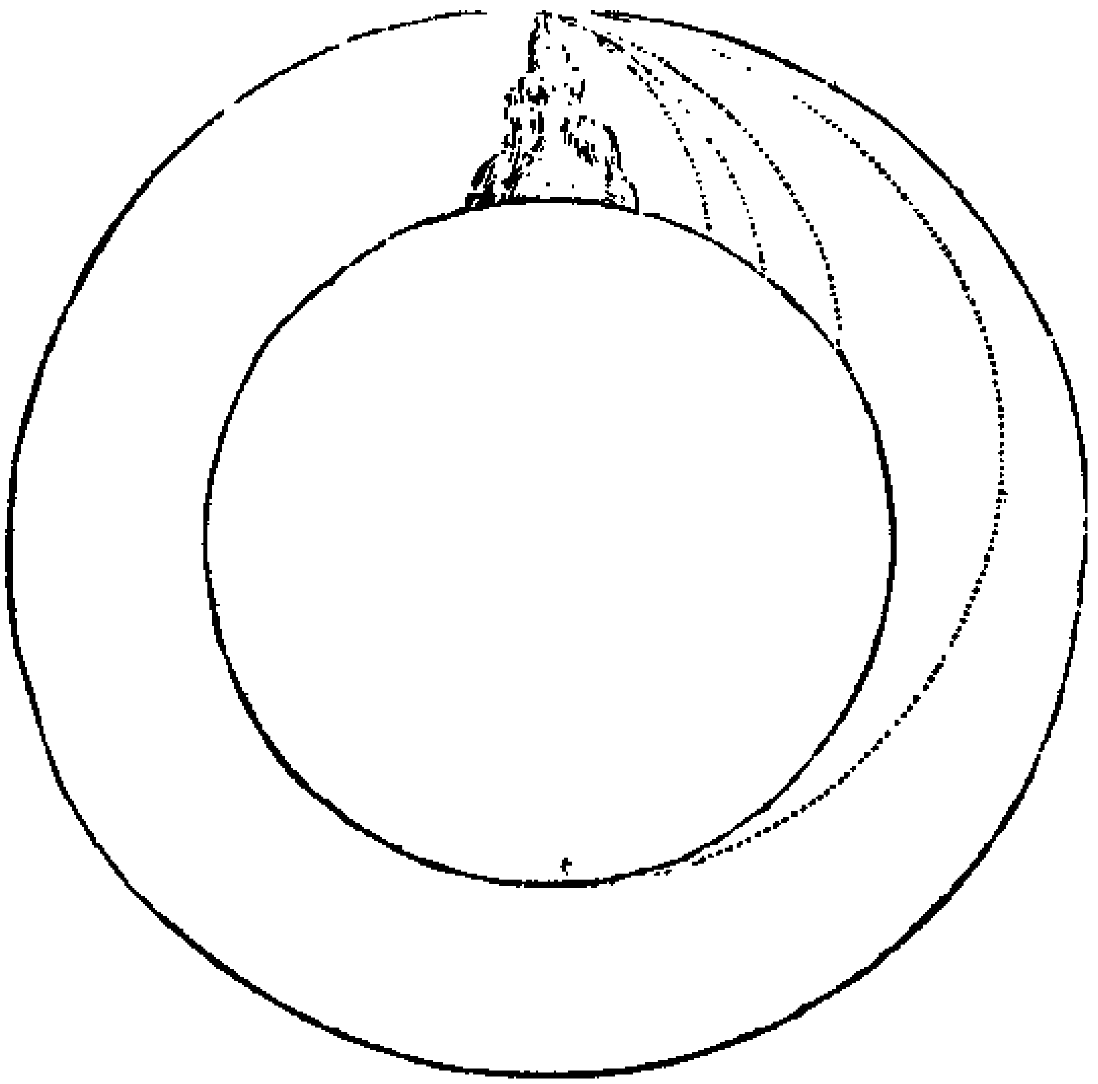
为了处理非匀速运动,爱因斯坦设想有一实验室在远离任何有引力的物体处.如果这运载飞船对于一个遥远的星体是静止的或作匀速运动,则里面的观察者们以及他们的没有固定在舱壁上的仪器,都会自由漂浮.分不出上和下.然而,火箭发动机一启动,飞船加速,仪器和人都会被压向与运动方向相反方向的舱壁,这个舱壁就成了地板,它对面的舱壁则成了天花板,而人们

可以站起来，走来走去，多少有些像在地上一样. 事实上，如果这个加速度等于地面上的重力加速度，乘客们很可能相信飞船仍然停在发射场上.

设有一个乘客手上并排拿着两个球，一个铁的，一个木的，而且他同时把两个球都放开. 从在飞船外的我们看来，“真正”发生的事情如下：当球还拿在手上时，两个球都在和观察者和整个飞船一起作加速运动. 当把它们放开，它们就不再受飞船发动机驱动. 现在它们会靠在一起都以释放时刻飞船的速度运动. 然而飞船本身会继续加速，所以飞船的“地板”会很快地追上这两个球，同时碰上它们.

但飞船内的观察者看到的实验就不一样了. 他会看见两球下落，同时落到“地板”上. 他若回想起伽里略在比萨斜塔上所证明的，就会相信在空间的实验室里有通常的引力场存在.

对于被观测的事实，两种描述都是正确的；这两种观点的等价性就是爱因斯坦关于引力的相对性的基础. 然而，这一个关于在加速的舱室外面和里面所作的观察的所谓等效原理，如果只



人造卫星是牛顿在《原理》一书中想出来的理想实验，本图即转引自此书. 从山顶上水平射出的炮弹，出膛速度越大就落得越远. 若速度充分大，它就会绕地球旋转，这就暗示着月球其实也是在地球的引力场中下落.

用于力学现象,是平凡而不足道的.爱因斯坦深刻的洞察力在于这个原理十分广泛,对于光学和其他电磁现象都成立.

设想一个光束以"水平"方向穿过这个空间实验室.为了追踪光的行程,等距地放置一些垂直的荧光玻璃板(见 438 页上的图).从飞船外看,"真实"地发生是光以常速沿直线行进,玻璃板则越来越快地上升而穿过光的路程.光用相同的时间从一个玻璃屏走到下一个,但是在每一个相继的时间区间中,屏都上升得更高.所以荧光亮点的模式表明地板正越来越快地接近光束.但是如果飞船内的观察者画一条线连接这些亮点,则在他看来这曲线是走向地板的抛物线.因为他把加速度看作是由引力产生的,他就会说,光在引力场中传播时会弯曲.

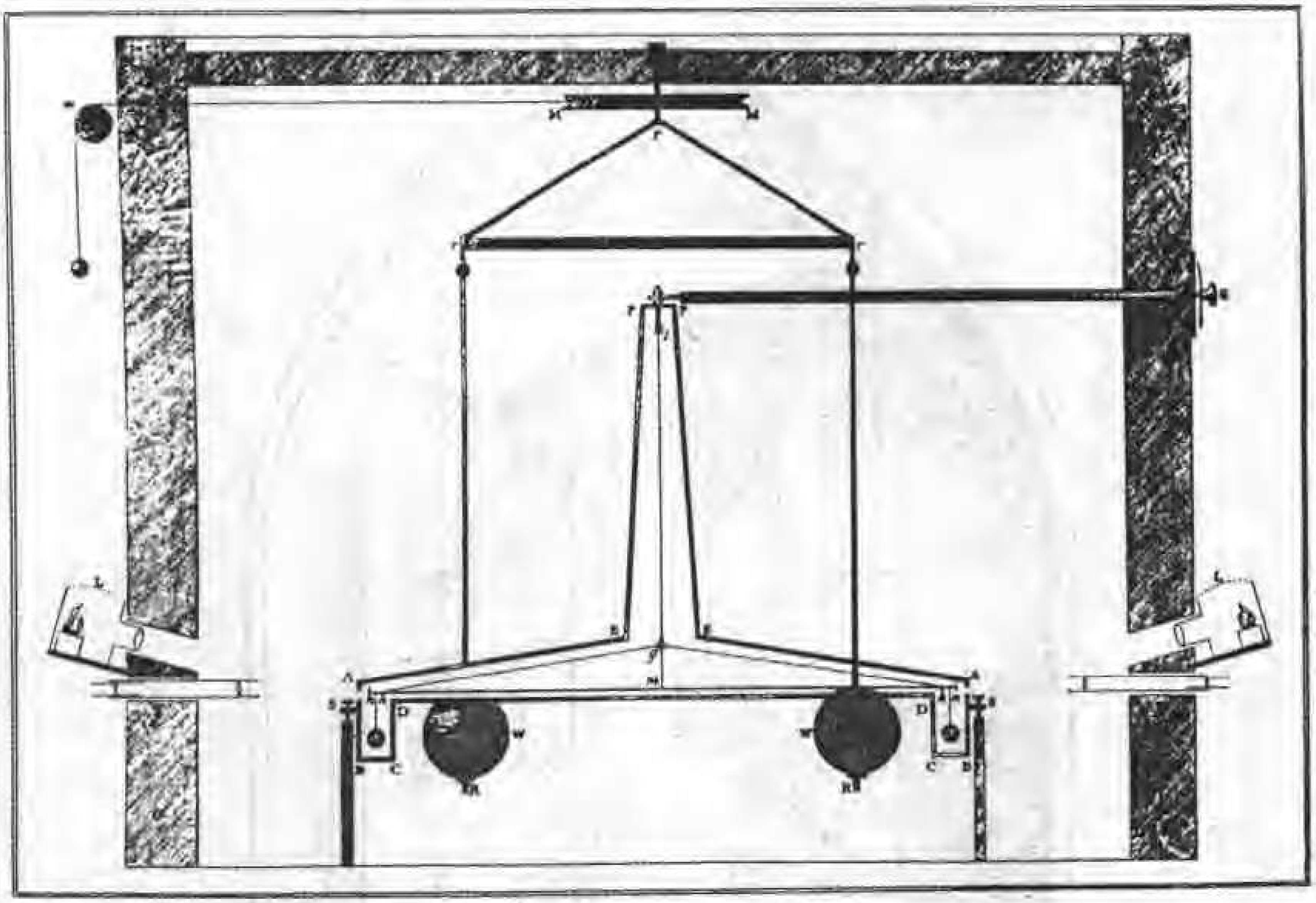
所以,爱因斯坦就得出结论说:如果等效原理在整个物理学中都成立,从远方星体来的光线,若在走向地球时要接近太阳,光线必向太阳弯曲.1919 年一队英国天文学家在非洲观测日全食时出色地证实了这个预见.日光由于月球的遮掩而暗淡,可以看见太阳光盘附近的星体偏离了它应该在的方位 1.75 秒弧度.

相对论性的旋转木马

我们再来考虑另一类加速运动——匀速旋转.(以一定速率在圆形路径上运动的物体应该认为是加速运动,因为其方向连续地变动.)考虑用帷幕围起来的旋转木马,里面的人不能观看周围来判断木马在转.如果旋转木马在转,观测者就会感到离心力把他推向边缘.放在平台上的球就会滚动离开中心.作用在平台上任一物体之离心力大小都正比于该物体之惯性质量,所以这里加速运动的效应又一次可以看作是等价于一个引力场.肯定这是一个特别的场;它与地球表面以及一般的球形物体表面上的场很不一样.力是指向离开系统中心的方向而不是向着中心;它也不是随到中心的距离之平方而减少,而是随此距离而增加.此外,这个场有绕中轴的柱对称性而不是绕中心点的球对称性.尽管如此,等效原理仍然成立:场可以解释为分布在远离对称轴处的物质生成的引力场.

光线在这个场内该如何传播?设在转盘边缘上一点 A 处有一个光源向各个方向发出光线,我们在边缘上另一点 B 上观测它.根据光学的基本定律,光总是沿最短路径传播.但是 A 与 B 之间的最短路径是什么?要测联结 A 点和 B 点的不同曲线的长度,观察者采用了古老然而可靠的方法,就是沿曲线把杆尺头接头地放好再数杆尺的数目(见 440 页上的图).

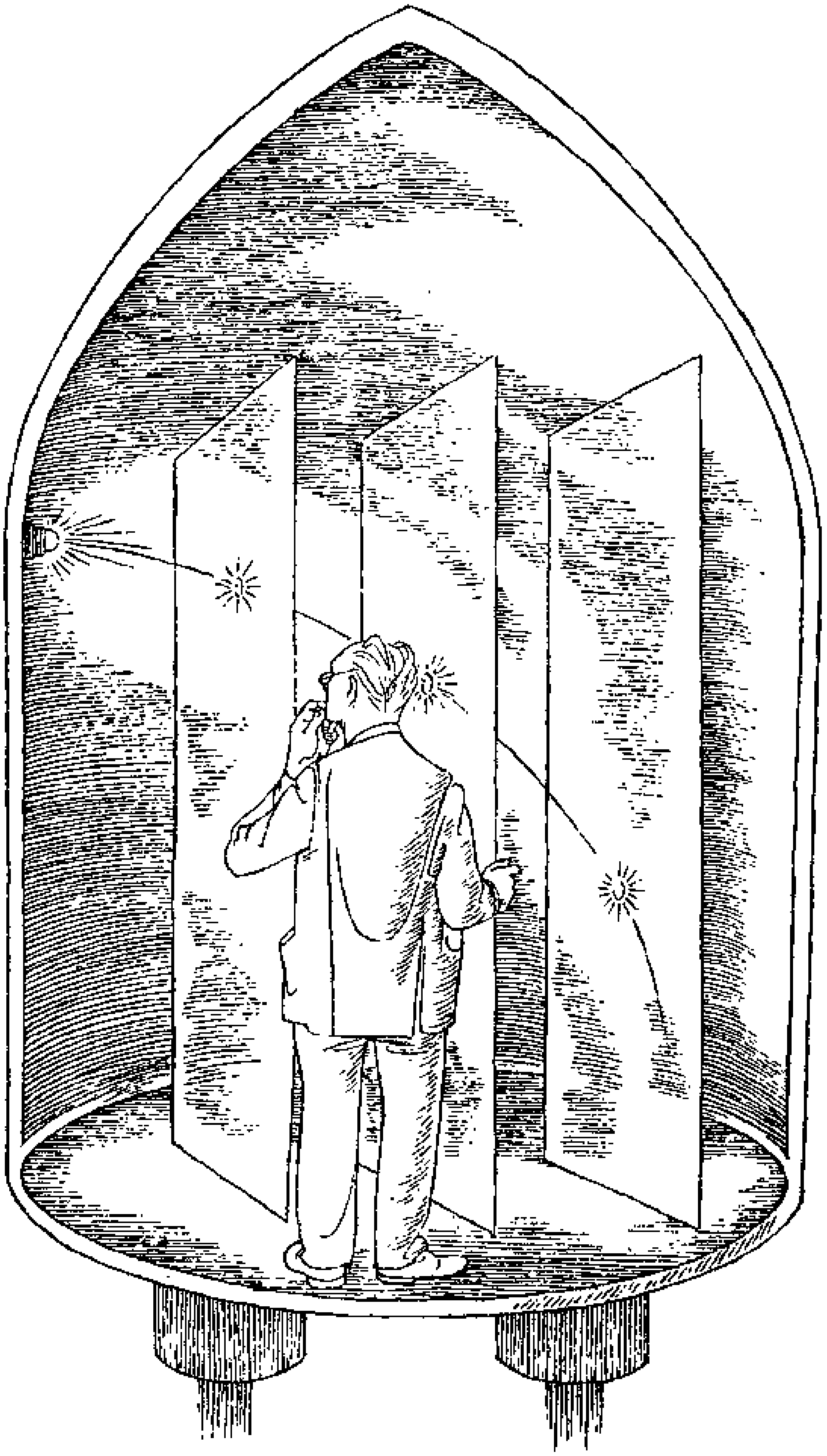
当我们从外面看这个实验时,记住狭义相对论告诉我们,运动的杆尺会沿运动方向缩短.所以我们看到,如果观察者沿着 A,B 间的"真正"的直线去量,他的杆尺就会收缩,所以比之不动



扭秤是英国物理学家卡文迪希用来测量小质量之间的引力的.本图转引自他发表在 Philosonphical Transaction of the Royal Society 的论文.直径 2 吋的铅球(a)固定在一个梁上,而梁则悬在一个有扭力的线(lg)上.放了两个 12 吋直径的球,先把梁向一边转,然后再向另一边转.通过两侧各有一个的棱镜来观测扭转.总旋转就可用来度量引力.

的平台,他要用更多的杆尺才能量完.现在出现了一件趣事.杆尺越接近中心,它的线速度就越小,所以收缩得也越少.所以观测者只要把杆尺向中心弯曲,他就能减少由 A 到 B 的杆尺的数目.虽然沿弯曲的曲线"真实"的距离要稍长一点,但是每一个杆尺的收缩都比较小,这就补偿了增加的长度而且有余.沿着这条最短路径的光线,在开始行进时是向内的,然后再弯向外缘,这可以看作是由于从外面看到的沿半径指向外方的引力场使光的路径变弯了.

在离开这个旋转木马前,我们再作一个实验.把一对完全相同的时钟放在平台上,一个靠近中心,一个靠近边缘.和杆尺的情况一样,外侧的钟比靠内的钟运动的速度快些,狭义相对论又会预见两个钟性态有差别.运动除了使杆尺变短,还会使时钟变慢.所以靠外的钟比靠内的会走



光线的曲率是加速的火箭中的观察者所看到的. 在外面的观测者看来,光束仍然沿水平的直线行进,穿过每一个玻璃屏的点则越来越接近地板,这是由于玻璃屏有向上的加速度.

得更慢. 但若观察者用引力场来解释加速度的效应,他就会说,在引力势较高处(即沿引力方向的较远处)时钟走得慢些.

虽然不能去讨论细节,爱因斯坦的论据表明在例如地球的通常的引力场中也会有这样的事. 这里引力场指向下方,所以海平面上的钟要比山顶上的钟走得慢. 所有的物理的、化学的和生物学的现象都会同样的放慢,而一个在纽约帝国大厦一楼工作的女打字员要比在顶楼上工作的孪生姐妹老得快一些*. 场越强,慢得更多. 太阳表面上的钟比地面上的钟要慢百万分之一.

我们当然无法在太阳表面上放一个钟,但是我们可以观测造成太阳光谱中各条谱线的原子振动频率. 如果大自然的钟慢下来了,原子发出的光谱就应该向光谱的低频端即红色一端移动. 这种“引力红移”是爱因斯坦预见的. 这种红移确实在太阳光谱的谱线中找到. 但是它太小了以至于几乎超出了观测精确性的限度. 密度大得多的白矮星的红移要比太阳的大 40 倍,这与理论相符得很好.

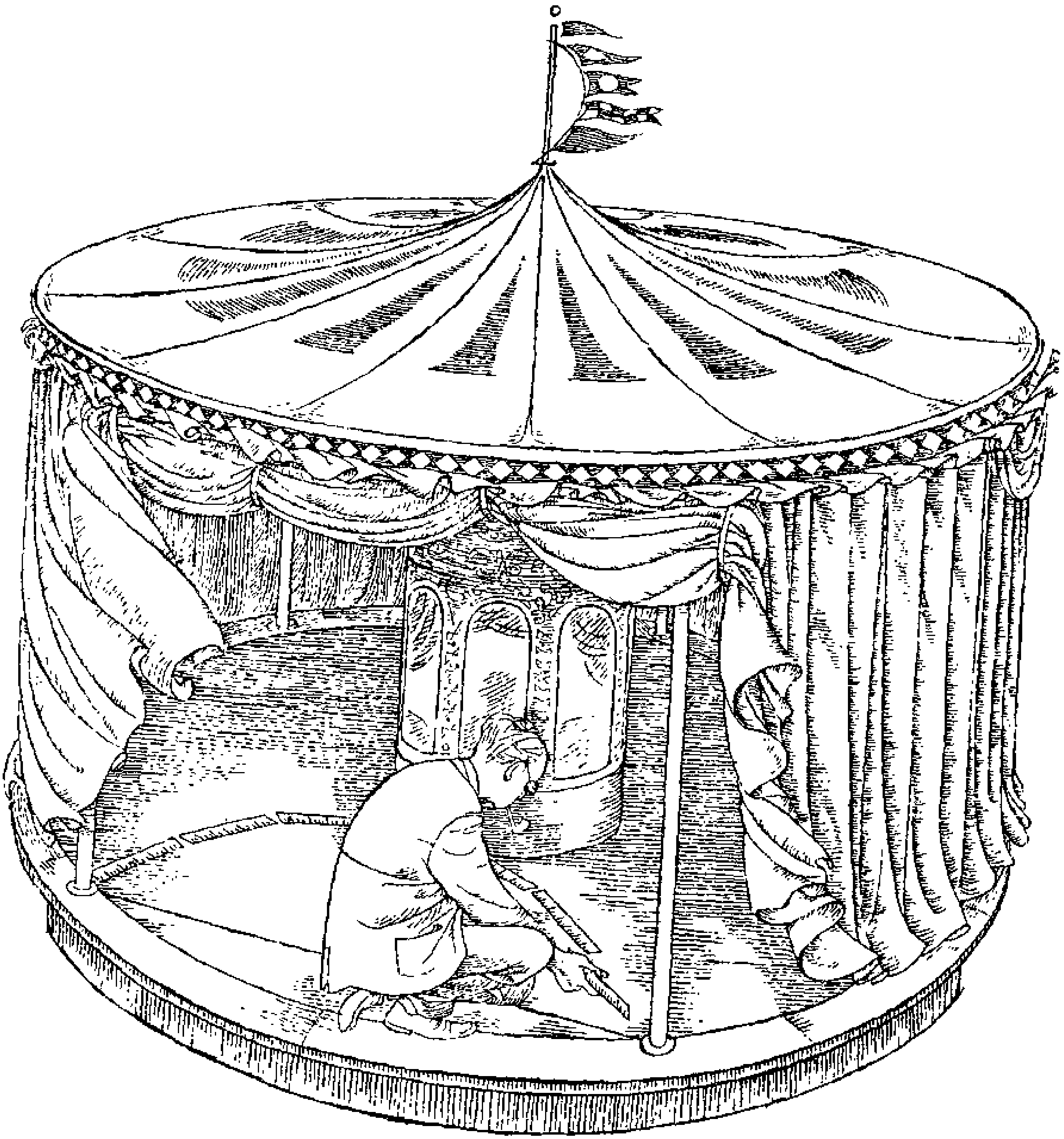
天文学的证据总不如地面上的实验室中完成的实验. 不多几年前,在实验室里测量出所预见的地球引力场中不同高度处的钟的微小差别,还几乎是无望的. 后来慕尼黑大学的穆斯堡尔(R. L. Mössbauer)找到了一种生成频率极纯的伽玛射线,并用以测量频率的极端微小的变化(见 S. De Benedetti, The Mössbauer effect,《科学的美国人》,1960 年四月号). 几位科学家,抓住了这个机遇,着手证明在地球引力场中相距不过几十英尺的两个核“钟”确有可以观测得到的不同频率,其差恰好就是爱因斯坦所预见的,完全在实验容许误差的范围之内. 如果还要证据,则比较人造地球卫星上的和地面上的两个原子钟,几乎肯定会得到另一个证据.

这样我们就看到了,在引力场中钟会变慢,光线会向场的方向弯曲,直线也不给出两点间的最短距离. 然而除了说“直线”就是光在真空中所走的路径,或者就是两点间距离最短的曲线以外,又怎样定义它呢? 爱因斯坦的思想是保留这个定义. 他建议不说光线和最短距离是弯曲的面说空间(准确些说是时空)本身是弯曲的. 设想一个弯曲的三维空间已经很难,更不必说弯曲的四维时空了,但是利用与二维曲面的类比可以对于这句话指的是什么得到一些初步想法. 我们在中学里都学过的欧氏几何讲的是可以在平面上画出的图形. 如果在曲面上,如在球面上或鞍形曲面(见 441 页插图)画出图形,则许多欧氏定理都不成立.

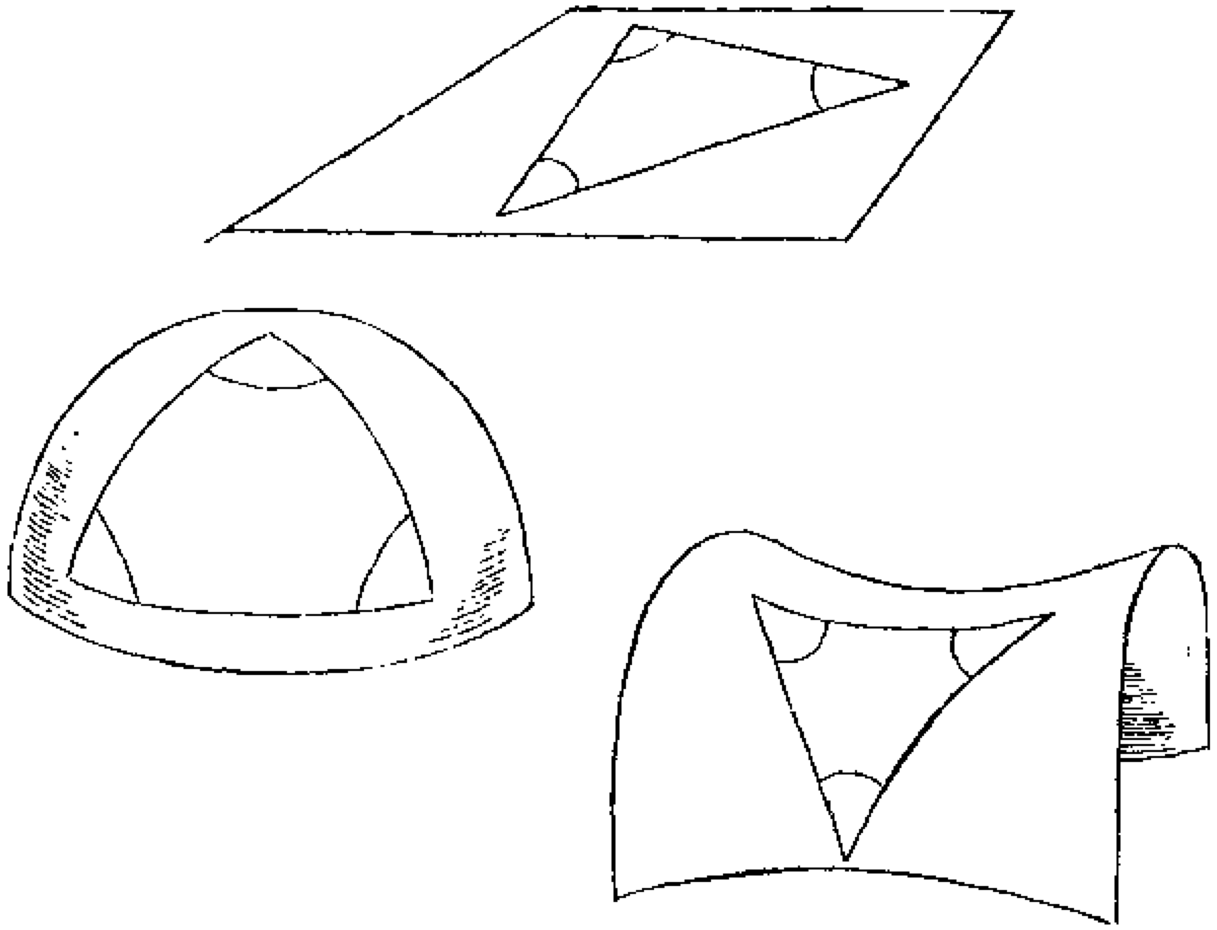
特别是平面三角形的内角和是 180°. 球面三角形的内角和大于 180°,而在鞍形面中则小于. 说真的,球面和鞍形面上的三角形的边,从三维观点看来都不是直的,但若把我们自己限于所讨

---

* 译注:原文误为慢一些. 这就是著名的孪生子佯谬. 确实有人作了实验,证实了在喷气式客机上,时钟确实会放慢;而且 GPS 定位系统的工作必须考虑这一点才能提高精度.



离心力场如图上所示的旋转着的旋转木马上的场，也可以用产生引力的质量来解释.如同正文中所说的，平台上的观察者会看到，边缘上两点间最短的距离是沿着一条曲线的.因为光线是沿最短路径即测地线行走的，可以期望，光线在这类场中也会弯曲.



空间的曲率在二维情况下可以画出来. 在平直空间(上)里,三角形内角和是 180°; 在球面那样的正曲率空间(中)里,是大于 180°; 在鞍形面那样的负曲率空间(下)里,是小于 180°.

论的曲面上,它们都是"最直"(最短)的线. 数学家称这种曲线为测地线.

三维空间中测地线的定义就是光线沿以传播的线. 考虑由三条这种测地线围成的三角形. 如果其内角和等于 180°,就说此空间是平直的. 若和大于 180°,就说空间是球状的或正向弯曲的;若它小于 180°,就说空间是鞍状的或负向弯曲的. 若有三个天文学家分别在地球、火星和金星上,并以行星间行进的光线成一个三角形,测量这个三角形的内角和将会超过 180°,这是因为光线被弯向太阳的原故(见 444 页上的图). 所以我们说太阳附近的空间是正向弯曲的. 另一方面,在旋转木马型的引力场中,三角形内角和小于 180°,而这个空间是负向弯曲的.

前面的论证就是爱因斯坦的引力理论的基础. 按牛顿的观点, 太阳在它周围的空间中形成一个力场, 从而使行星沿弯曲的轨道而不是直线运动. 在爱因斯坦的图像里, 空间本身就是弯曲的, 而行星沿此弯曲空间中最直的曲线 (测地线) 运动. 这里我们说的 "空间" 中的测地线其实是在四维时空连续统中的测地线 (见 445 页插图). 当然, 说轨道是三维空间中的测地线就错了.

爱因斯坦把引力解释为空间的曲率,得出的结果与牛顿的经典理论并不完全一样. 我们已经讲到了光线的弯曲. 关于物体的运动,相对论也给出了略微不同的答案. 例如它能解释水星轨

道主轴的进动*，这在经典天体力学中是一个长期存在的神秘.

引力波

牛顿关于质量之间的引力作用的定律与电荷之间静电作用定律很相像，爱因斯坦的引力场理论与麦克斯韦电磁场理论也有不少共同点. 所以自然期望质量的振荡会引起引力波，正如电荷的振荡会引起电磁波一样. 爱因斯坦在1918年发表的一篇著名论文中已找到广义相对论基本方程的一组解，表示引力扰动在空间以光速传播. 引力波如果存在就要携带能量；但其强度，即它们传输的能量极为微小. 例如地球在绕太阳的轨道运动中发射的功率是千分之一瓦，这会使地球在10亿年中才向太阳下落百万分之一厘米！

谁都还想不出侦查这么弱的波的方法. 事实上有些理论家如爱丁顿爵士（Sir Arthur Eddington）认为引力波完全不表示任何物理现实，而只是数学的虚构，并且可以适当地选取时空坐标将它从方程中消去. 然而更彻底的分析证明并非如此，引力波虽然很弱却是真实的.

引力波是否也像电磁波一样分成离散的能量包或量子？这个问题虽然和量子理论一样古老，但直到两年前才由英国物理学家狄拉克（P. A. M. Dirac）解决**. 他成功地把引力场方程量子化并且证明引力量子，即"引力子"的能量也和光量子即光子的能量一样，等于普朗克常数 h 与其频率的乘积. 但是其自旋是光子自旋的两倍.

引力波由于太弱故在天体力学中并不重要. 但是引力子在基本粒子物理学中会起作用吗？这些基本粒子，物质的这些终极成分，通过发射或吸收适当的"场量子"而以多种形式互相作用. 电磁相互作用（例如荷相反电荷的物体的作用）必包含了光子的发射或吸收；可能引力相互作用也与引力子有关. 过去几年里已经弄清楚了，物质的相互作用分几类：(1)强相互作用，我们把电磁力也包括在内；(2)弱相互作用，例如放射性核的 β—衰变，这时发射一个电子和一个中微子；(3)引力相互作用，它比我们称之为"弱"的相互作用还要弱得多.

相互作用的强度与发射或吸收其量子的速率即概率有关. 例如，核发射一个光子要 10^{-12} 秒（即一万亿分之一秒***）. 与之相比，核子的 β- 衰变要12分钟，即时间长了 10^{14}（百万亿）倍. 可

---

* 译注：水星椭圆轨道上长半轴的端点，一为近日点，一为远日点. 所以，主轴的进动在大多数文献中称为水星近日点的进动.

** 译注：引力场的量子化远未解决. 是当代理论物理中的重大问题. 本文以下各节提到的都是重大问题.

*** 译注：原文误为一千万亿分之一秒.

以算出，核发射一个引力子要 10^{60} 秒，即 10^{52} 年！* 比弱相互作用慢到相差一个因子 10^{58}.

中微子被吸收，即与其他种类物质的相互作用的概率极低(见 P. Morrison, Neutrino,《科学的美国人》单行本 230). 中微子既无电荷又无质量. 早在 1933 年，玻尔就问过："[中微子]与引力量子有什么区别?"在弱相互作用中，中微子是与其他粒子一同发射的. 只包含中微子的过程——例如受激的核发出一个中微子——反中微子对又情况如何? 谁也没有看到过这样的事件，可能它是和引力相互作用同样时间尺度的事件. 一对中微子的自旋为 2，恰好是狄拉克为引力子算出的自旋值. 所有这一切当然只不过是一种想法，但是中微子与引力子的联系，这是一个激动人心的理论上的可能性.

引力与电磁

在法拉第的实验室日记中，1849 年有如下一条："引力. 此力必与电、磁及其他力有实验的关系，而在相互作用或等价事件中聚集在一起. 暂时先考虑如何通过事实与尝试开始着手此事." 他为此所作的大量实验并无结果，所以在日记中，他对这一条目是这样结束的："在此我现在结束尝试. 结果是否定的. 这些结果没有动摇我对于引力与电之间有关系存在的强烈的感觉，虽然并没有证明这种关系存在."其后在实验上作的努力也并不更为成功.

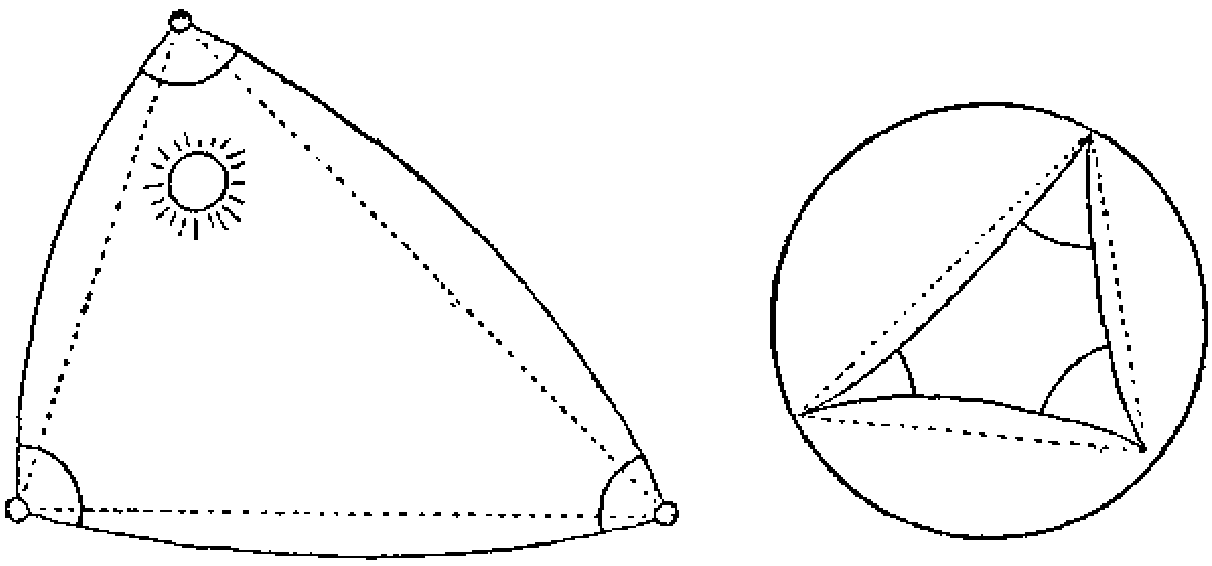
从理论上试图把电磁场引入引力场的路线，从事攻关的是爱因斯坦. 他把引力归结为时空连续统的几何性质，并且深信电磁场也必有纯几何的解释. 然而，"统一场论"的道路曲折艰难，他至死也没有做出任何如他早期工作那样简单、漂亮又而令人信服的工作. 今天，从事统一场论的物理学家越来越少**；他们相信把电磁场几何化的努力必然落空. 至少在作者看来，要想得到引力与电磁力的真实关系，只有研究基本粒子的本性——即研究何以只存在具有如此的惯性质量而不存在具有其他值的惯性质量的基本粒子——同时研究粒子的质量与电磁性质的关系才行.

作为这个领域中基本问题的一例，再考虑一下引力作用与电磁作用的相对强度. 这一次不比较发出量子所需时间，而比较在一对中等质量的粒子，例如 π 介子，之间的静电力与引力的真正的大小. 计算后知，静电力与引力之比等于电子电荷平方除以粒子质量平方与引力常数之积：

---

* 译注：原文误为 10^{53} 年.

** 译注：这个说法不对. 把四种相互作用(本文中说是三种，因为把电磁作用也列入强相互作用中了. 这是物理学界不接受的)统一起来，把引力的广义相对论与量子理论统一起来. 可以认为是当前理论物理最重大的问题.



空间曲率之符号视引力场的类型而定. 二个行星上的观测者(左), 因为光线被太阳弯曲, 将会侦查出正曲率. 旋转木马边上的观测者(右)会看到负曲率.

e^2/M^2G. 对于两个 π 介子, 其值为 10^{40}. 任何一个理论, 如果宣布能描述电磁力与引力的关系, 必须能解释这个比值. 还要指出, 这个比是一个纯数, 就是说不论取什么样的单位来测量物理量, 它的值都不变. 在理论公式中时常出现这一类纯以数学方法导出的无量纲数, 但它们通常都是 2π, 5/3 之类较小的数.

怎么会用数学方法导出 10^{40} 这样大的数呢? 大约 20 年前, 狄拉克提出了一个有趣的设想. 他认为 10^{40} 其实不是常数, 而是随时间变化, 而且与宇宙的年龄有关. 按照进化宇宙学, 宇宙生于一次"大爆炸"*, 现在年龄已有 5×10^9 年, 即 10^{17} 秒. 当然, 说年或秒都是随意选的单位, 我们更希望有一个由物质和光的性质导出的基本时间区间. 光走过一个基本粒子半径这样的长度所需的时间是一个合理的单位. 因为所有的粒子半径均在 3×10^{-13} 厘米左右, 光速为 3×10^{10} 厘米/秒, 这个时间的基本单位是 3×10^{-13} 除以 3×10^{10} 即 10^{-23} 秒. 若把宇宙的年龄用这个单位来表示, 我们应把它用秒表示的年龄 10^{17} 除以 10^{-23}, 然后就得到了 10^{40}! 于是狄拉克说, 电力与引力的如此大的比值, 正是刻画了今天的宇宙年龄. 若宇宙只有现在一半的年龄, 这个比值也就是它

---

* 译注: 现在一般都说是伽莫夫提出了"大爆炸"理论. 实际上, 早在 20 世纪 20 年代, 苏联物理学家弗里德曼找到了爱因斯坦场方程的一组解, 说明宇宙不是静态的, 而是在膨胀. 其后, 哈勃发现了银河系外移, 实验上证实了这个见解. 在 20 世纪 40 年代, 伽莫夫继续弗里德曼的研究, 完全从数学上证明了宇宙必"始"于一个极小、极致密的"初始原子". 1950 年英国天体物理学家候依耳(F. Hoyle)反对这个结论, 并名之为"大爆炸"理论. 此后, 这个问题越来越引起人们的关心, 是我们对宇宙的根本理解的一部分. 肯定这个理论的实验证据越来越多. 最值得注意的是, 前几年的 WMAP 计划, 证实了宇宙的"年龄"是 137 亿年, 误差在 1%以内.

今天的值的一半. 因为有充分的理由相信基本的电荷不随时间变化，狄拉克就断定引力常数一定是在减少着的，这种减少正是与宇宙的膨胀，而充塞其中的物质越来越稀疏有关.

如果引力常数确实迄今一直在减少，换句话说，如果引力迄今一直在变弱，则我们的太阳系也应该和宇宙一样一直在膨胀. 很早以前，地球应该更靠近太阳，所以比现在更热. 当狄拉克提出这个想法时，太阳系被认为年龄是 30 亿年. 现在执教于加州大学的泰勒(E. Teller)按这样的时间尺度计算，寒武纪时地球温度应该比水的沸点还高 50 度，那时已有相当发展的水生生物存在了. 现在看来，太阳系的年龄大约是 50 亿年或更多，如果是这样，寒武纪时的海洋虽然很烫，还不至于全部蒸发掉. 只要寒武纪的植物和动物都能生活在很热的水中，反对就没有力量了.

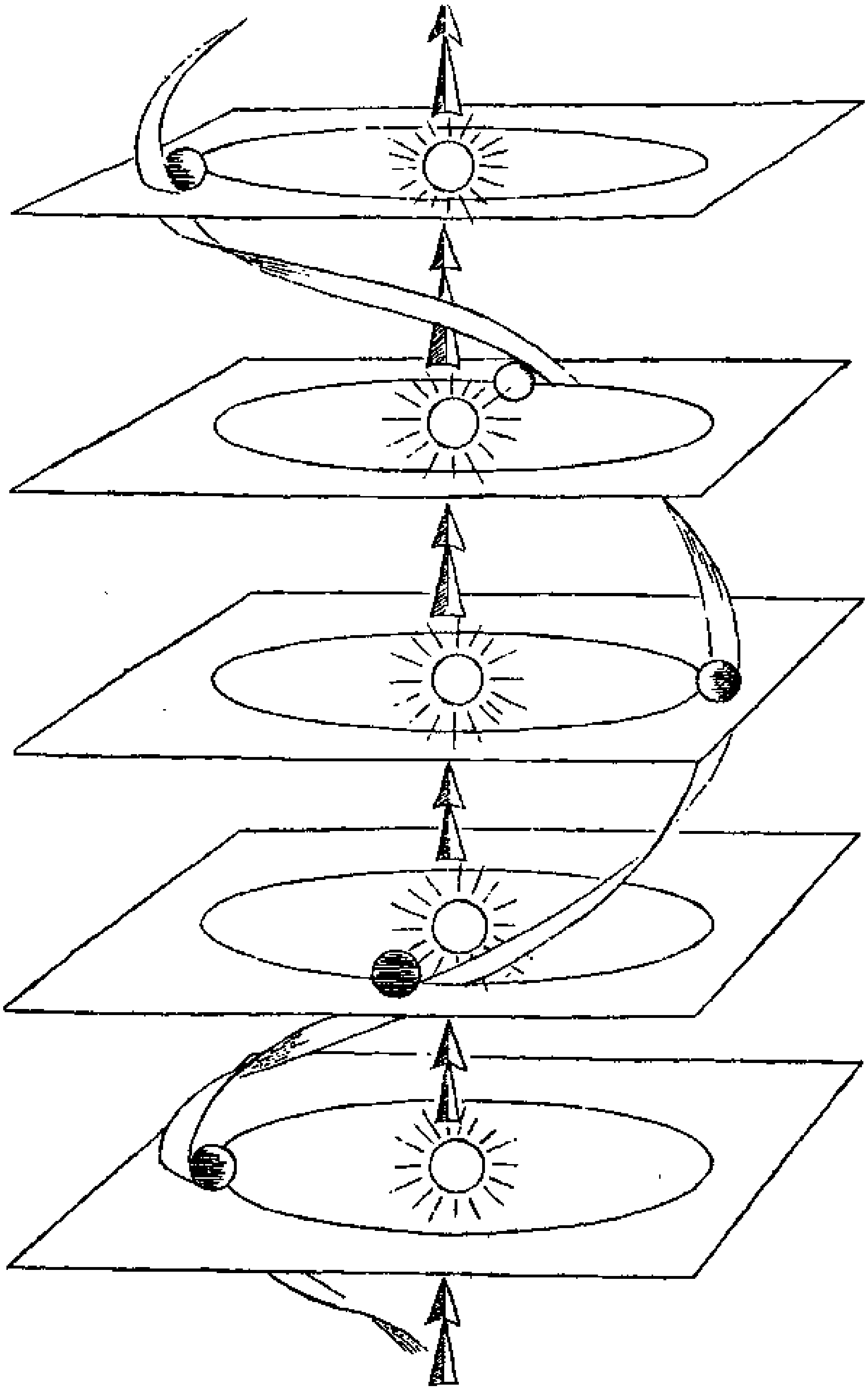
反引力

威尔斯(H. G. Wells，英国作家，写了不少科幻作品)在一篇小说里写了一个英国发明家，卡弗先生，他找到了一种引力不能穿过的物质称为卡弗质. 正如铜片可以为一个物体屏蔽电力，铁片可以屏蔽磁力一样，把一片卡弗质放在物体下面就可以屏蔽地球对它的引力. 卡弗先生造了一条很大的威尼斯式的游艇，四周用卡弗质做的活页板包起来. 一天晚上，皓月当空，他登上了船，然后把向着地面的活页板关起来，把向着月亮的都打开. 由于切断了地的引力而只接受月亮的引力，游艇腾空而起，最后把卡弗先生放在我们的卫星的表面上.

为什么这种发明是不可能的？它究竟是不是可能的？牛顿的万有引力定律和关于电荷、磁极相互作用的定律有深刻的相似性. 如果能屏蔽电力和磁力，为什么不能屏蔽引力呢？为了回答这个问题，必须考察电磁屏蔽的机制. 任何一块物质中的原子和分子都是由正负电荷组成的系统. 在导电金属中，有许多电子在荷正电荷的离子构成的晶格中自由运动. 当金属放在电场中时，自由电子就移到金属材料的一侧，使它荷负电，而相反的一侧则荷正电. 这种极化就产生了一个新电场，与原来电场方向相反. 这样，这两个电场就能互相抵消. 类似地，磁屏蔽依赖于这样的事实，即磁性材料的每一个原子都是一个小磁石，它的南北极是这样排列的，以产生一个抵抗外磁场的磁场. 在这里屏蔽效应也是来自原子粒子的极化.

为了使引力屏蔽成为可能的引力极化需要物质由两种粒子组成：一种具有正引力质量因而被地球吸引，另一种具有负引力质量因而被排斥. 在大自然中正负电荷是一样多的，南北磁极也一样多，但是至今还没有发现具有负引力质量的粒子，至少是在通常的原子、分子结构中是如此. 因此，通常的物质不可能引力极化，从而不能用于引力屏蔽.

然而存在另外一种物质——反物质——与通常的物质在许多方面恰好相反，包括它的电磁



四维路径(螺旋线)这是一个行星在时空中的路径,即测地线.用两维表示空间,垂直的一维表示时间,这样路径就可以图示了.

性质. 说不定反粒子也有负引力质量，乍一看这似乎是很容易决定的事. 例如说，只要从加速器中产生水平反中子束，然后看它在地球引力场中是向下弯曲还是向上弯曲. 但是这个实验在实际上是做不出来的. 加速器中产生的粒子几乎具有光速；在一公里的水平行程中，引力只能把粒子束弯曲 10^{-12} 厘米，向上向下都是这个数，这只是一个原子核的直径. 同样，也不能用与"缓冲"物质碰撞的办法把它们变慢，如同中子在原子反应堆中变慢那样. 如果反粒子与它的对应的普通粒子碰撞，就会湮灭而两种粒子都消失. 所以，从实验观点看来，反粒子的引力质量的符号问题至今仍是令人痛苦地未能解决.

从理论观点看来，这个问题也没有解决，因为我们还没有一个理论把引力相互作用与电磁相互作用联系起来. 如果将来有一个实验能证实反粒子确有负引力质量，那就会因为它否证了等效原理而给整个相对论性的引力理论以致命一击. 一个反苹果在真正的引力场中会向上落，但它在爱因斯坦的加速飞船中却不会这样做. 如果它这样做了，飞船外面的观察者就会看到它完全没有受力，而以两倍于飞船的加速度运动. 所以，一旦发现反引力就会迫使我们在牛顿的惯性定律与爱因斯坦的相对性原理中选择其一. 作者热切希望这种事情不会通过.

35.

生物科学中的数学

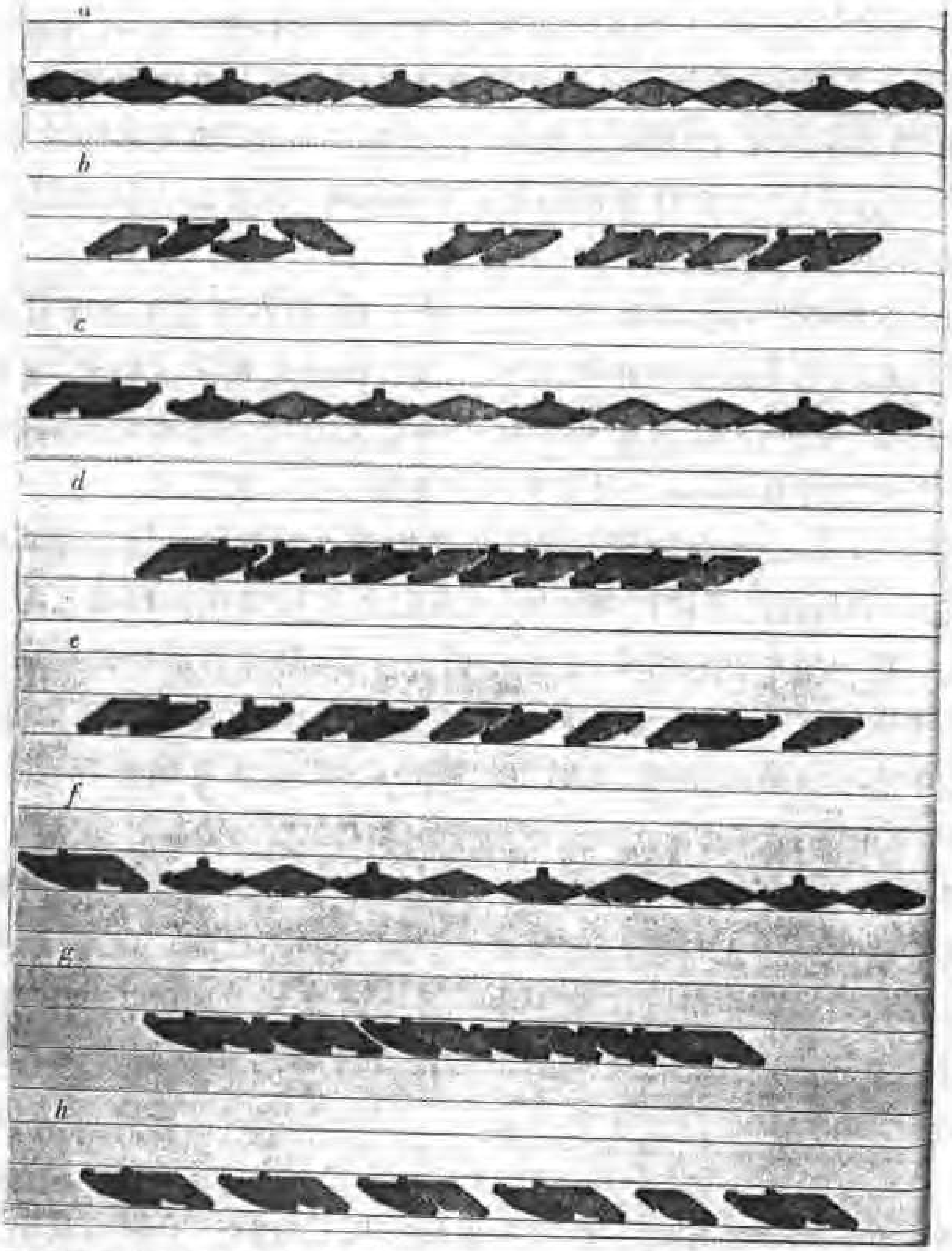
埃德华·F·摩尔(Edward F. Moore),1964年9月号

笛卡儿(René Descarle)把动物(以及人的躯体但不是人的灵魂)看成能用力学来解释的机器.有一次当她给瑞典女王克里斯琴娜(Christina)讲课时,她向笛卡儿质询了下面的问题:但是机器怎么能复制自己呢? 今天的数学家在考虑一个机器的能力与局限时,也会问同样的问题.当他们努力去建立自我复制的详细的数学理论时,他们是在用数学研究一种似乎唯有生物才具有的过程.

数学的这种应用是很罕见的. 过去三百年来,数学与物理学一直是共同繁荣,紧密联系与互相推动(见本书第32章“物理科学中的数学”),但创造性的数学思想对于生物学却没有做什么贡献. 我可以想到少数几个例外. 马尔萨斯(Thomas Malthus)创造了一个数学模型,其中生物群体按几何级数增长,而食物供应则按算术级数增长,促成了“生存竞争”. 达尔文(Charles Darwin)和华莱士(Alfred Russel Wallace)读了马尔萨斯著作后,都从这一竞争中看到了自然选择的机制. 换言之,一个本质上是数学的概念,可以说是有贡献于生物进化的中心思想的发展的.

生物学对数学的贡献同样是很少的. 最值得称道的贡献之一是在群体遗传学中. 英国的菲舍尔(R. A. Fisher)和美国的莱特(Sewall Wright)发展了一个数学模型来说明,怎样把遗传的规律与概率论组合起来说明一个基因会在一个群体中保存或消亡. 莱特的极精巧的模型是以扩散理论为基础的,它引导普林斯顿大学的费勒尔(William Feller)开辟了新的数学领域.

生物学家在日常工作中当然要用数学. 他们和其他的研究者一样必须对其结果作统计检验



自我复制是已经用数学来研究的生物过程之一．图中的两种形状不同的（一个背上有突起，另一种没有．正文（459 页）分别称为 *A* 和 *B*）"生物"是遗传学家彭罗斯（L. S. Penrose）所设计的基本的自我复制机的两种不同类型的零件．如果把这些零件放在一个塑料盘中（*a*）并将此盘从一头到另一头地摇动，这些零件就会挤来挤去但是不会连接起来（*b*）．但是，如果放进一个"种子"或机器即（*c*）中最左的一个单元，即正文中说的 *AB*，再去摇晃，种子就会使其他零件倾侧，它们就会连接起来形成更多的 *AB* 单元（*d*）；在（*e*）中把这些机器分散看来以便看得更清楚．但若引入另一种种子，正文中称为 *BA* 种子（*f*）它与（*c*）中的种子不同，摇晃以后就会出现更多的另一种机器（*g*，*h*）．机器"正在繁殖"．彭罗斯的生物是用胶合板做的；这里的则是贝尔电话实验室用铝做的．

(有些检验方法正是菲舍尔发展的),他们通常所发现的结果用解析几何的曲线画出来.热力学的数学方程是生化学家所熟悉的.统计方法在解释遗传密码与编制基因图谱时有用.事实是,这一切都是常规数学.虽然有不少建立"数理生物学"的谨慎的企图,绝大多数都未做到自己早前许诺可以做到的事.然而有可能,应用计算机的新的数学研究,会比过去只能限于生物过程的过分简化的数学模型,做得更多一些.

数学对于生物学的特殊作用并不在于它是一种工具,而在于它的抽象化的力量.这样可以把基本的问题暴露出来和把表面互不相关的实体和过程的关系显示出来.生物也是机器,只不过是高度组织化的机器.在我看来,数学和生物学有意义的结合将从对于对生物学的基本问题有关的机器理论作逻辑的考察而来,所以本文将主要限于这一类思考.

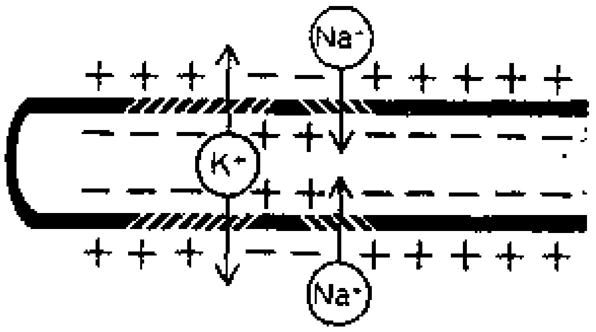
香农(Claude E. Shannon)于麻省理工学院和斯坦福大学的麦卡锡(John McCarthy)曾经有一次指出,当人想找一个与人的躯体作类比的机器时,他们所选用的机器一定反映他们的时代.笛卡儿把人体比之于精巧的水钟和喷泉;本世纪稍早一些,脑被看成中央电话局;近来则电子计算机成为与生物作比较的首选机器.可能是由于这个原因,绝大部分近年来探讨生物和机器的关系的研究者都集中于中枢神经系统.他们想问两个问题:能否把脑解释为一种计算机?能否造一个会像脑一样"思维"的计算机?

有好几种研究的路线,但绝大多数都是以"自动机"为中心概念的.自动机事实上是一种理想化的机器或机器部件,或当坚持与神经生理过程的类比时,自动机也可以是一个理想的生物或生物的部分如细胞.在自动机理论中,并不研究其内部的工作状况而研究其外部表现.用已故冯·诺依曼(John von Neumann)的话说,机器或生物体的组成部分"是看成一种自动运作,不必揭示其内部的结构,但要求它对某些一定的无疑义的刺激能作出一定的无疑义的反应."

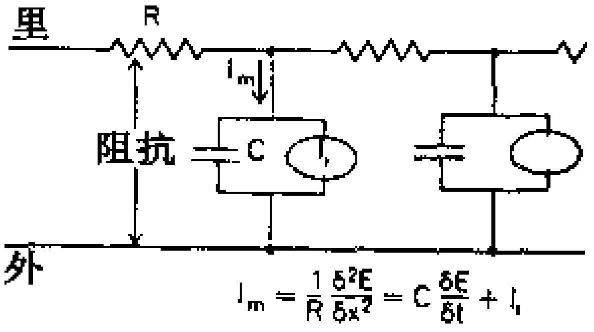
这种抽象机器最有用的.类型之一是"有限状态机"或称"有限自动机".这是一个有有限多个离散的内部"状态"的"黑盒子".它通常也有有限多个输入和输出.它在任意时刻 T 的状态和输出,以任意方式依赖于前一时刻 $T-1$ 时的状态和输出.设有一个有限自动机以及一组使它从一个状态转到另一状态的规则,就能由其开始时的状态和以后依次时间的输入,来确定自动机在后来任一指定时刻的输出.由输入得出输出的规则,可以用表格或图形来表示(见 453 页上图).在讨论有限自动机时,重要的是要懂得态的概念.例如,若一自动机是一个组合锁的抽象模型,它的态就是"未锁闭"即"打开",这时自动机就是锁的内部状况,即那些看不见的齿轮、杠杆之类所处的位置,只要把锁外面的号码盘转一转,它们的位置就会变化.

神经脉冲的一个数学模型

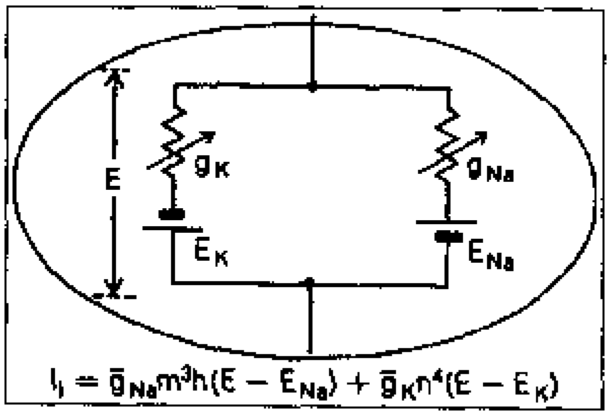
生物科学的数学建模的一个最常见的主题是神经元或神经细胞以及神经网络. 有一些模型如同摩尔在正文中说的，与生物学的事实相距甚远. 然而另一些模型则力求解释神经细胞和纤维的真实功能. 由剑桥大学的霍奇金(A. L. Hodgkin)和赫胥黎(A. F. Huxley)建立的神经脉冲模型就是一个经典的例子.



神经脉冲是在穿过神经元之膜时电位差的波动形的变化. 在脉冲相上升时，钠离子进入神经元，相下降时则离去.



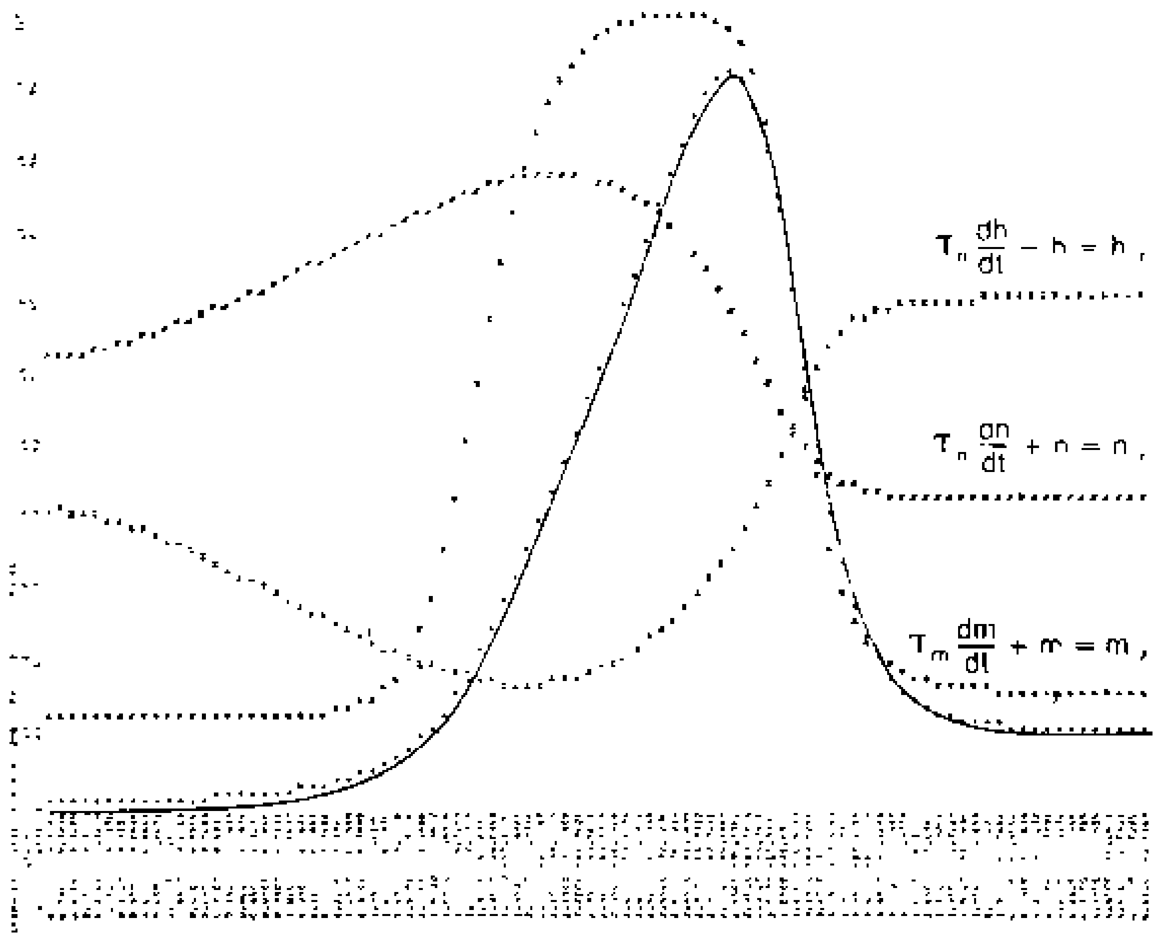
神经元可用电路以各种元件来模拟其沿电神经元的阻抗，膜电容以及离子流(I_i).



离子流元件有钾和钠的电池，各有可变阻抗. E 是膜电位.

沿神经细胞的电缆形的轴突传播的信号是振幅为 100 毫伏，时间为 1 毫秒的电脉冲. 这个脉冲以定速传播. 它的形成机制是，沿轴突各点都会再形成脉冲；所需能量则来自轴突内外离子的分布. 在轴突内，钾离子浓度较高，如果轴突膜只容许钾离子透过，则膜两侧电位差就是钾的平衡电位(E_K)，约为 75 毫伏，而内侧为负. 钠离子则在外侧浓度较高，如果膜只容许钠离子透过，则膜两侧的电压是钠的平衡电位(E_{Na})，约 50 毫伏，且轴突内侧为正. 事实是膜对离子之可透性随电位之变化而激烈改变. 在平静状态，膜对钾中等程度可透，电位为 −60 毫伏. 若有人为的刺激或前来的神经脉冲使此电位下降，则膜立即成为对钠离子高度可渗透，于是钠离子进入轴突；这个活动区域的电位立刻变正. 然后，钠的可渗透性几乎立刻关闭而钾的可渗透性上升，而当神经脉冲通过此轴突后，膜电位恢复到平静状态时之值.

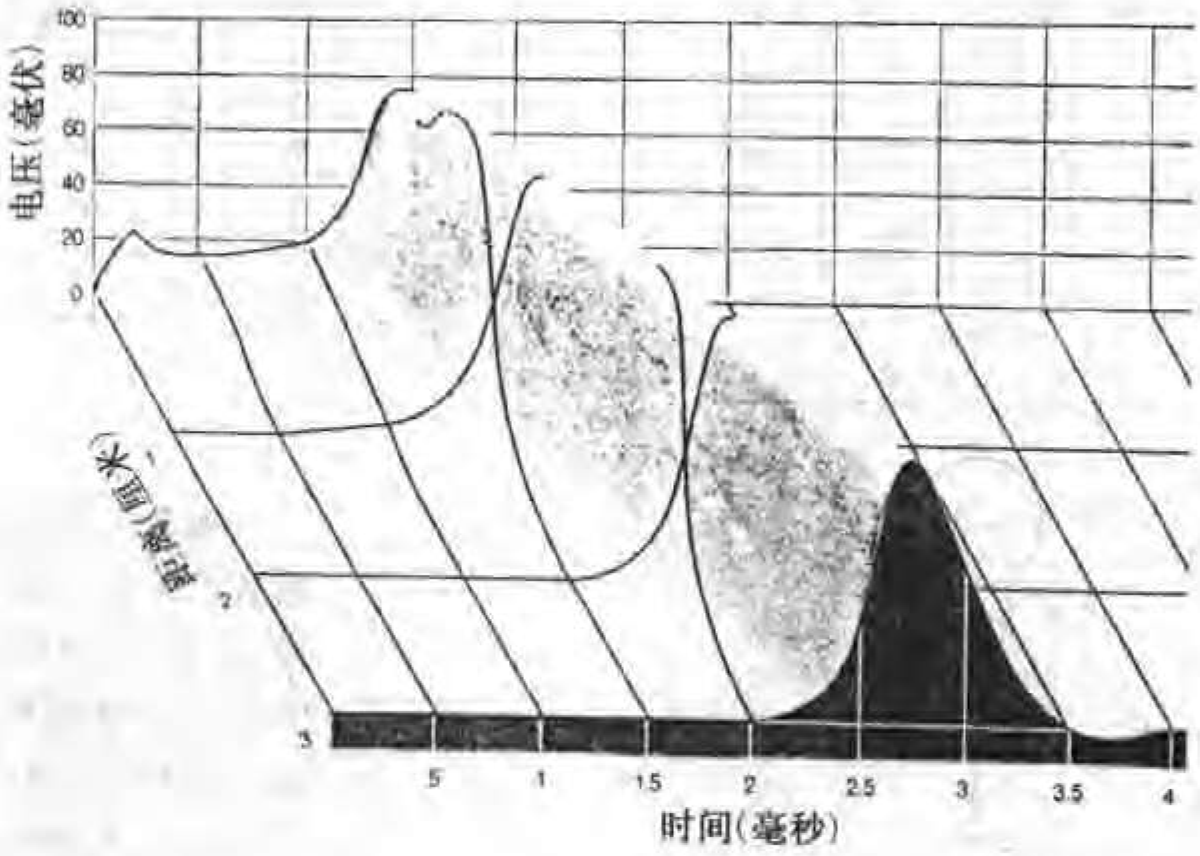
在英国和美国有一批研究者确定了，神经脉冲或作用电位的传播，基本上是一个电过程而由中图中的非线性偏微分方程描述. 这方程的含意是，经过任意一段膜的电流(I_m)等于从纵向流入和流出的电流之差，而后者又等于膜的电容电流加上流经此膜的离子所带的电流. 离子电流又怎样依赖于膜电位呢? 直到 1949 年霍奇金和卡茨(Bernhard Katz)才发现钠—钾的交替对于脉冲的相的上升与下降的效应. 1952 年，霍奇金与赫胥黎使用了柯尔(K. S. Cole)在位于马萨诸塞州伍兹霍尔的海洋生物实验室 (Marine Biological Laboratory) 发展起来的技术测量了膜电位为常数时的离子电流. 他们从这些数据中导出钠和钾的可渗透性与膜电位的关系. 他们把所得的定律写成了一组微分方程.



计算机打出的曲线表明膜电位和钠和钾的有效电导在固定时刻沿轴突怎样变化.距离的尺度是从0cm(左)到4.55cm.用星号画出的是电位曲线(并用实线描出使它更清楚一点),尺度为0到90毫伏.0表示膜的静止电位－60毫伏.另外三条由字母组成的曲线表示膜的离子电导的变化:M(钠的活性),H(钠的非活性),N(钾的活性).它们的值均在0,1之间.这些变量分别满足写在曲线上的非线性微分方程.各方程中依赖于电压的时间常数和稳态值都由实验确定.

上页的右图表示造成离子电流的活动的离子流元件.图上的方程表示离子流怎样由每个离子的电化学驱动力和比电导生成.钠和钾电导依赖于三个由实验测定的无量纲变量:m,h和n.这些量分别满足一个微分方程,分别标在本页上图相应的曲线上.方程中的时间常数(即图上的τ)与稳态值(m_∞,h_∞和n_∞)只是膜电位的函数.这里三个方程加上前一页图上的两个方程共五个方程就是霍奇金-赫胥黎模型.

若设电位脉冲以常速行进,这些方程就会给出脉冲的波的形状并对其他观察到的现象作出充分的描述.然而为了考查由于刺激而起的脉冲的瞬态的构成就需要更一般的解.最近,道奇(Fred Dodge)库利(James Cooley)和科恩(Hirsch Cohen)在IBM的研究中心用差分方程代替这五个方程完成了计算机计算.本页上图的一组曲线就是他们的结果的一部分,表明钠和钾的电导与电位的关系.下页的三维图像表明脉冲的形成且趋于有定形常速.方程的这个新解法也使我们能研究在轴突中的脉冲有分支或其他几何变形时的传播.



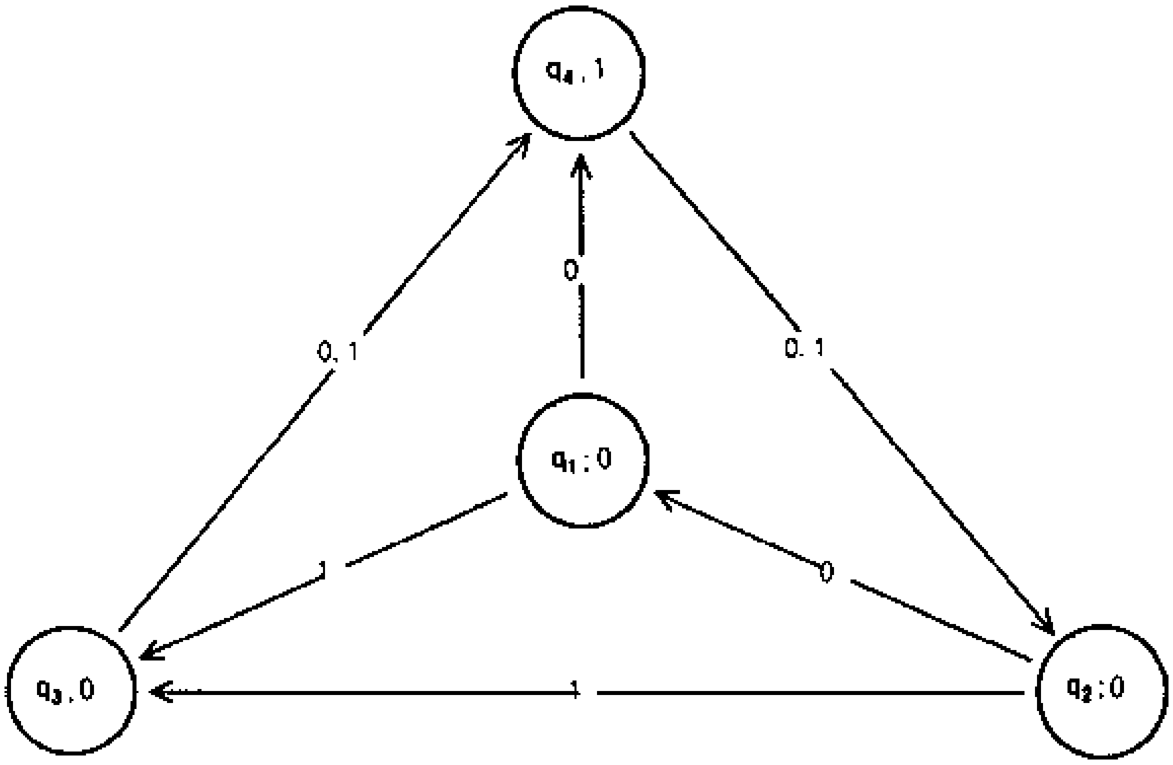
神经脉冲在时间和空间中移动的三维图像是由计算机给出的许多曲线作出的，它把电压表为沿轴突的距离在各个时间区间中的函数(深色曲线). 图像表出，一个很短的刺激(0.2 毫秒)启动了电位的变化，它先停留在阀值附近，然后跳起变成作用电位，图像还表示神经脉冲怎样有了定形和定速.

麻省理工学院的麦卡洛(Warren S. McCulloch)和皮茨(W. S. Pitts)建立了一个关于生物神经系统的基本单元——神经元或神经细胞——的抽象的高度简化的模型. 这实际上是一个有限自动机且只有两个可能的状态——激活或否. 他们把这些模块即形式的神经元组合成神经系统的种种模型，后来，威斯康辛大学的克林(S. C. Kleene)证明了一个一般的定理，刻画出麦卡洛-皮茨神经元的网络可以期望会有的种种性态. 克林的定理后来被直接用于任意的有限状态机器而不再考虑神经元. 开始是打算分析神经系统，最终却成为逻辑和电机工程方面的理论进展.

英国逻辑学家图灵(Alan Turing)对于"思维机器"则采用了另一条途径. 对于脑的生理学，他不作任何假设，而力求用逻辑来定义一种自动机，它在原则上能够执行任意准确规定好的计算. 图灵机的工作原理是把一切计算都化为为数极大的最简单的运算. 它是一个有限状态的自动机，但附有一条无限长的"磁带". 指令写在磁带的一个有限部分上；只要时间足够，步数也足够，机器的"磁头"就能读出这些指令，并且把答案打印在磁带的其余部分上. 图灵证明了，甚至能设计出可完成任意可能的计算的"万能机". 如果把要完成的任务以及能够完成这个任务的机器都交给了万能机，它就能自动找出如何完成这个任务，然后自动完成它.

前一状态	当前状态	
	0	1
q_1	q_4	q_3
q_2	q_1	q_3
q_3	q_4	q_4
q_4	q_2	q_2

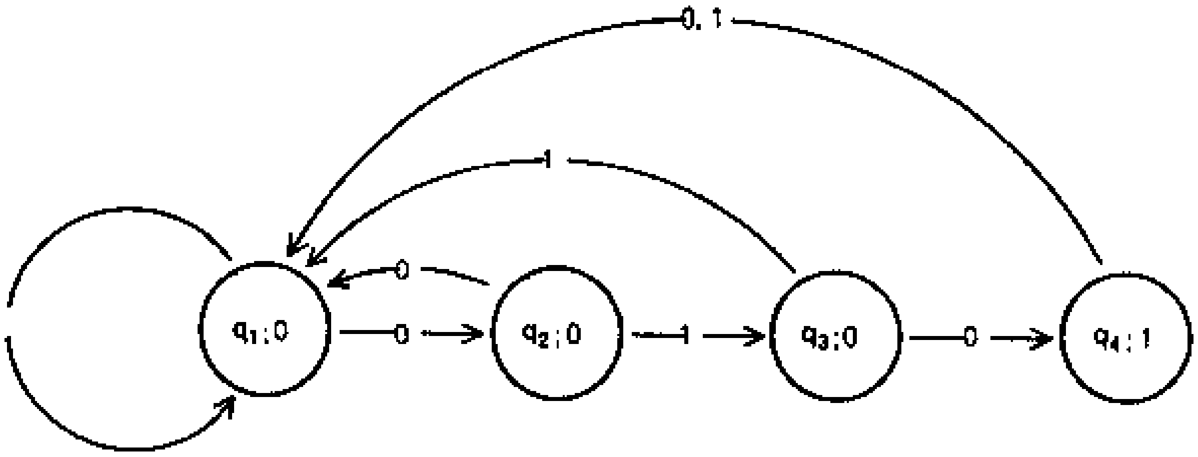
当前状态	当前输出
q_1	0
q_2	0
q_3	0
q_4	1



有限自动机是一个理想的机器或机器的一部分；在自动机理论中，它是从神经网络和计算机线路直到自我复制机等系统的基本组块. 自动机可以用两个表描述，其一（上左）表明在单位时间内根据输出不同，状态的变化. 其右表明每个状态下的输出. 这种描述也可以图示（中）. 顶点是状态和输出，边上是各个输入下的转化.

前一状态	当前状态	
	0	1
q_1	q_2	q_1
q_2	q_1	q_3
q_3	q_4	q_1
q_4	q_1	q_1

当前状态	当前输出
q_1	0
q_2	0
q_3	0
q_4	1



组合锁可以描述为一自动机. 输入序列就是组合. 在这个简单例子中，输入是 0.1，而输出 1 表示"开锁".

捕食中能量转移的模型

生态学，即生物与环境的相互作用的研究，是生物学中越来越要应用数学的一个领域，这种数学可以称为“建设性”的数学，即用以建立能给出预见和生物学的洞察力的数学. 下面是对这种数学的一例的简介，即密歇根大学的斯洛博德金(L. B. Slobodkin)关于捕食的研究. 斯洛博德金在实验室里用一种小的淡水甲壳纲动物(学名 Daphnia)的群体作实验，测量了它的食物(藻类)作为一个群体所含的热量(卡数)，以及它以不同速率被作为食料(把 Daphnia 从缸里拿走表示它们被捕食了)的群体所提供的热量(卡数). 他的推理如下：

如果对一个稳态的群体单位时间内输入的能量为 I，而且如果在没有捕食行为时，“固定收获”即群体的总热量容量为 P，维持一卡热量的收获一天之内所消耗的输入卡数为 c，则

$$I = cP.$$

若有捕食行为使固定收获 P' 减少；再设消耗有一改变量为 Δc，则在有捕食时有

$$I = (c + \Delta c)P' = cP' + \Delta cP'.$$

方程的最后一项表示捕食的效应. 若用另外的方法考虑这种效应，又会得到

$$I = cP' + \sum \frac{Y_i}{E_{pi}}.$$

新式子中有一项未知，即种种不同的产出(Y_i)除以 E_{pi} 之和. E_{pi} 是无量纲数，即“回归系数”，把它们引进来是为了防止直接把 I(藻类)变成 Y(Daphnia)而没有考虑到由藻类 I 到 Daphnia(Y)时会发生的事. 检查这个方程就会看到，E_{pi} 越大，则在一定产出之下群体的流失就小. 斯洛博德金在测量了 I，P' 和 Y_i 后，从方程求出了 c 和不同的 E_{pi} 值. 后来发现，若 Daphnia 的 E_{pi} 值高. 这说明 E_{pi} 应该等价于某个在生物学中有意义的式子.

现在，对每个将死的动物都给定一个为了替换它所需的能量，于是在一段时间内为了替换从稳态群体中死去的动物所需能量之和恰好等于这段时间输入该群体的能量. 所以，如果替代一个年龄为 i 的动物的消耗是 K_i，在单位时间内有 D_i 个这种动物死去，则在没有捕食行为时

$$I = \sum_i K_i D_i = cP,$$

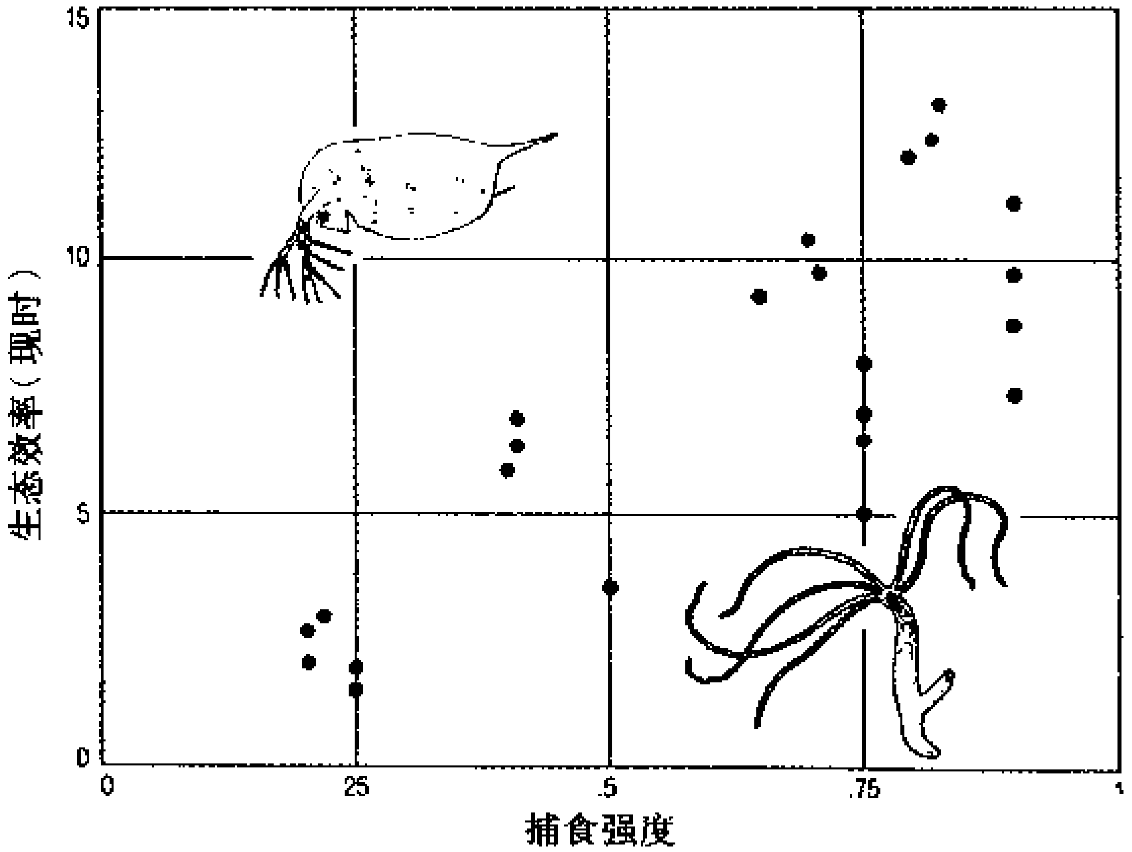
在有捕食行为时则有

$$I = \sum K'_i D'_i = cP' + \Delta cP'.$$

现在假设只有一种食饵 k，则由以上各式计算可得

$$E_{pk} = \frac{Y_k}{\sum k'_i D'_i - \frac{P'}{P}\sum K_i D_i}.$$

此式表示捕食将死的动物无论如何都会使死亡的两种分布之差极小，因而无论对捕食者或食饵都是最好的 它既使捕食者有最大的稳定的收获，又使群体能经受捕食. 这样，在大自然中可以期望捕食者与食饵将进化到这样一种关系，使作为收获的动物数量有最大值. 对于捕食者，这意味着去捕捉它能得到的最大同时又最弱的动物. 对于食饵它建议应有这样的寿命分布，使除被捕食以外的死亡原因集中在主要捕食者通常捕食的年龄水平上.



生态效率将达到 7% 到 13% 间的最大值，不论是 Daphnia pulex（左上）或腔肠动物 Hydra（右下）的各个种都一样.

斯洛博德金把回归系数 E_p 称为"群体效率"，它就实际的捕食行为和衰老化的机制提出了新的问题. 它甚至会提示一种新的理论，虽然它不能给出唯一的数值预测. 在这一方面，它与另一个关于效率的概念，Y/I，即"生态效率"不同，后者对于不同的物种有相当固定的最大值（见上图）. 这个值虽然可以预测，迄今尚无解释. 换言之，对比值 Y/I 还有待建设性的数学分析.

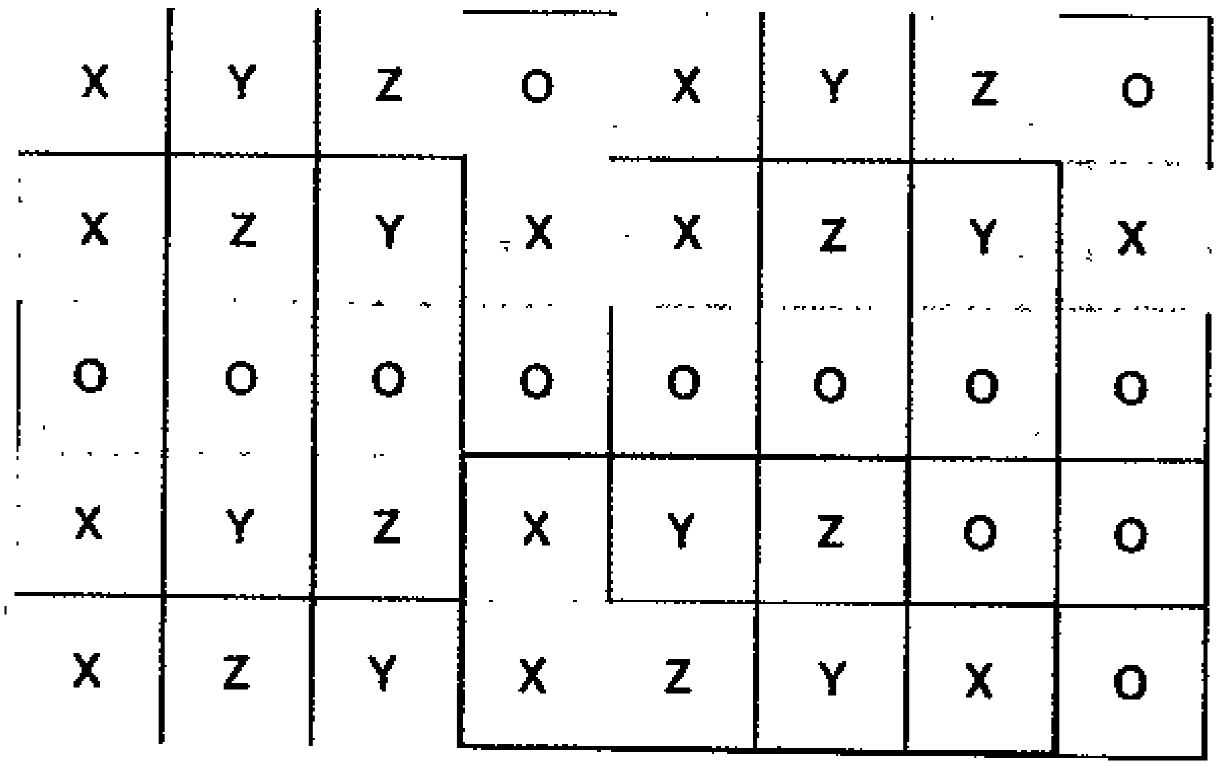
麦卡洛-皮茨神经学模型和更抽象的图灵机二者激发了对思维的本质和机器的极限可能性的有趣的思考. 例如，自动机专家一直试图模仿生物系统的自我修复能力以及当元件不可靠时仍能可靠地运行的能力. 冯・诺依曼通过引入冗余性说明了怎样造一个机器，即令其某些部件坏了，仍能很好地工作：冗余性例如对于计算机就是准备多加一些逻辑元件，并在元件之间建立多重通道. 自我修复和冗余性二者对于计算机和其他电子技术显然都是重要的，现在都在进行

认真的研究.

事实仍然是,生物学的神经元并非简单的开关:在一定时刻要么就是激活要么就是不激活,计算机也不是"思维机器".可能有更好的方法来建造计算机而不是模仿我们自己理解的脑,也有可能有更好的方法增进这种理解而不必过分简化神经元的行为.我时常感到,去设计过于简化的神经元,以此作为制造"思维机器"的种种努力.很有点像古代那种企图制造人工羽毛使人能够飞行一样:鸟的飞行显示了空气动力学的某些原理,与飞机的设计有关,但细节很不相同.至于用逻辑来说明脑的功能.似乎还远远超出了现时的能力.冯·诺依曼曾提出,对脑的特定形式的运作可能是最简单的描述方式,是把全部神经的联结都图示出来!可能会有一种能解释脑的数理逻辑,但其复杂性要比数学家制定的任何东西高出好几个数量级.

生物或许还有什么更易作逻辑分析的特性?很可能是自我复制.它肯定是生命的最原始的方面.绝大多数生物不会"思想",很多生物根本没有神经系统,但是它们都能复制自己.很有可能,自我复制从逻辑上说,会比思维简单得多.如果能找到复制的逻辑格式,至少就可以弄清这个过程中有哪些重要问题,说不定甚至可以找到解决这些问题的某些途径;这反过来又可以告诉生物学家应该去寻找什么,并对某些正在深入研究的生物学过程给以启示.

冯·诺依曼是第一个考虑怎样制造一架能自我复制的机器的人.他给自己规定的任务是,



铺砖就是把平面分成正方形小块.图上的阵列是 40 个小块,其状态各表以 X,Y,Z 和 O(静止).总的图形中有一个 7 个小块组成的图形(灰色)的三个"复本".复本必须是"离散子集",第四个(即用黑线框出的)集合虽然形状与其他的一样,却不是复本,因为它不是离散的.

如他有一次自己说的："能不能从(简单的)元件中做出其一个组合来，使得当把它放进一个水库中，而其中又漂浮着许许多多这些元件，它就会建造出其他的组合，每一个组合最后又成为和原有的自动机完全相同的自动机?"他进而证明这是做得到的：一个适当地造出来的机器，放进一个"仓库"环境中，它就会四处漫游，把零件拼起来以复制自己，到一定时候，就会有 2 个，4 个，8 个，16 个机器，仿此以往只要零件够用，地方也摆得下.

这乍听起来很荒唐，甚至可笑. 然而，这难道不只是一个程度问题吗? 如果把某种物质的少数几个分子组成的小的晶体"种子"，放在由多个同类分子的环境中，并有适当的温度和压力，种子就会使更多分子组成同样的晶体形状. 从这个角度看，晶体的生长也是自我复制. 拉上拉链也是这样：在由排成一列的许多小钩和一个拉链头组成的环境中把两个小钩放在一起；然后其他小钩也跟上来构成一系列"扣在一起的两个小钩"这样的"机器"，这是一种一维晶体.

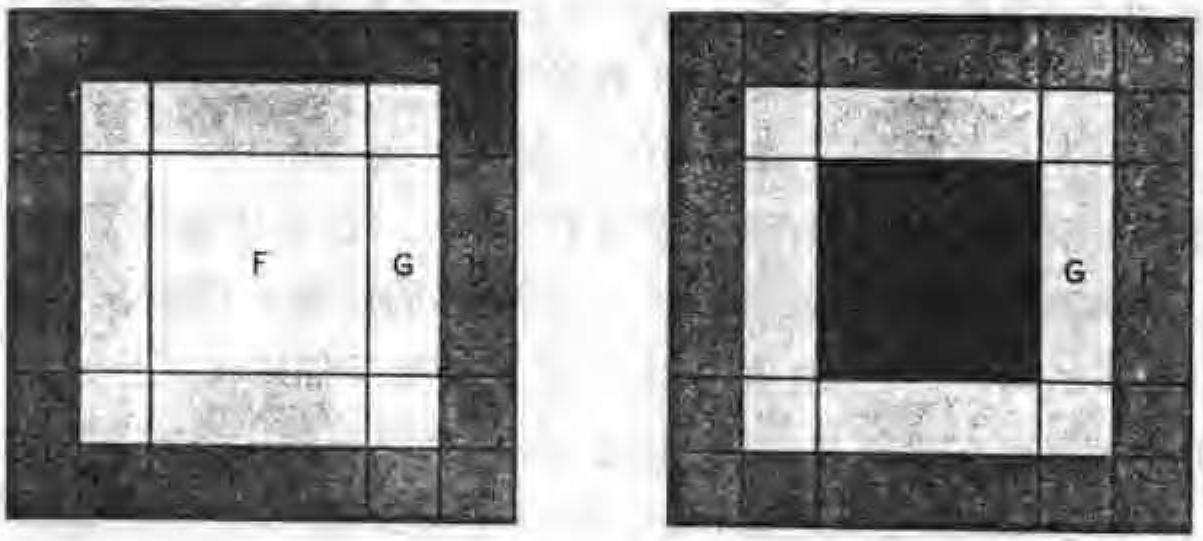
这些肯定都是不足道的，其不足道在于其中只有一个简单的态的变化：由无定形到晶体，由两个小钩的分到合. 商业机器的穿孔卡片又如何呢? 它是一个"机器"而且能复制其自身——当然要在一个复杂环境的支持之下：即穿孔设备，它提供复制卡片所需的绝大部分组织工作.(但是注意，有些单细胞生物在简单的营养介质中就可以复制自身，高级生物就可能依赖于复杂的环境，其中含有如维生素那样复杂的成分). 所以，真正的问题在于，如何在简单的环境中生成复杂的机器——即由个数众多但种类(或"状态")可能不多的零件所成的机器. 这就是冯·诺依曼的自我复制模型所完成的事.

仍然可以追究冯·诺依曼的模型与生物的复制有什么有意义的关系. 他所遇到的第一个逻辑困难之一，以及他如何解决这个困难，就是这种关系的好例子. 他很快就认识到，告诉机器如何复制自己的指令不可能是完全的. 如果想要这些指令是完全的，则它们不仅要能描述自动机，而且要能描述指令自身；蓝图还要有蓝图，仿此以往成无限递推. 绕过这个问题的方法是造两个机器各以不同方式对蓝图进行操作. 其一是蓝图复印机(C)，其二是蓝图服从机(O). 二者组合起来，再加上一个排序装置(s)，在适当时间启动每个机器，再加上描述这三个元素全体的蓝图(B_{c+o+s}). 整个机器可以用符号写为 $C+O+s+B_{c+o+s}$. 给出了整个机器的蓝图后，C 将它复印出来，O 则按照此蓝图造出 C，O 和 s.

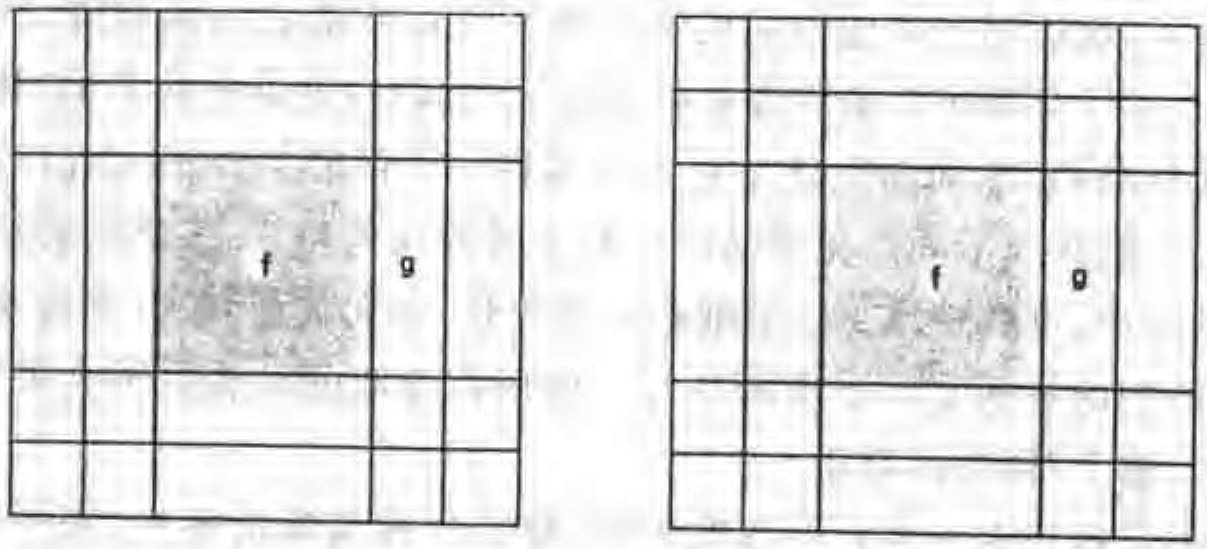
近年在遗传化学中的新发现表明了冯·诺依曼的元素和活细胞中的过程有惊人的平行性. B 是一组由去氧核糖核酸(DNA)组成的基因，其上有遗传特征的密码. C 是 DNA 聚合酶，它催化了 DNA 的一条链的复制，从而复制了基因. O 是信使核糖核酸(RNA)，酶和核糖体组成的系统，它把胺基酸按 DNA 所定的指示组合起来，合成酶和其他蛋白质从而造成新细胞.

冯·诺依曼早年的模型可说是"运动学的"，因为它处理运动中的物理零件，然而从来没有

造出来过. 但有些比较不那么一般的运动学模型是造出来过的. 其中一个由布鲁克林学院的贾柯布逊(Homer Jacobson)设计的自我复制机就是一列玩具火车厢;车厢就是零件,控制则由置于各车厢内的线路来实现. 当不同车厢按一定次序组成一个列车并放在铺好的轨道上,它就会彼此冲撞成为彼此分散的车厢,而重新排列(必要时应用支线),并按某个列车的样子组合起来. 贾柯布逊设计了这样一个列车模型,不论列车多么长都行,他还实地造出了一个演示用的模型,使一个有两车厢长的列车可以复制自己.



构形在 T 时刻是两个同样大小的阵列如图. 内层的两个构形互不相同. (图上的内层阵列有特定的大小,但是任意大小都行). 两个标了 G 的构形是邻接于内层阵列的中空正方形,它们是相同的. 两个 H 也是这样.



新构形是上面的阵列在 $T+1$ 时刻的情况. 两个内层构形映射到新构形后成了彼此相同的. 中间的阵列仍是彼此相似的. 外层阵列的状态不能确定. 如果如上图那样两个不同的阵列,后来成了下图那样完全相同的,就说是"彼此可抹掉的".

英国遗传学家彭罗斯采取了另一种途径，这部分地是受到他关于遗传物质复制的可能方式的思考的刺激. 彭罗斯的机器之最简单的形式有两种零件 A 和 B，其上各有简单的切口，切口的形状使它们能以两种方式之一钩起来. 一个方式记为 AB，另一个记为 BA*. 若把一个 AB 机放在盘中，而且盘内放了许多 A 和许多 B，把盘摇动，就会形成许多 AB 单位；第一个 AB 机就像是种子(见 448 页插图). 如果用一个 BA 机作种子，则复制出的是更多的 BA.

运动学模型好处在于实际生动，但用数学处理极为困难. 冯·诺依曼后来的工作就转向抽象模型，他抛弃了硬件，从而避免了所有关于机械运动、装配和操作等问题，给自己提出了更纯粹为逻辑和数学的工作，而不是机械或电机工程的工作. 他用一个数学环境：铺砖来代替仓库；铺砖就是把平面分成正方形细胞. 每个细胞中他放进一个基本元件：一个有限状态自动机. 冯·诺依曼的机器没有输入或输出，而只有若干个可容许状态. 这些状态以及由一个态转向另一个态的规则对于每个细胞都是一样的，虽然在任一时刻，不同细胞的状态各不相同. 每一个机器都是决定论的而且是同步的：在每一整数值时刻 T(除了初始条件即在 $T=0$ 时)，每个细胞的状态都取决于它自己和相邻细胞在时刻 $T-1$ 的状态. 有一个特别的状态称为"平静"态，而最多除有限个细胞以外，所有其他细胞都处于此态，此态有一特殊性质，若一细胞和相邻细胞在 $T-1$ 时刻都处于平静态，则此细胞在时刻 T 也是平静的. 这整个系统——铺砖空间，细胞中的机器，可容许态和转换规则——总起来称为一个"铺砖结构". 细胞所成的一个有限块或"阵列"，在每一个细胞的状态都规定了以后，就称为一个构形.

这些定义与机器和复制有什么关系？把整个铺砖空间看成一个极抽象的环境——其中时间与空间都量子化了，而运动和其他形式的渐变都被代以离散状态的相继，状态之间的转换由确定的规则描述. 在这个环境中有由正方形细胞构成的构形；这就是我们的"机器"，正是这些机器可以造成可自我复制的. 个别细胞就是基本的零件——可能是分子. 它们的变化的状态可能是不同的量子态——能级或不同的化学活性态和不同的几何位置. 态之间转换的规则就是这个环境的物理或化学定律，这些定律决定了细胞如何变化，如何彼此相关. 平静态细胞就是还没有用上的原料，而平静态的规则实际上说的是与一构形相分离的细胞决不会突然有了活性；机器只能通过局部作用"够上"周围的物质.

所以，问题就在于用只有不多几个态的细胞(换言之即简单的零件)来构造一个铺砖结构，选择一些转换规则，然后再把细胞排成一个构形，使在一定时间后即可复制自身. 这个工作多少有些像为计算机写程序. 冯·诺依曼提出一个进一步的要求：每个构形中都要含有一个万能图

---

* 译注：这一句是译者加的.

灵机. 然后他几乎完成了做一个由 20 000 个细胞和 29 种可容许态的自我复制机的绝大部分细节. 当他于 1957 年去世后，其他人继续研究铺砖模型，检查其构造的细节，并力求对复制的逻辑得出一些可以证明的定理作为结论.

我问过这样一个问题：自复制群体能够生长多快？答案是：它不能有指数增长——例如说不可能一代翻一番. 二维构形群体在任何时候都不能多于时间平方的某个倍数. 我们把这个结论叙述为一定理：若一个自我复制构形在时间 T 内能复制出 $f(T)$ 个后代，则有一个正常数 k 使得 $f(T)\leqslant kT^2$（记号"$\leqslant$"表示"小于或者等于"）.

证明如下：令 c 为此自我复制构形，而能够包含 c 的一个复本的最小正方形阵列之大小为 $D\times D$. 则在任一时间 T 内非平静细胞的总数至多是 $(2T+D)^2$，因为在每个单位时间内，正方形阵列只能每边增加一个细胞. 若 c 中有 r 个细胞，则

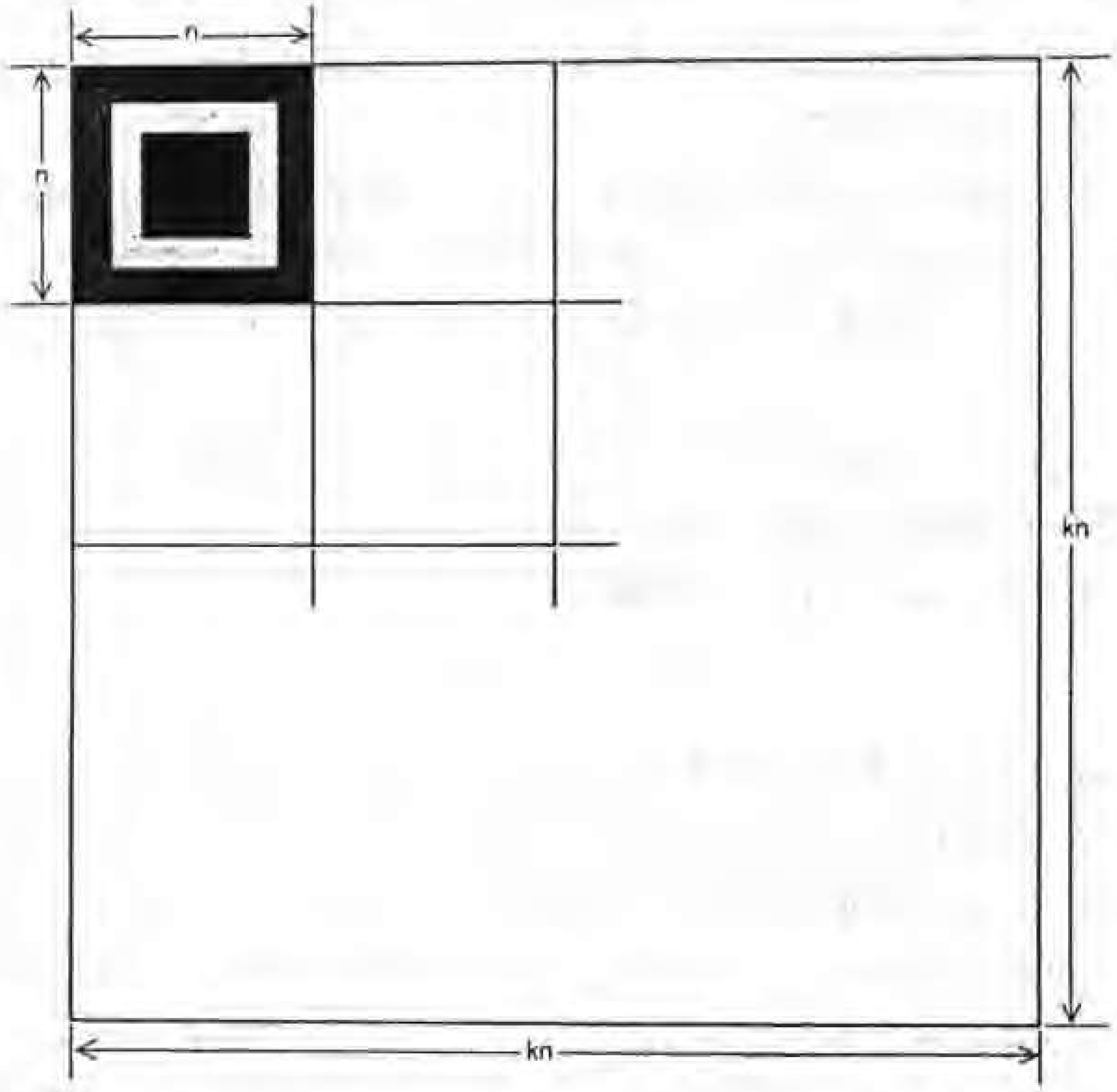
$$f(T)\leqslant\frac{(2T+D)^2}{r}.$$

把这个不等式再简化几步就可得定理的结论. 这正是马尔萨斯的情况：因为非平静区域的传播速度不能超过一定值，所以群体要受到可用空间的限制.

另一个重要问题是：每个构形都能复制自己吗？事实是，有一些构形，除非一开始 $T=0$ 时就存在，后来就不会出现. 这种构形是不能构造出来的，即是说没有一个构形可以按特定的转换规律把它生成出来. 普林斯顿大学的塔克尔（John W. Tucker）建议把这种没有祖先的一块细胞称为"伊甸园构形". 因为这种构形不能从任意其他构形产生出来，它们不能自我复制. 所以，研究它们在什么条件下会出现，会有助于确定机器自我复制能力的基本限度.

这些条件涉及到完成"抹掉"这件事的能力. 如果一块黑板被抹掉，就说不出来上面原来写的是什么. 计算机设计者用"抹掉"这个词是指对计算机存储单元作这样的操作使它回到标准状态而不问它上面在抹掉之前存储了什么. 一般说来，抹掉是一个不可逆过程；如果它发生了，就不可能说出现在的状态由之而来的前一状态是什么. 于是，至少曾有两个不同的以前的状态，经过转换可以变成相同的现在的状态. 在铺砖结构的场合，有必要比较形式地定义什么叫抹掉，以便肯定关于以前状态的信息确实是被抹去了而不是仅仅移到某个相邻的状态中去了.

为了建立这样一个定义，考虑 458 页上图中的两个构形——两个由 9 个细胞构成的内层阵列的构形在同一时刻是不相同的；称为 F 和 F°. 同时中间阵列——即紧靠着内层阵列的中空正方形——的构形是相同的 G；即是说有一个中间阵列是另一个的复本. 外层阵列的构形也是这样，即均为 H. 现在考虑这些阵列在一个单位时间后映射而成的构形（见 458 页下图）. 如果在这些 $T+1$ 时刻的阵列中，内层和中间层的构形 f 和 g 互为复本，就说原来的构形已被"彼此抹掉"——它们原本是不同的，现在变得相同了. 注意，外层阵列的最终构形无法确定，因为它的细



伊甸园定理(见正文)可用这个图解来证明. $n\times n$ 的小阵列有一可抹掉的构形. 大阵列之大小是 $kn\times kn$. (图上取 $k=4$, 但实际上可以大得多.) 图上是 T 时的阵列. 在 $T+1$ 时, 它会缩小成 $(kn-2)\times(kn-2)$.

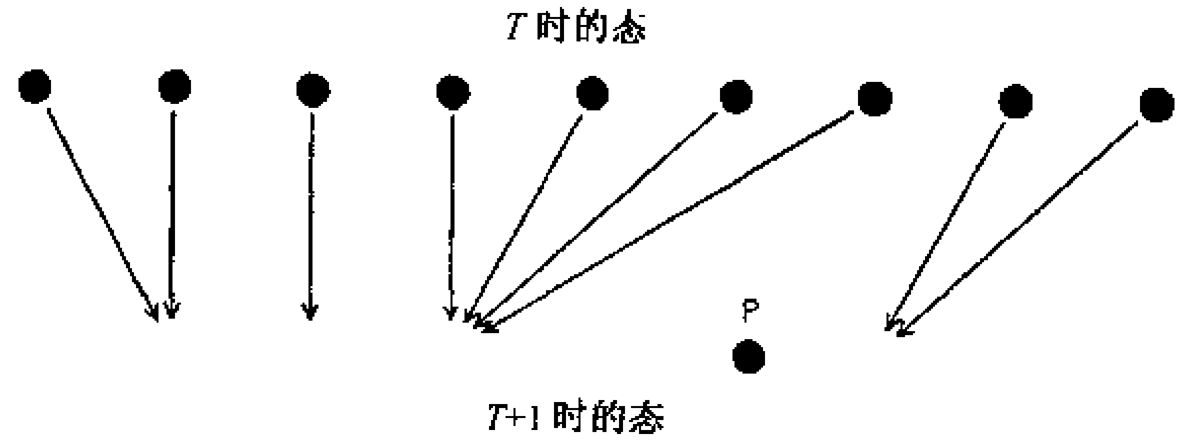
胞的状态要受更外层在定义中没有考虑到的细胞的影响; 它的功能就仅在于"保护"中间层阵列. 于是我们说一个构形是可抹掉的, 如果有另一个构形可以与它彼此抹掉. 由这个定义进一步还可得知, 如果一个可抹掉的任意形状的构形包含在一个矩形阵列之内, 则此矩形阵列也是可抹掉的. 结果我们可以就矩形阵列而非任意不规则形状的阵列考虑可抹掉构形问题, 这要容易一些.

现在可以提出一个定理了: 若在一个铺砖构造中存在可抹掉构形, 则必存在伊甸园构形. (虽然可以作出不含可抹掉构形的铺砖结构, 这种结构基本上是不足道的).

我只概略地直观说明这个定理的证明而不详细证明它. 令 n 为一整数而有一个大小为 $n\times n$ 阵列含有一个可抹掉构形. 考虑一个更大的 $kn\times kn$ 阵列(见本页插图). 它分成的 k^2 个大小为 n

$\times n$ 的阵列都适当地大而可以容下一个可抹掉构形的复本；k 选得足够大使大阵列中时常有许多这种可抹掉构形. 若每个细胞有 A 种可容许状态，则整个阵列在时刻 T 共有 $A^{(kn)}$ 个可能的构形. 下一步考虑第一个阵列经过单位时间后映射成的构形. 记住，在 $T+1$ 时最外层中空正方形中各细胞的态是不能确定的. 所以 $T+1$ 时的阵列可能的态较少，仅 $A^{(kn-2)^2}$ 个.

现在，若在原来的 $kn\times kn$ 阵列中，有一个 $n\times n$ 阵列的构形是可抹掉的，则有两个态将在 $T+1$ 时映成同一的态——就是可抹掉态以及与它可彼此抹掉的态. 若可抹掉构形有两个复本，则有 4 个可能的态会映成下一步仅仅 1 个可能的态. 一般说来，若在时刻 T 可抹掉态有 s 个复本，则有 2^s 个态会映成 $T+1$ 时的 1 个态. 本页上的图式说明了这一点. 现在只需证明，由于抹掉而造成的态的损失大于由最外层细胞的收缩而造成的态的损失——即由于 $A^{(kn)^2}$ 与 $A^{(kn-2)^2}$ 之差造成的损失.



可能态的个数在时刻 T 到 $T+1$ 之间会减少，这是抹掉和边界层收缩的结果(见正文). 可以证明，抹掉的损失会大于收缩的损失. 所以在 $T+1$ 时会有一个多余的态；这就是 D：伊甸园构形.

考虑态的数目的对数而非数目本身. 边缘损失所占比例的对数大体上随 k 线性增长. 但由于抹掉而造成的损失之对数随可抹掉构形的数目而增加，所以近似于阵列的面积，即随 k^2 增加. 所以，当 k 很大时，由于抹掉而损失的态肯定多于由于边界层收缩而损失的态的. 所以在 $T+1$ 时必定有一个态 P 不能由 T 时的任意的态达到.

这个态 P 就是定理说的伊甸园态. 它是一个可以想像得到但不由过去任意的态达到的态. 它相应于一个可以描述为这些零件的排列，但永远不能用这些零件造出来的机器. 因为它是不能由复制产生的机器，所以它一定是一个不能自我复制的机器.

从我讨论的这两个定理，对于如复制这样的过程如何抽象然后可用数学处理，大概可以有些印象了. 这不是暗示，自我复制的铺砖模型与生物的复制一定有密切的联系；这肯定还有待证明. 然而，我在本文前面就说过，后来机器模型的运作，通过弄清生物过程中的困难，建立生物过

程应满足的判据，至少是有助益的.

举一个例子：地球上的生命现在一般公认是由于无生命物质的偶然相互作用而产生的. 这有多么可靠？或者人们通过铺砖模型会体验到，零件的装配该多么复杂才能得到自我复制的能力甚至还得到后来还会进化为更复杂的子孙后代这一性质. 用玩具列车来进行研究工作的贾柯布逊在这方面开了一个头，他用信息的“比特”来刻画复杂性.

即令自我复制机器终于被证明不能用于生物学，它自身还有超越于此的意义. 让我们暂时再回到冯·诺依曼自我复制机器的仓库模型. 如果我们不是想对任意仓库制造出这样一个机器，而是对某种自然环境来制造，又当如何？这样一个机器——其实是一个人工活植物——能用自然材料来制造零件，再把这些零件装配起来复制自己. 在这过程中，它会从其环境中提取物质，加以提纯、浓缩. 例如，设计一个能在海洋中自我复制的植物，它可能主要用镁来制造自己，因为海水中是有镁的，而且可能正是因为它含镁才要收获这种植物. 谁也没有做过制造这种机器的工程设计，但是我想有一天会把它造出来的.

36. 社会科学中的数学

理查·斯通*(Richard Stone),1964年9月号

大致75年左右以前,美国经济学家埃尔温·费歇尔**指出,全世界关于数理经济学的文献中,只有50种书和论文值得一读.今天的情况已经全然不同,不仅在经济学方面,并且也在其他社会科学方面,每年都有几千篇论文垒加到数学文献大山上去.原因在于用数学来表达概念比仅仅用言语来表达概念的优越性正在越来越受到人们的赞赏.

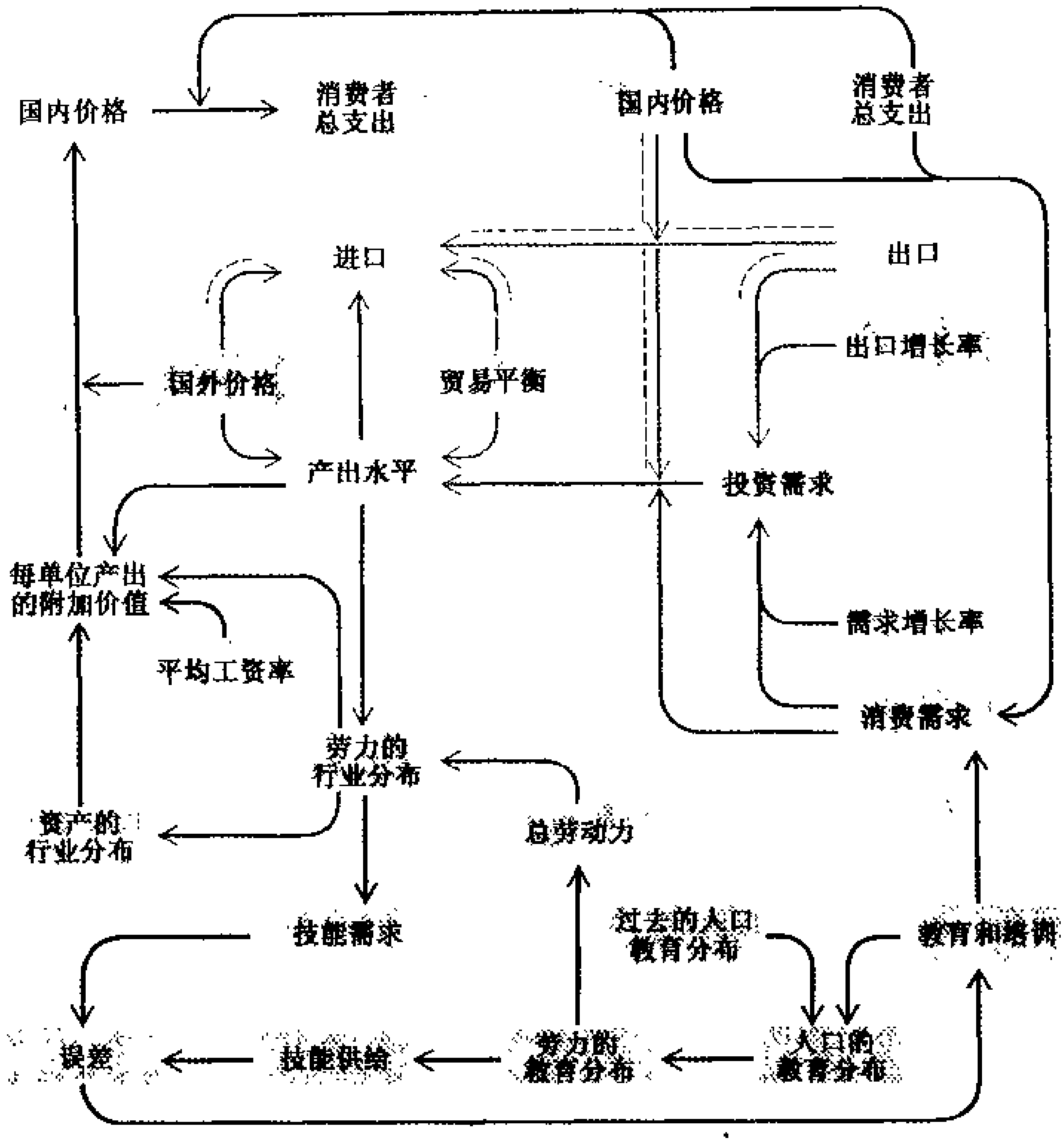
在某些研究领域中的这方面进展尤为突出.例如,人口学和经济学的整个主题素材就是如此根本地被数量化,以至数学在这些领域中的广泛应用已经不可避免.但是在社会科学的每一学科中,正在变得越来越明显的是,复杂系统及其内部关系(更有甚者是构架关于这样的系统的理论)的只用言语表达的描述,在其一般化中很难分析、比较和应用.而当用数学表达取代言语时,这些困难就大为减少.一方面是,有一些问题表面上看来完全无关,例如,教育制度分析与资本投资规划,在数学上被证明是恒等的.另一方面是,即使对于概念上相当含糊的主题以及很难得到确切信息的问题,数学也可提供一种得到有价值见解的方法.

冒昧地大面化之,可以说,社会科学尽管五花八门,都只与两个研究领域有关.第一个是精确描述社会系统如何运行以及其不同部分如何关联,不管主题是原始部落的近亲通婚,还是钢铁

---

* 译注:Richard Stone,(1913—1992),英国经济学家,1984年因对国民经济核算系统的发展所作出的基本贡献荣获诺贝尔经济奖.本文发表于1964年.文中提到的"社会核算系统"就是他的获奖工作.由于计算机的发展,这方面的研究目前已经大大推进.

** 译注:Irving Fisher,(1867—1947),他在资本理论与现代货币理论方面有重要贡献.



构成英国经济的四个回路如图所示.此模型的核心是实际的流(由黑线表示).消费需求及其增长率以及进出口的增长率(中右)决定了想要达到的产出增长所需的投资需求.产出水平由三个"最终"需求(即消费、投资和出口)组成.还要加上对于原料和燃料的中间需求.在一定的产出水平和总劳动力之下,劳动力和资本按行业的分配是由考虑资源之最有效的利用决定的.外贸回路(图中的虚线)也有一个类似的两部分的起点,再加上与国外价格和进口的贸易平衡的明显的相互作用,对国内产出水平与国内价格均有影响.价格回路(图的上部)表示了与消费需求的直接相互作用与反馈,这里要考虑到工资、劳动生产率以及生产过程中的附加值(中左).所以在一个计算的循环之末,对国内价格和消费者总支出都要重算一次.最后,由于劳动技能和资本装备同等重要,所以第四个回路(图的底部)把教育和培训等因素也考虑进来了,这又与总劳动力(表现为生产率和技能需求)和消费需求(表现为教育支出)互相作用.

工业对技术发达国家的总产出的贡献. 这种类型的研究旨在探索和分析结构. 第二个研究领域着眼于控制,也就是,着眼于考察关于社会结构运作的有意识目标的效果以及政策形成的理性过程. 这种类型的研究旨在探索和分析决策.

a

年龄	女性	存活女性	存活女儿
0--14	14 459	16 428	4 651
15—29	15 264	14 258	10 403
30—44	11 346	14 837	1 374

b

年龄	年龄
0-−14	14 459(*A*)
15−-29	15 264(*B*)
30−-44	11 346(*C*)

年龄	年龄	年龄
$\frac{4\,651}{A}$	$\frac{10\,403}{B}$	$\frac{1\,374}{C}$
$\frac{14\,258}{A}$	0	0
0	$\frac{14\,837}{B}$	0

c

m_1，时间 T；行：时间 T+15

$$\begin{pmatrix} .32167 & .68154 & .12110 \\ .98610 & 0 & 0 \\ 0 & .97203 & 0 \end{pmatrix} \times \overset{1940}{\begin{pmatrix} 14\,459 \\ 15\,264 \\ 11\,346 \end{pmatrix}} = \overset{1955}{\begin{pmatrix} 16\,428 \\ 14\,258 \\ 14\,837 \end{pmatrix}}$$

d

m_2，时间 T；行：时间 T+30

$$\begin{pmatrix} .77554 & .33694 & 03895 \\ .31719 & .67207 & .11942 \\ .95852 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \overset{1940}{\begin{pmatrix} 14\,459 \\ 15\,264 \\ 11\,346 \end{pmatrix}} = \overset{1970}{\begin{pmatrix} 16\,799 \\ 16\,200 \\ 13\,863 \end{pmatrix}}$$

e

m_3，时间 T；行：时间 T+45

$$\begin{pmatrix} .58172 & 56643 & .09392 \\ .76476 & .33226 & 03841 \\ .30832 & 65327 & .11608 \end{pmatrix} \times \overset{1940}{\begin{pmatrix} 14\,459 \\ 15\,264 \\ 11\,346 \end{pmatrix}} = \overset{1985}{\begin{pmatrix} 18\,123 \\ 16\,565 \\ 15\,747 \end{pmatrix}}$$

未来人口可以用矩阵代数来计算. 在这个例子中假定生死的图景在 45 内保持不变,并且计算局限于包含在三类年龄群中的女性的未来人口组成. 数据样本和计划基于 1940 年美国的人口普查;在表(*a*)中排列的三个相继的列是三个年龄群在 1940 年的女性人数、到 1955 年还继续存活的女性人数和每个年龄群在同一个时期所生下的女儿的人数. 这些数据在方阵(*b*)中被重新排列,并且被转换为系数矩阵(*c*). 当系数矩阵和 1940 年的年龄群相乘,结果就变为该年的女性人口预测("*c*"中的 1955 下的数字列). 与系数矩阵的平方或立方相乘("*d*"和"*e*")就又得到 1970 年和 1985 年的预测.

在这两个领域中,都是同样的数学被应用于相似的问题. 在必须对离散的观察值作经验分析的问题中,用得最多的是离散数学:特别是矩阵,矩阵代数和差分方程. 另一方面,在期望作出纯理论分析、并且数据提供的又似乎是连续的而非离散的"比特"的问题中,无穷小分析,特别是微分方程,就更为方便. 下面来自多种结构研究的例子显示了两种数学方法的应用.

在人口学的许多研究中要求分析人口的结构和可能的发展. 为了规划任何人口的来来结构,假定有一种定常的出生和存活的模式:我们需要三种数据集合:(1)在某一天活着的不同年龄的人的数目;(2)紧随这天以后所选定的区间中存活的人数;(3)在同一个时间段中不同年龄

群里的新生儿人数. 顺便提一下,这第三种数据集是社会科学难以精确数量化的例证. 在现实生活中,丈夫和妻子经常属于不同的年龄群,并且妻子承担孩子的能力是这一因素和她自身的生育能力的函数. 然而,在我们这里采用的数学模型中,孩子只是按照妻子的年龄群来决定的.

在这类变化过程的分析中,一个时期到下一个时期的变化最便于用方块数组或矩阵来表达(见 467 页之图):(*a*)是各个年龄段之女性人口在三个年份的总数. 然后在(*b*)中讨论她们中之未夭折数. 例如第一个数$\frac{14\ 258}{\mathrm{A}}$是表示 1955 年的年龄为 15—29 岁的女性自然都是 15 年前就已出生. 但 1955 年出生的女性总数没有,于是只好用 1940 年出生数 A=14 459 代替. 所以$\frac{14\ 258}{\mathrm{A}}$是表示"15 年未夭折"的比例. 第二行第二个数是 0,是现有的 14 258 人中,在 15 年前即已属于这个年龄段的人数. 但这是不可能的. 因为 15 年前属于 15—29 岁者,现在应是 30—44 岁. 所以用 0 来表示. 同理,第三个数 0 表示现年 15—29 岁而且 15 年前已经是 30—44 岁. 这又是不可能的. 第三行是现年 30—44 岁而没有死的 14 837 人中 15 年前已是 0—14,15—29,30—44 岁者所占的比例. 因此自然是 0,$\frac{14\ 837}{\mathrm{B}}$,0. 总之(*b*)表示"15 年未夭折"的信息.

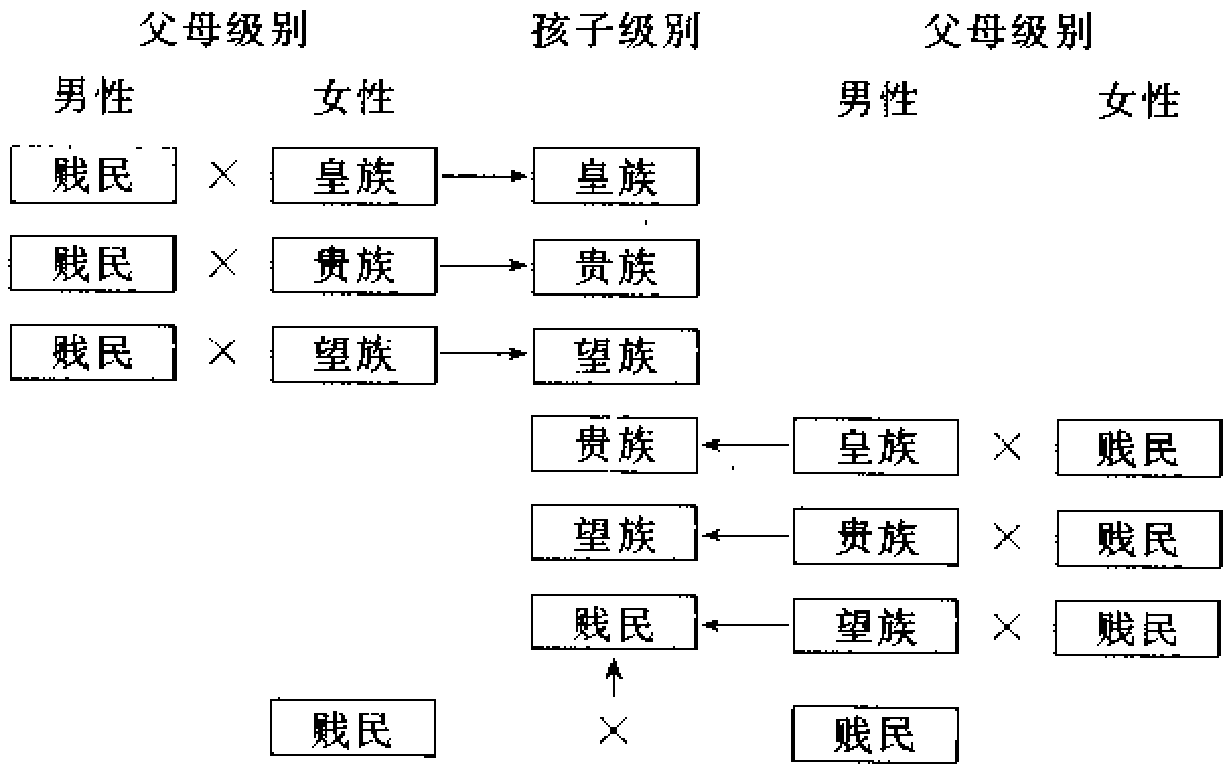
至此,信息已准备就绪. 把相邻年龄群列中的总人数,除以矩阵中每一列所示的新出生人数和生存人数,就得到出生率系数和存活率系数,这些系数可以排列为第二个矩阵(即 467 页图上的 *b*). 如果把年龄群列的图现在乘以系数矩阵,那么在每一年龄群中形成的总数将指出在选定的时间区间终点的人口组成估计. 假定这是一个 x 年的区间;如果希望估计 $2x$ 年后的人口组成,原来的年龄群的图应乘以系数矩阵的 2 次幂. 如果希望一个 $3x$ 年的规划,那就乘以矩阵的 3 次幂,如此等等. 在这个例子中,图的处理就干脆称为乘法. 数学家将意识到列与矩阵相乘的实际过程. 原因在于算术的交换律不适用于矩阵乘法(见本书第 13 章"数").

这种规划假定出生与存活的方式在整个估计周期中保持不变;这是模型与现实不符的另一个例子. 尽管如此,不现实之处也是透明的. 这种僵硬的模型处理表明,如果人类的人口真达到固定的生死模式,那么它会恰好达到稳定的年龄构成和定常的增长率.

当然,实际上不变的系数矩阵是绝对不可能的:出生率和死亡率处于偶然性或系统性影响之下,或两种影响之下. 因此,研究者就通过处理系数矩阵的值来力求逼近现实. 不难得出使人口达到某个上下界限的条件,而这样,人口学者的手段也可推广到诸如生态学和传染病学之类的领域中的研究.

另外一点值得再次强调:数学化的真正过程有助于表明,某种统一性存在于许多表面上不

同的问题的结构之中. 这里描述的人口规划矩阵在人口学的框架中叙述. 完全类似的规划也可以对无生命客体的发展规划来作出,例如电报站点、铁路车厢或公寓大楼,于是模型也可用于工业库存或城市更新. 在这些情形中,投资率取代出生率,报废率取代死亡率. 不管原来的库存是怎样的年份结构,模型将指出为保持在任何选定的时间路径上的库存所需要的替代(和扩充).



	初始人口	第一代	第二代	第三代	第四代	第五代
皇族	10	10	10	10	10	10
贵族	20	30	40	50	60	70
望族	40	60	90	130	180	240
总数	70	100	140	190	250	320
贱民	500	470	430	380	320	250
总数	570	570	570	570	570	570
	G	$G+1$	$G+2$	$G+3$	$G+4$	$G+5$
皇族	S	S	S	S	S	S
贵族	N	$N+S$	$N+2S$	$N+3S$	$N+4S$	$N+5S$
望族	H	$H+N$	$N+2N+S$	$H+3N+3S$	$H+4N+6S$	$H+5N+10S$

通婚 习俗在北美的纳切斯印第安人中要求每对婚姻中的一方是下等贱民. 这张表列出七种可能的联姻及其后果. 初看起来,这样的制度似乎颇为合理. 但是对一个样本人口的数学分析(在这一情形下,开始时有 70 名上等人和 500 名下等人)指出,四代以后,贱民婚姻对象就变得稀缺起来.

另外一种民俗学者所乐于研究的结构是亲属关系，它联系着通婚和后代，氏族、胞族和部族等的复杂图景，有时还要考虑阶级结构和社会变迁.在这类研究中，差分方程通常提供处理数据的一种方便的途径.据记载，社会分化的经典例子存在于纳切斯(Natchez)族中，后者是密西西比盆地中的一个美洲印第安部落.纳切斯族中基本上只有两个阶级：上等人和下等人.上等人又分为三级：皇族居最高位，贵族其次，望族虽然仍然是上等人，但与最低层的下等贱民仅一步之遥.

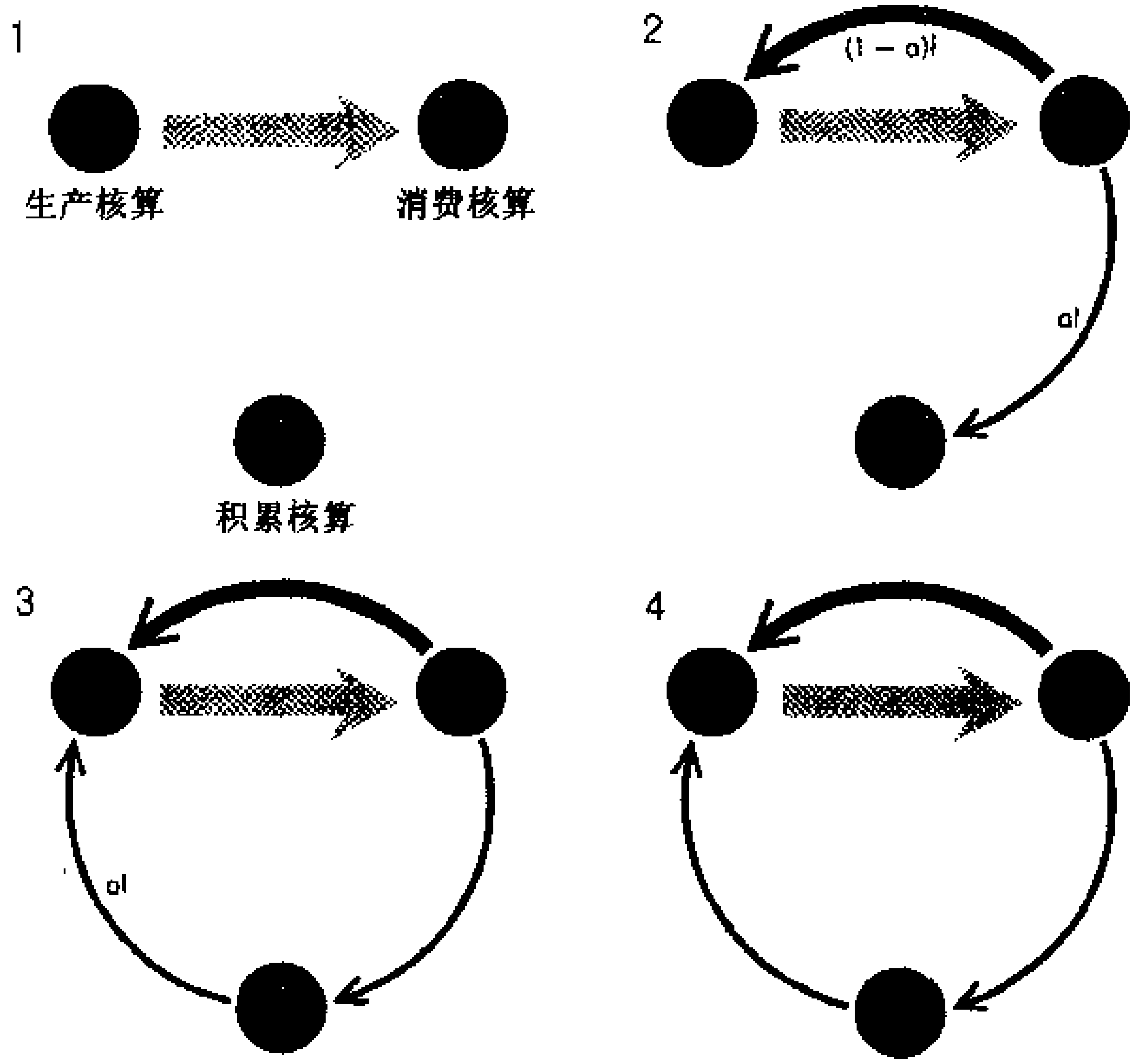
正如欧洲探险者所描述的那样，在纳切斯社会中通婚规则是一种绵延不断的社会酵母.在任何婚姻中，夫妻中至少一方总是来自贱民阶级.同时，生于上等人家中的孩子与他的母亲同级.这样，皇族、贵族或望族母亲与贱民父亲的孩子还是皇族、贵族或望族.然而，贱民母亲和皇族父亲的孩子将承袭比其父亲低一级的级别，即只是一名贵族.这种降级是逐级递降的，从而贱民母亲和贵族父亲的孩子是望族，贱民母亲和望族父亲的孩子将还是贱民.至于在社会最底层，贱民与贱民只能产生贱民(见下页的上图).

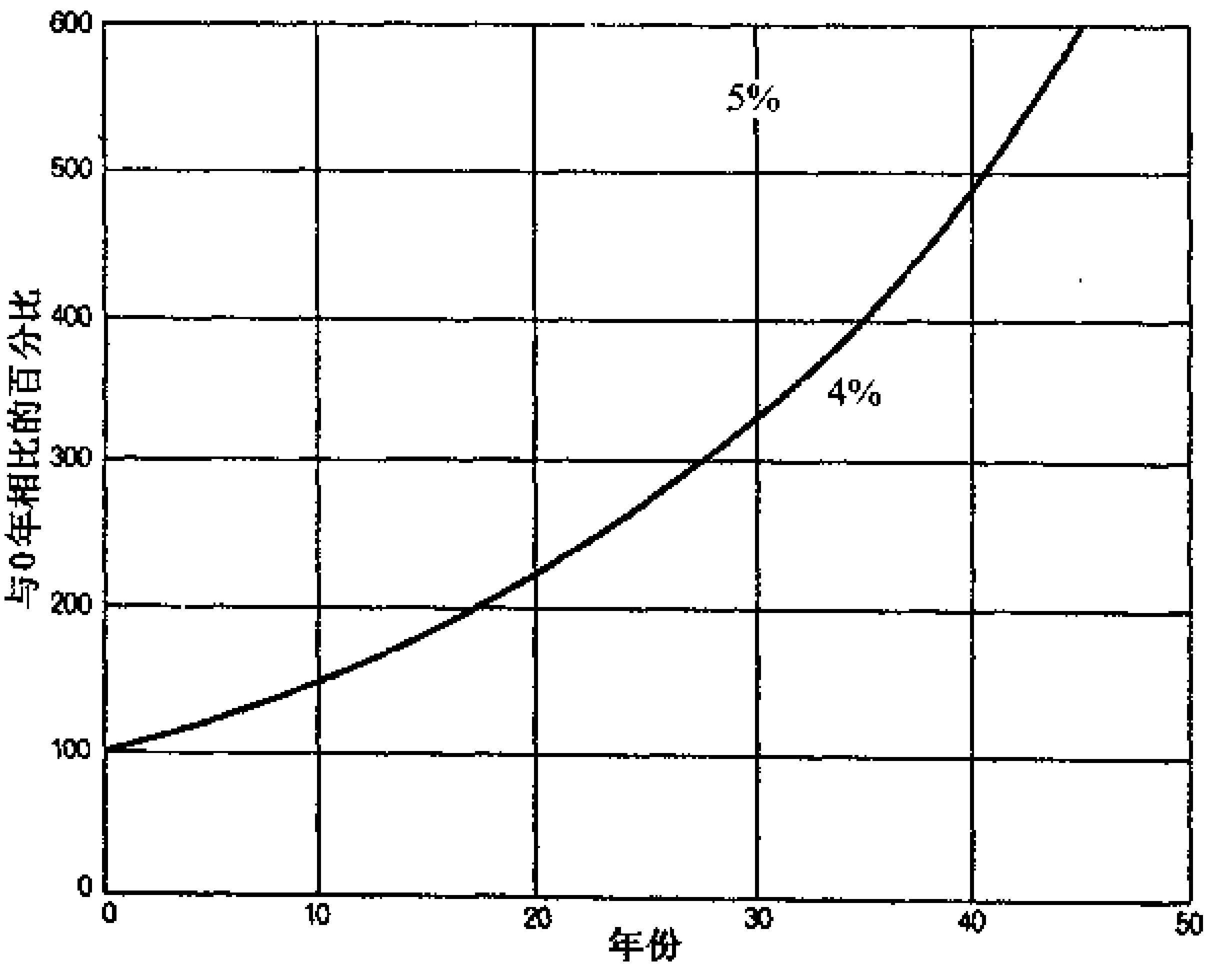
纳切斯族已消失多时，但是阶级结构的研究者们还在想知道，这样复杂的社会体系是否有一种自然的稳定性？把问题数学化，必须假定人口是稳定的，每个纳切斯人有且仅有一次婚姻，以及每次婚姻只产生一个儿子和一个女儿.在数学模型中利用这些假定以后，下列结论就立即变得一目了然：除非一开始在人口中就没有皇族和贵族，否则一种稳定的阶级结构是不可能的，因为几代人以后，就将产生大量的上等人，使得没有足够的下等人来与之通婚.

模型的性态使人想起，实际的纳切斯人事实上没有稳定的阶级结构.但是实际观察的不方便使得对之无法肯定.处理模型就允许对每个个体的婚姻次数作出变化，或者比较例如皇族——贱民婚姻对贱民——贱民婚姻的生产率，或者考虑诸如“由于纳切斯人的征服与同化政策而使人口急速增长”之类的完全未被模型化的因素；由此可以产生明显不同的结果.

在一个全然不同的研究领域中，试图考察诸如增长率之类的问题的经济学家，面临把需处理的有关生产、消费、积累和外贸的无数变动减少到某个数量级的任务.为达到这种数量级的一种办法是把经济看成是一个内部关联的巨大的核算系统；在理论上，一个庞大的方阵就可以设置这一系统，其中每个行列交叉项代表一个核算项目.行表示收人的进帐，而列表示支出的费用.实际上，如果一个经济系统中的所有现金流都详尽地记录在单个矩阵中，其合成的矩阵的数将不知有多大，以至无法操作.解决的办法是把核算项目选择合并为三大类.一种对封闭经济可用的这类合并是把复杂的图景简化为三个关联的核算项目：一项是生产，一项是消费，还有一项是积累(见下一页的图解).

在这种模型经济中，生产核算在销售消费商品和消费劳务的交换中从消费核算中收取货币，





封闭经济的凯恩斯观点提出收入等于消费加储蓄，而储蓄等于投资. 当生产、消费和储蓄在一个模型中内部关联(如上图)，这样的封闭经济的增长可描述为收入对消费核算的运动，其中(1)消费核算产生两种费用流出，一种流入消费支出，一种流入储蓄. 第二个流继续(3)从积累流向生产，增加资本设备，并由此刺激扩大生产(4，大箭头). 如果要提高经济增长率，那么必须或者储蓄和投资更多的收入，或者使对每单位产出投资的资金，达到更高的效率. 例如，在欠发达国家中，即使很轻微的增长率提高都是至关紧要的，正如在图中所指出的那样，在一个 50 年期中的两种有百分之一差别的增长率所造成的收入差别极为可观.

在销售投资商品的交换中从积累核算中收取货币. 然后,生产核算以收入的形式对消费核算支付其销售值. 这一收入是消费核算中得到的仅有的进帐;而在这个核算中,进帐被分为两个不相等的部分. 较大的一部分花费在附加的消费商品和消费劳务中(联系—合成的现金流回到生产核算中),其余的归到储蓄(联系—合成的现金流回到积累核算). 为封闭这一系统,积累核算又把这些储蓄用作进一步投资而回到生产核算中.

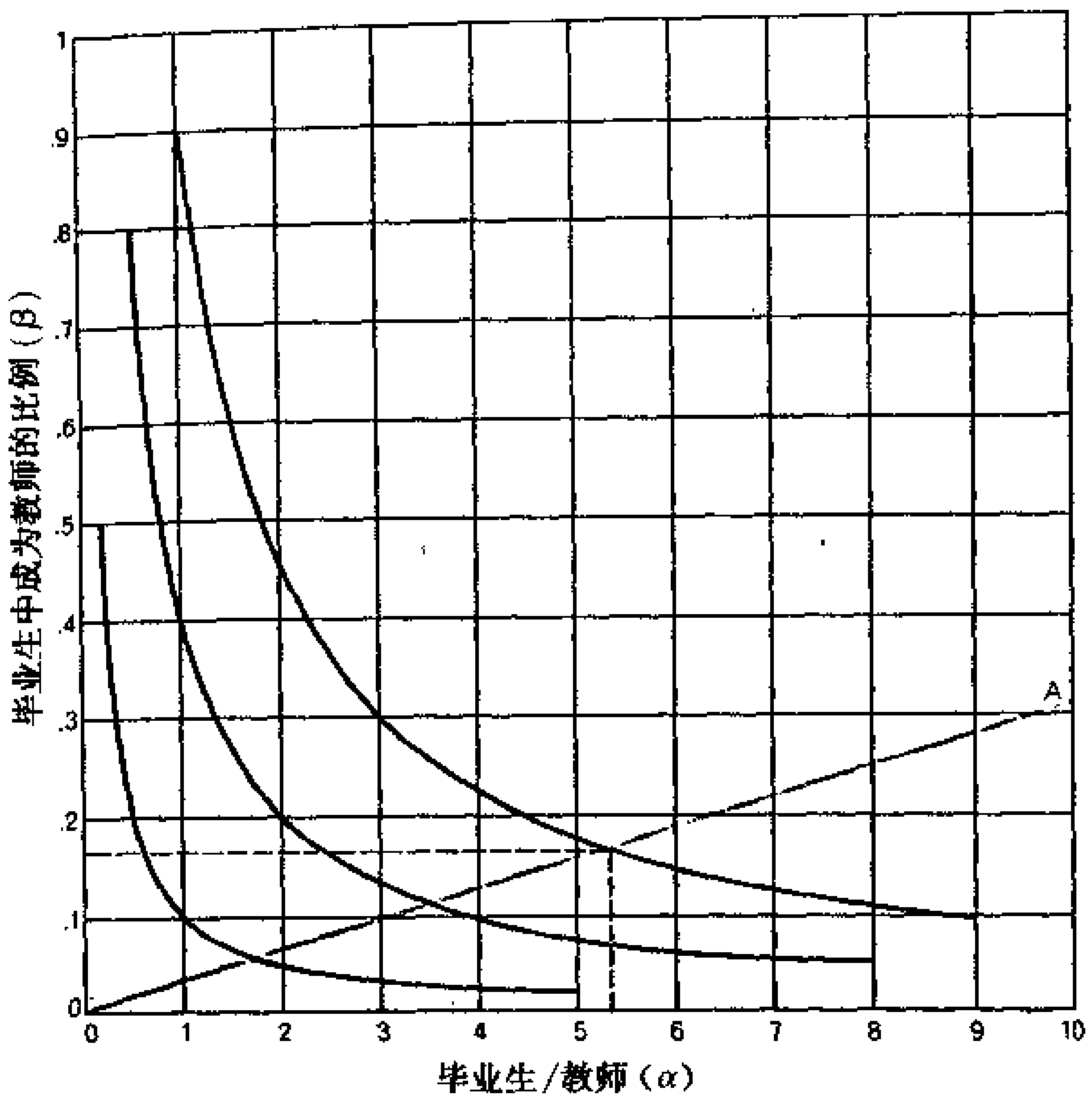
在这个模型中两个假定是显然的. 首先是总收入恰好等于消费商品支出和储蓄之和. 其次是储蓄又反过来等于投资商品上的支出. 另外两个假定虽然不太明显,经过考察后,将被证实为在这个封闭经济模型中是关键的关系. 其中之一为:这个经济中的居民总是储蓄其收入的一个固定比例(这里称为 α). 另一个为:在投资商品上的支出(作为附加资本)和生产核算中增加的产出(作为附加生产)之间的固定比例系数的存在. 这个系数在这里称为 β.

任何基于这些假定的封闭经济只能以表示为 α/β 的常增长率来增长. 如果要提高其增长率,系统必须或者是提高其收入中储蓄和投资的比例(即提高 α),或者是减少每单位产出的资本(即减少 β),或者是两者都进行. 作为一个例子,令这些关系被数量化如下:α 是收入的百分之十的储蓄率,β 是资本产出比 2.5. 在这样的条件下,α/β 将产生百分之 4 的增长率. 但是如果 α 的值提高到百分之 12.5,或者 β 的值减少为百分之二,那么经济的增长率将从百分之四提高到百分之五.

用数学来描述和分析社会状况的最后一个例子可以在教育领域中找到. 例如,考虑将来教师有足够补充,就需要分析教师和毕业生之间相互影响的方式. 在最简单的情形下,由任何教育系统培养出来的毕业生人数总要正比于在这一系统中工作的教师的人数,这被认为是显然的. 反过来,教师人数的提高又依赖于该系统中的毕业生变为教师的比例(假设是常数)和所存在的教师队伍中由于死亡、退休和改行而减员的比例(也假设为常数).

在这个例子中,每个教师产生的毕业生的比例可指定为 α,毕业生中变为教师的比例为 β,教师中减员的比例为 γ. 于是容易导出一个教师人数的纯增长率(记为 δ)的方程. 这个方程为 $\delta=\alpha\beta-\gamma$. 一眼看来,它似乎不值一提,但是显然它已经数学化. 整个方程说明,如果希望增加教师人数,必须(1)安排已存在的教师队伍培养更多的学生(即增加 α),或者(2)说服更多的毕业生加入教师队伍(即提高 β),或者(3)减少已存在的教师队伍的减员率(即减少 γ),或者最后(4)三者并进.

实际上,把问题归结为数学关系,就变得一目了然. 当这些相互作用的考虑用几何来表达时(见下图),就还可以考虑其他相互作用. 假设社会状况使得人们对减少教师队伍的减员无所作为;例如,没有教育机构来反聘退休教师. 这样的状况就妨碍对 γ 的任何明显的操控. 但是还是有可能对 α 和 β 来采取行动. 是否可以通过提高教师的工资来达到? 这样的行动肯定可以使更多的毕业生来加入教



未来教师队伍的补充所引起的问题的几何图解．作为第一步，它指出，对于教师贮备的所有可能的增长率，都是在"每个教师可能培养的毕业生的人数"和"毕业生中变为教师的比例"之间相互作用下进行的．对于每种增长率，都分别画出单独一条（黑色）双曲线以表示这两个相关因素的所有可能的组合．然后，再另行计算，又可建立（这两个因素与教师待遇的或高或低的有不同的刺激作用）二者之间的线性关系．当这一线性关系嵌入到图像中时，它与双曲线相交的精确点就确定了两个因素对每一情况的值．于是再作另外的计算就可得出相应的教师工资率．

师队伍（以至影响到 β），也可以促进教师的积极性和提高教师的工作效率（这样就影响到 α）．

事实上，可以设想，α 和 β 与教师的待遇都是成正比的；也就是说，教师待遇很低，教师的工作就很差，毕业生也不愿进入教师队伍；而教师待遇很高，教师的工作效率和毕业生加入教师队伍的人数就会向其上限迫近．在这样的情形中，α 与 β 之间的关系是线性的，而当把这一线性关系嵌入到一个几何图像中，就可能对不同的 α 和 β 值来算出相应的教师工资率．

所有上述例子都是有关于世界现状的描述，而不去考虑世界为什么如此这般的机理．这后一方面的考虑就进入了决策领域．对于大多数情况而言，社会图景的维持和修正依赖于为达到

某种目标的无数个人的和公共的决策;因此,研究决策过程是社会科学的本质部分.

对相当多的情形来说,决策过程可以用数学来陈述和分析.除了数学的经典技巧以外;今天的决策者可采用诸如线性规划、对策论和统计决策理论等新方法.然而,作为前提,必须区分在确定条件下的决策和在不确定条件下的决策.而在这两类问题中,还要区分单个时期中的决策和多时期中的决策.

第一类第一子类的问题,即在确定条件下的单阶段决策问题,可以用如何以最小费用设计一顿合适的饭餐这个营养师的问题为例.这一问题按照诸如蛋白质、醣和脂肪、维生素、热量之类的营养因素的最小需求量来确定一顿合适的饭餐.包含这些营养因素的各种食物固定价格为已知.问题在于:每种食品应该有多少才能满足营养需要,而费用又最小?

因为这个问题中的需要极小化的函数是线性函数,求解就需要用线性规划的技巧.如果取一个只包含两种食品和三种营养因素的简化问题,那么问题也可通过图像来说明(见 475 页图);这个图中构造了两条坐标轴,分别代表两种食品的量.如果有 n 种食品,也可以在 n 维空间中作几何解释;随着 n 的增加,求解需要的计算量也会增加.

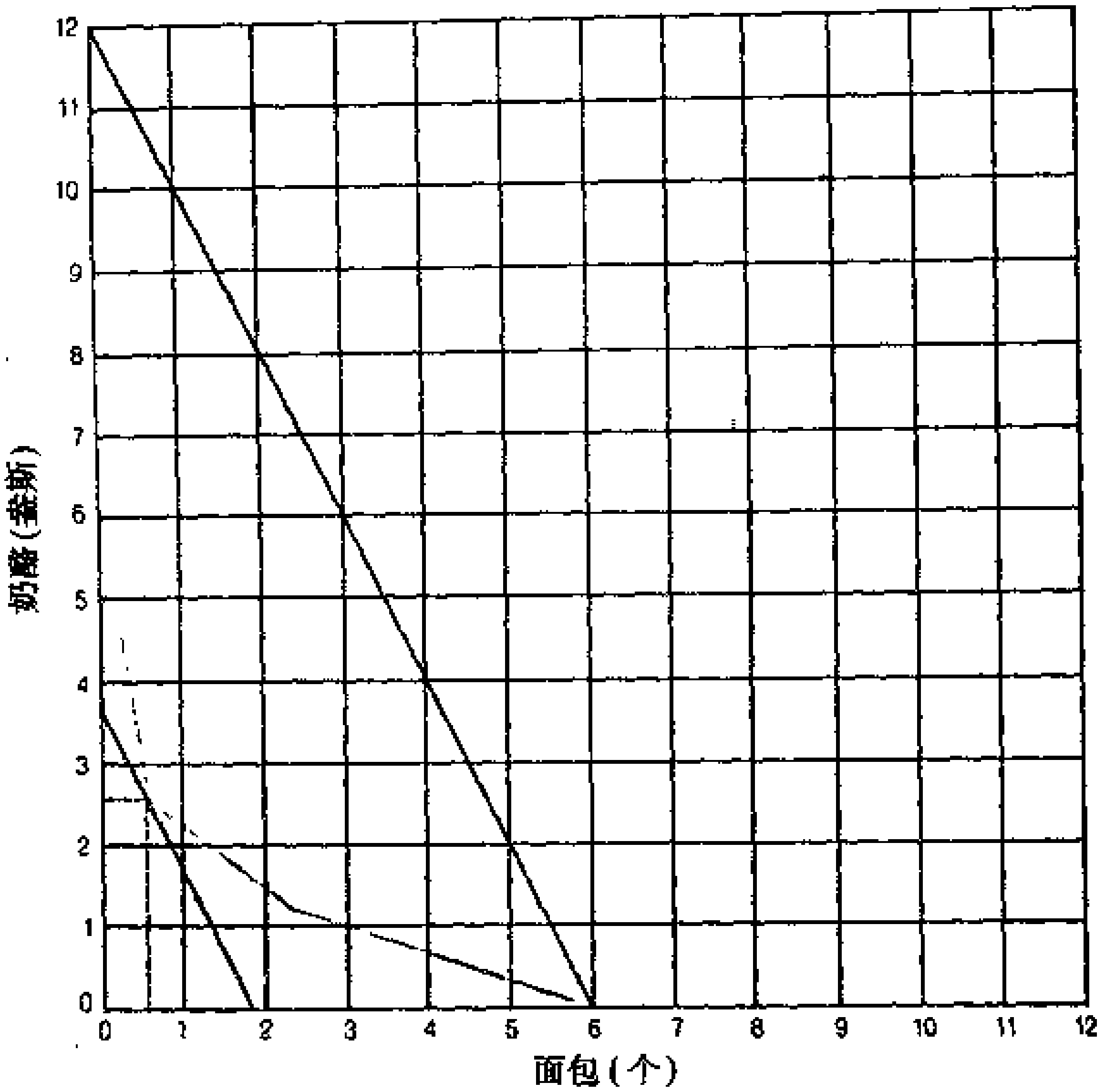
在实际中,最小费用的营养问题的解通常会只要求非常单调的几种食物,以至将使人很倒胃口.其原因在于问题通常陈述得太刻板;例如,构成最小费用饭餐的食品量通常没有限制,而这个量常常会很大.正如人们已经发现,如果对每天消耗的食品重量加以限制,就会出现一种较为丰富多彩的设计,而费用并未显著增加.这种刻板陈述的问题说明了所有复杂计算方法所专有的一种特点:数学方法是死板的方法.它们解决问题只会就事论事,这就要求研究者关注于问题是否提得适当.

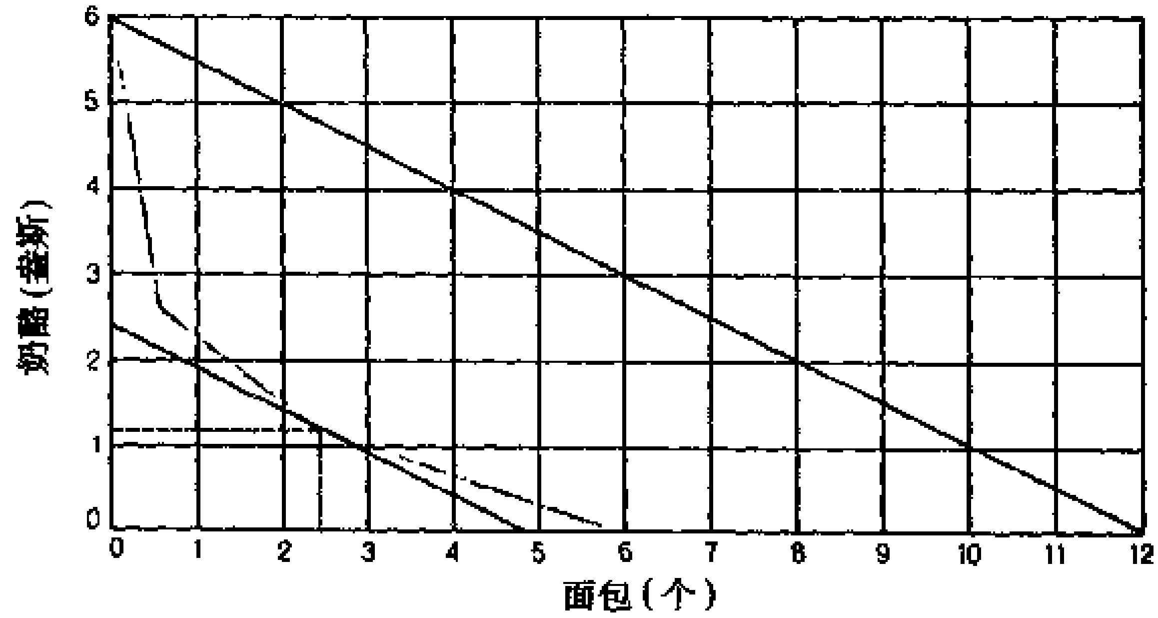
在任何不确定条件下所作的决策中,并没有事先已知(或假设已知)的量,而只有量的整个分布.问题在于求出这种分布的本质以及决定它将怎样影响决策.这类问题涉及概率统计领域.一个经典例子是有"偏差"的硬币的正反面投掷问题.在正常环境下,一个通常的硬币随手投掷一次出现正面的概率为 1/2,而连续两次是正面的概率为 1/4.显然,一个两面都是正面的作了假的硬币不再有同样的概率:一次投掷出正面的概率由 1/2 变为 1.可以想像,一个精心制作的硬币一次投掷出正面的概率显然是在 0 和 1 之间.根据拉普拉斯*建立的条件概率法则,对于这种硬币,投掷两次都得到正面的机会可以不是 1/4 而是 1/3.**

---

* 译注:拉普拉斯(Pierre Simon de Laplace,1749—1827),法国数学家、天文学家和物理学家.见本书第 6 章拉普拉斯传.

** 译注:这只需要构造一个得正面的概率为 $1/\sqrt{3}$ 的硬币.





最小费用饭餐问题表明，甚至确定条件下的决策问题也不是轻而易举的. 例子中假定三种需要的营养因素以不同的比例出现在面包与奶酪中(在这一情形下，二盎司的奶酪与六个面包所包含的蛋白质一样多). 在一幅图像上描出三种比例，形成一条凸边界(带色的实线)，其上的任何点都满足所关注的营养要求的约束. 现在必须求得两种食品的最小费用组合. 如果 12 盎司奶酪的费用与六个面包的费用一样(上面的图像)，最小费用的饭餐是合理的：每半个面包带二盎司多奶酪. 但是如果价格比相反(下面的图像)，最小费用的饭餐将包含在比例上与昂贵的奶酪相比无法接受的过量的面包.

			生产核算														收入支付核算
			商品				行业				消费者商品和劳务			政府用途			间接税和补贴
			燃料和能源	金属，工程，建筑	农业，制造业	劳务	燃料和能源	金属，工程，建筑	农业，制造业	劳务	食品，饮料，烟草，	服装和住房	其他	国防	卫生，教育，儿童保护	其他	间接税 扣除补
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
生产核算	商品	燃料和能源 1	0	0	0	0	590	353	274	476	0	647	94	74	46	41	0
		金属，工程，建筑 2	0	0	0	0	235	6 077	750	756	0	373	88	637	62	98	0
		农业，制造业 3	0	0	0	0	72	693	4 032	882	4 046	1 363	381	28	147	39	0
		劳务 4	0	0	0	0	281	1 724	1 767	367	1 478	878	2 569	23	266	67	0
	行业	燃料和能源 5	2 686	4	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		金属，工程，建筑 6	5	15 349	74	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		农业，制造业 7	12	43	11 769	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		劳务 8	0	25	4	10 640	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	消费者商品和劳务	食品，饮料，烟草， 9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		服装和住房 10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		其他 11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	政府用途	国防 12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		卫生，教育，儿童保护 13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		其他 14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
收入支付核算	间接税和补贴	间接税 15	1	49	85	0	53	76	126	604	1 221	471	372	10	20	14	0
		扣除补贴 16	0	0	0	0	-3	0	-257	-111	0	-118	0	0	0	0	0
	机构部分	财产收入分配 17	0	0	0	0	101	1 401	1 369	1 899	0	524	0	0	0	0	0
		私人部分 18	0	0	0	0	792	4 341	2 408	5 028	0	86	118	718	921	699	0
		公共部分 19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3 405
资本变动核算	商品	燃料和能源 20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		金属，工程，建筑 21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		农业制造业 22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	行业替代	燃料和能源 23	0	0	0	0	185	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		金属，工程，建筑 24	0	0	0	0	0	184	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		农业制造业 25	0	0	0	0	0	0	312	0	0	0	0	0	0	0	0
		劳务 26	0	0	0	0	0	0	0	416	0	0	0	0	0	0	0
	行业扩充	燃料和能源 27	0	0	0	0	70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		金属，工程，建筑 28	0	0	0	0	0	119	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		农业制造 29	0	0	0	0	0	0	91	0	0	0	0	0	0	0	0
		劳务 30	0	0	0	0	0	0	0	209	0	0	0	0	0	0	0
	消费者替代	房屋 31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	132	0	0	0	0	0
		耐用品 32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	227	337	0	0	0	0
	消费者扩充	房屋 33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	164	0	0	0	0	0
		耐用品 34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	171	234	0	0	0	0
	政府替代	所有社会资本 35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	42	20	0
	政府扩充	所有社会资本 36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44	26	0
	机构部分	资本和权益变化 37	0	0	0	0	-7	-83	-81	-112	0	0	0	0	0	0	0
		私人部分 38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		公共部分 39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
总核算余额		40	145	665	1 308	347	333	560	1 045	255	296	0	277	120	0	26	0
总收入			2 849	16 135	13 252	11 016	2 702	15 445	11 836	10 669	7 041	4 918	4 470	1 611	1 548	1 030	3 405

英国经济的矩阵模型对于 1960 年的四个国民经济核算部门表示出它们的所得和支付. 单位为百万英镑. 这四个部门在这里被分割为 40 个组; 在作者的更大的模型中, 则分为 253 个这样的子部门. 模型的核算本质, 例如对于第 10 号入口(服装与住房)综述了服装与住房的汇总; 这个入口是"生产核算部门"的一个消费者子部门. 在第 10 行与第 18 列相交处填入的是消费者在服装与住房上花费的总量 (49.18 亿英镑). 而第 10 列表示这一花费的各组在部分. 第

				资本变动核算																					
				商品			行业替代				行业扩充				消费者替代		消费者扩充		政府替代	政府扩充	机构部分				
贴	产收入分配	私人部分	公共部分	燃料和能源	金属，工程，建筑	农业制造业	燃料和能源	金属，工程，建筑	农业制造业	劳务	燃料和能源	金属，工程，建筑	农业制造劳务	劳务	房屋	耐用品	房屋	耐用品	所有社会资本	所有社会资本	资本和权益变化	私人部分	公共部分	总核算余额	总收入
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
0	0	0	0	-6	0	0	38	0	0	0	52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	170	2 849
0	0	0	0	0	339	0	142	174	289	331	262	430	298	737	107	262	646	410	63	274	0	0	0	2 295	16 135
0	0	0	0	0	0	230	0	0	6	0	0	0	3	0	0	33	0	47	0	0	0	0	0	1 250	13 252
0	0	0	0	0	0	0	5	4	11	65	1	2	0	60	25	169	0	217	0	1	0	0	0	1 036	11 016
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2 702
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15 445
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11 836
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10 669
0	0	7 041	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7 041
0	0	4 918	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4 918
0	0	4 255	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	215	4 470
0	0	0	1 611	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1 611
0	0	0	1 548	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1 548
0	0	0	1 030	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1 030
0	0	0	0	0	0	1	0	6	6	20	1	7	8	29	0	100	0	125	0	0	0	0	0	0	3 405
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-489
0	6 139	0	1 650	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	179	5 473
-489	-666	3 624	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22 900
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5 874
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	0	0	0	-6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	357	0	0	0	357
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	240	0	0	0	240
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	185
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	184
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	312
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	416
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	246	0	0	0	316
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	320	0	0	0	439
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	218	0	0	0	309
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	617	0	0	0	826
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	132
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	564
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	293	189	0	646
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	394	0	0	799
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	63
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	205	0	275
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2 213	-282	0	1 648
0	0	3 062	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	74	0	3 136
0	0	0	-51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	236	0	1	186
0	0	0	86	0	18	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-344	0	0	0	5 146
-489	5 473	2 900	5 874	-6	357	240	185	184	312	416	316	439	309	826	132	564	646	799	63	275	1 648	3 136	186	5 146	

一个入口（6.47 亿英镑）是住房的暖气和照明上的花费：即煤、焦炭、煤气、电力和石油．第 16 行的负入口（−1.18 亿英镑）表示政府住房补贴．另一个在第 18 行的入口（0.86 亿英镑）是 1960 年对家务劳务工资的总支付．作者的更大的模型中不仅有更详尽的不同的行业部门（那里使用了一个 31×31 方阵而不是这里的 1，2，3，4 行和 5，6，7，8 列的所有相交点所组成的 4×4 方阵），并且也有经济的消费、积累和外贸变动．

当然，现在发生的事，在于量的另一种分布已经取代了通常的分布. 在现实世界中，没有这样的硬币存在；然而，现实世界中充满这样的在不确定条件下决策的机会，其中由于搞不清分布的种类，就像盲目地与一个有偏差的硬币打赌一样，相当危险.

在社会科学中，理论与实际相结合将产生现实情况的有用模型. 如果一个模型又与一系列目标相联系，其产生的结果就是政策. 正因为如此，我想，旨在实际应用的大量国民经济系统的模型目前正在许多国家建立. 一个经济可以看作一个把信息转化为决策的系统. 今天，一个定量经济模型，如果它足够详尽，足够可靠，将能为决策者提供许多有用的信息.

过去四年在剑桥大学中我与我的同事们就在为一个这样的系统、一个英国经济的可计算模型而工作. 现在我们已经有一个能工作的原型，虽然它还需要改进，但已经表明这一系统是容易使用的. 作为第一步，我们构造了一个从未来的某年出发到我们随意地设定为 1970 年的时刻的经济增长的稳定状态的模型(见 476—477 页图). 这个模型基于对 1970 年的英国生活标准和今后的经济增长率的假定. 这些假定的经济后果表现为一系列平衡. 首先是对于在我们的模型中被区分为 31 种的产品的供需平衡、其次是对应的生产部门的收支平衡. 还有其他三个平衡作为补充：劳动力的供需平衡，储蓄与投资的平衡，以及英国的对外贸易的平衡.

模型中的变量是由 253 个行列交叉项(每一个都代表一项平衡核算，它指出经济的某个部门或分支的收支)所组成的方阵中的项，价格与数量与这些项相对应(见列昂节夫*，"投入产出经济学"，《科学美国人》抽印本# 610). 这些项的整个系列我们称为"社会核算矩阵(social-accounting matrix)"，或简记为 SAM；SAM 的行列入口的简要介绍出现在前两页上. 在这样的框架下工作，至少能使我们保证结果在算术和会计意义下是相容的.

运作这样的模型要求使用计算机. 为得到一系列输出平衡所需要的输入由 5 000 到 6 000 个数据所组成；运行要求做 3 000 万次乘法. 我们使用的阿特拉斯(Atlas)计算机这样的乘法只需要 22 秒钟. 事实上，仅因电子计算机的发展，才使得这种宏观模型变为可能. 一代人以前，当计量经济学学科问世，而只能借助手摇计算机时，这样的模型曾经是不可想像的. 阿特拉斯机工作 22 秒钟相当于手摇计算机工作 60 人年.

现在 SAM 正在运行，尽管许多地方有待细化，我们已经开始第二项任务. 这就是：给出英国经济的当前状态，什么是带来明天的经济(也就是说，我们对于明天以后的 1970 年的经济规划)所需要的变化？有时我们希望使模型的这两部分互相影响.

---

* 译注：Wassily W. Leontief(1906—)，美籍俄裔经济学家. 1973 年因创立投入产出方法获得诺贝尔经济学奖. 论文集《投入产出经济学》等有中译本.

在这一联系中，经济模型的主要优点之一是：它们可以给出我们任意选择的假定的后果. 例如，我们可以建立一个“封闭”系统，并且观察它将在今后是如何“自然”地发展的. 然而，从今天的事实趋向于 1970 年的假定，我们经常关心的是怎样得出一个看来不会自然发生的事件状态. 存在许多这样的问题：例如，怎样减少失业？怎样增加人口中大专毕业以上的比例？怎样避免挤兑支付危机？为回答每一个诸如此类的问题，我们必须打开我们的模型中的某一点，并且对它引入一个新的特征：目标的精确叙述. 然后，模型将指出怎样才能使系统在假定这些目标达到时处于平衡. 同时，随着我们扩大我们原来的模型规模，我们应该决定，究竟是增加类别还是另外设置子模型才更为实际. 子模型的解决办法看来更为灵活. 可以想像，一个分散化的系统中，例如能源工业或者金融活动的子模型，由掌握专门知识的能源专家或金融专家来维护和操作. 子模型方法的另一个好处在于：局势可以表示为在个别生产部门中所引起的变化；在单个模型中建立的投入产出关系会有效地实施这样的操作.

虽然 SAM 已经开始勾划出英国社会的经济面貌，它也已经显示出不可避免的差距扩大的倾向. 例如，在估算生产商品和劳务中劳力、资本和创新所起的作用时，不仅必须考虑不同的技能，并且也要考虑对研究和创新的社会态度. 前者促使我们去研究学习技能的教育和培训系统，而后者促使我们进入社会心理学的领域. 最终将会使我们面临一个有关整个英国社会经济系统的模型.

在现实世界中，这样的系统可能不会保持一种平坦的过程，或者由于一种内在的震荡倾向，或者由于系统为了从它们不可避免要承受的接二连三的自然冲击中恢复过来只有很有限的容量. 但是就像其他生物学和工程中的类似系统一样，社会经济系统具有自动控制机制（经济学中这种机制的例子是价格机制）. 只是这种机制的功能并不很好. 部分是由于它们基于受限制的目标，部分是由于它们在受限制的信息条件下运作. 这就是为什么每一个国家都在或多或少地努力设计改进控制机制的策略.

我在上面所观察到的是把一个模型与一系列目标相结合就产生政策. 当政策再与控制系统相结合，就引起一个行动计划. 计划再转而与事件相结合，又为我们所有人提供社会经济生活中的经验. 这一经验又反过来修正我们接受的理论、我们考虑的有关事实、我们面前呈现的目标以及我们视为有效的控制. 通过修正这些因素，用来修正我们的模型、我们的政策和我们的计划，如此等等. 我们可以期望，有朝一日，归功于数学工具，决策可以基于较多的知识和较少的猜测，而我们所生活的世界将顺利运转更好，意外遗憾更少.

37.

质量控制的实践

道尔顿(A. G. Dalton),1953年3月号

统计质量控制在一定程度上得到应用已有1/4世纪了,但直到最近,围绕"统计"这个令人肃然起敬的形容词的迷雾开始落尽.而且只在最近,工业方面才开始普遍看到这种方法在解决生产问题上的潜力.

哪一类问题?考虑像煮鸡蛋这样一个简单的操作.有人喜欢老一点,有人要嫩一点,有人要不老不嫩.大概不老不嫩是最通常的要求.市场上的种种机械的煮蛋计时装置都指出,把蛋煮得不老不嫩一般采用的时间是三分半钟.然而,即令我们煮蛋一贯地恰好煮这么长时间,煮出来的并不总是中等程度的.有时太干有时太稀.

无疑地,蛋的大小与重量不同与这种差异性大有关系.蛋储存的天数,它们原来的温度,一次放到锅中蛋的个数,用多少水,气压大小,蛋煮好后盖着锅不开的时间——所有这些因素都会影响它们是否煮成中等程度.我们也可以更仔细一点找出,这些因素控制到何种程度,就会煮出老嫩更一致的蛋,如果值得这样做的话.我们也可以对各个变量建立一些控制点;例如蛋的大小和重量,下锅时蛋的温度等等.有些控制因子可能对最终产品的质量有重要影响,有的则可以忽略;所有的控制多少都要耗费一些时间、精力和金钱.通过这些实验可以把控制不利因素的耗费与所得利益衡量一下.蛋更好吃些吗?如果我们是餐馆主,蛋会卖得多些吗?顾客的投诉和退回厨房的蛋会少些吗?

这个使产品或服务达到所要求的均匀性的问题是工业中很常见的,做热塑产品,机械加工齿轮,做烤面包机和自行车,安排火车的车次和接电话服务等等都是.当然,工业中的问题比家务复杂得多,但在家里找出为什么蛋煮了同样长时间结果却不相同时所用的方法,工业上也可以用.

需要作统计质量控制，是因为母鸡和制造者一样，不论费多大劲，都无法做出几个完全相同的东西. 正是各件产品不同会造成麻烦. 如果差别过大，特别在材料和待组装部件上，制造，装配会很困难，很花钱甚至不可能. 甚至差别小到查不出来，也会使顾客不满. 这种不满可能只是顾客用惯了什么，产品变了就会心烦. 这种变化可能与真正的质量无关，但总还是问题.

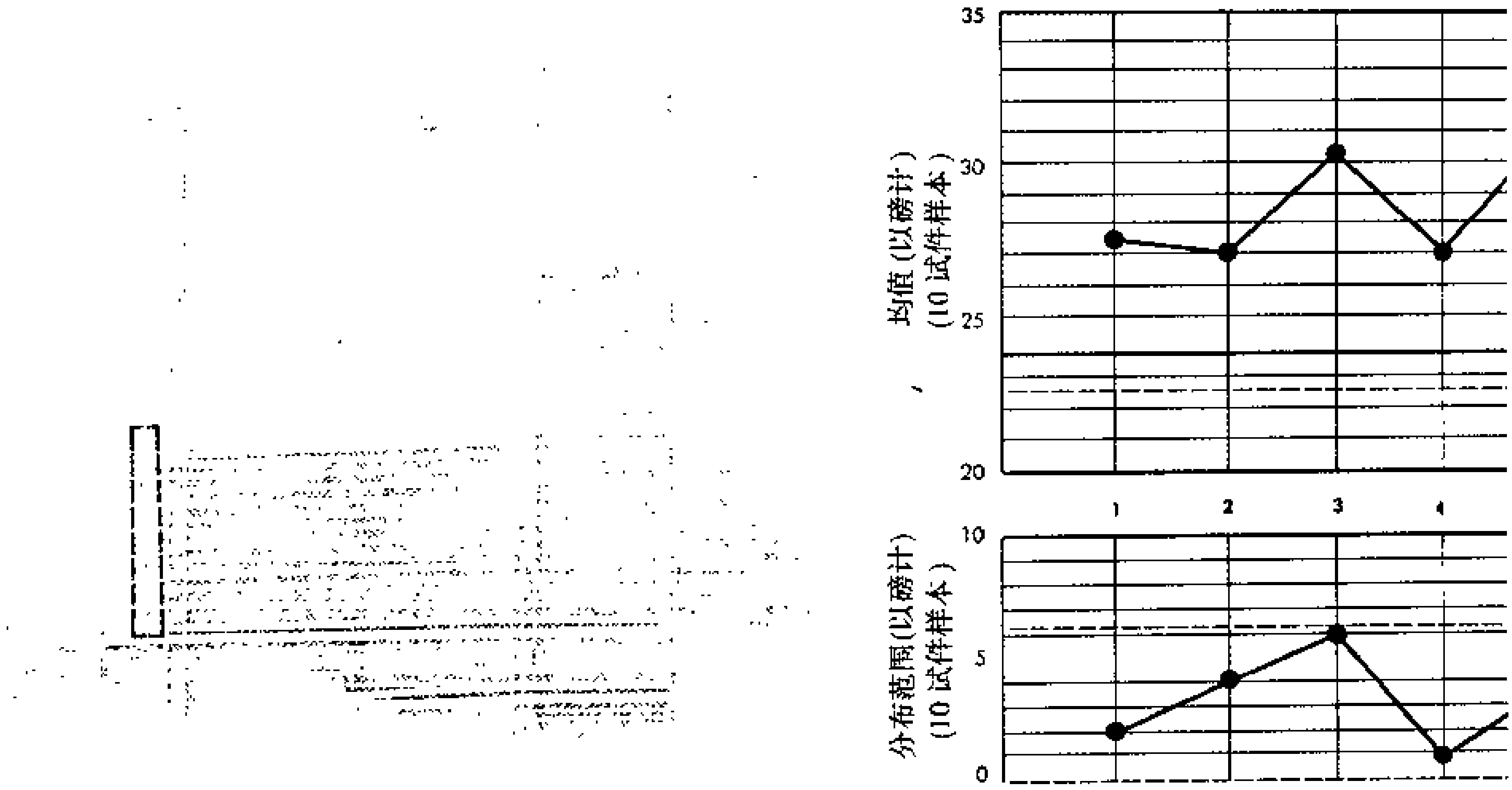
产品之差别可能来自两种一般类型的原因，或其中之一，或二者均有. 一种是以下各方面的正常的偶然变动，如材料、机器温度、大气情况，手工操作，量具和制造某一事物中的其他因素. 在所有的把原料加工为有用成品时，这种变化总是在一定程度上必有的，要减少其效应通常要有所耗费. 产生变动的原因中另一类是非偶然的，而不是可以预期的随机起伏. 这一类中包括材料或机械操作上非常的变动，动力供应中断，操作者不小心或技术不行，粗暴举放，作业组织不善等等. 这些非偶然因素一旦弄明白，不需多花费，甚至不要花费，就时常可以消除.

改善产品均匀性问题的第一步是要找出发生的不均匀是哪一类的，到了什么程度. 寻找的唯一方法是检查，然而检查本身就有问题. 要检查生产出来的每一件产品时常是不现实的，有时要毁坏产品，而且在任意情况下，检查结果的可靠性就是问题，因为测量和判断不可避免地会出错. 因此时常只能限于随机取样来检查. 然后用概率论的规律来解释结果. 用这样的方法可以减少人的错误而大大改善可靠性.

使问题进一步复杂化的是这样一个事实，每件产品都有许多特性，其每一个都会发生差异. 例如铅笔有重量，长度，粗细，色彩，石墨的硬度，木头的硬度，还有其他许多性质. 消费者关心的唯一变量可能是笔尖的硬度. 但是对于制造者，长度不规则可以损坏包装，木质不一可能造成加工困难. 有幸的是，产品的种种特性并不同样重要，其变异之大小也不大可能有相同的度量. 有了可靠的检查报告就能把这些都加以分类，而且可能用统计方法找出来，对于产品的差异，我们可以做些什么.

表示这种分析的最简单的形式是把检查结果描点成图表并与正态分布曲线比较，在正态分布中观测值围绕均值而均匀地分布. 分析者要选定上、下控制界限，如果检查的结果越出了这些界限，就假设有非偶然的原因在影响过程. 这个假设偶尔也可能是不对的，但令人欣慰的是，这个假设不对的机遇很小.

我们这样就可以从图表上看出产品的差异是来自生产过程中存在的偶然原因，还是由于非偶然原因. 如果所有的变异都是偶然的，但有些变异相当大而使我们或者顾客担心，我们就只有两种选择. 我们可以容忍这种情况，只要产品卖得出去；或者改变生产过程，那就要掂量一下，不改变会受到的损失以及改进过程时常会有的相当大的花费. 如果，如比较常见的那样，许多引起麻烦的变异是来自非偶然的原因，则应该采取一系列探查行动.

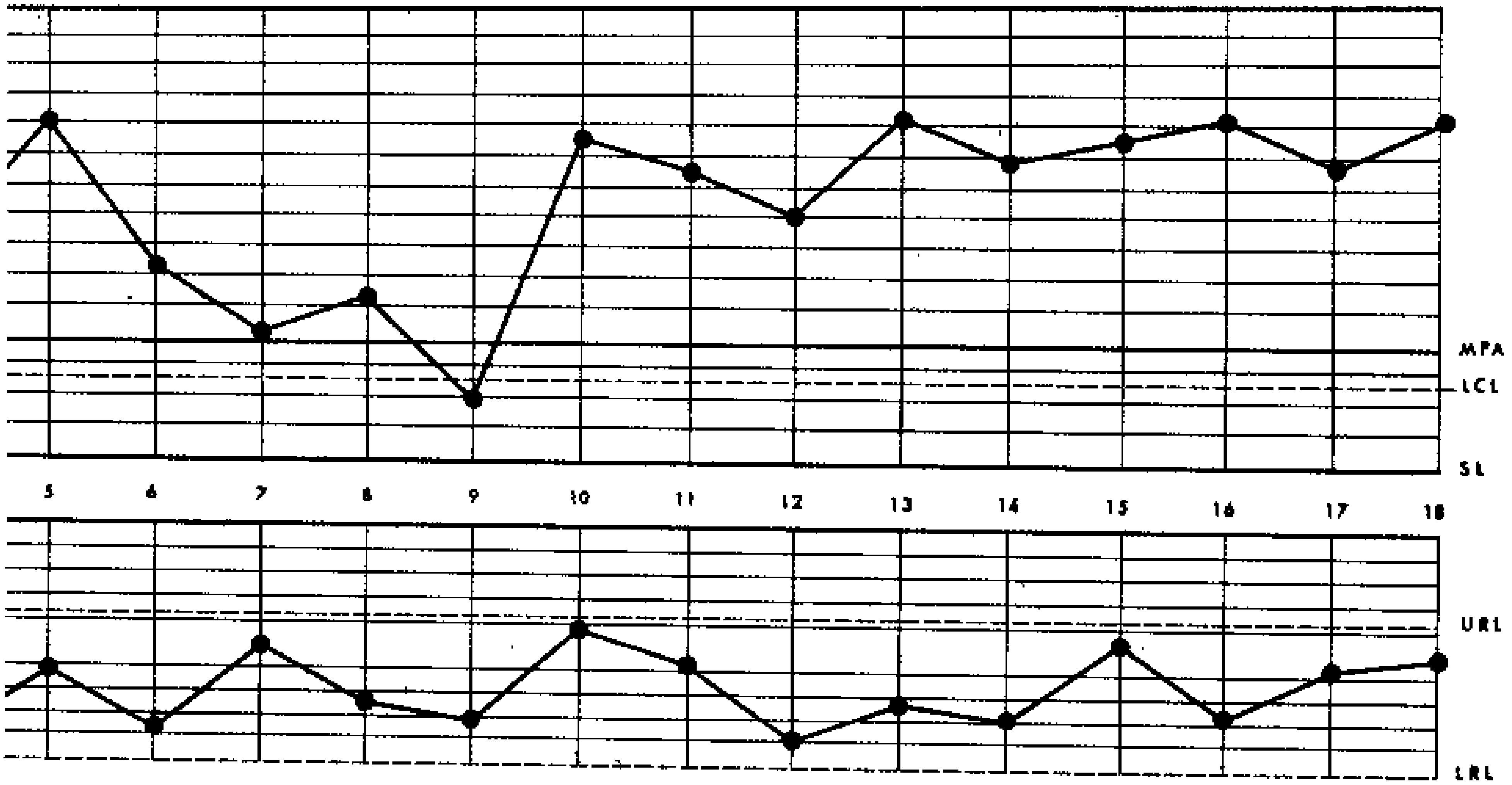


图表是用来控制一个继电器中触点与弹簧焊接的强度的. 左方是继电器的俯视与侧视图;最左方黑色虚线框中就是触点. 右方的两条曲线表示用同一机器在18小时中作的焊接的平均强度. 每小时从每个机器的产品中取10个焊好的触点为样本来做试验. 试验就是看要用多少磅的力才能把触点从弹簧上拉下来. 上面的一条曲线表示焊件样本的平均强度怎样变化. 最右方的MPA

在从原料到成品的生产过程中,几乎在每一步都可以设置控制点来找出是在哪一个阶段出了毛病. 控制点包含某种信息的检测并作下记录. 因为几乎是最简单的生产也要经过许多阶段,所以在每个阶段都分析产品,所费太多而很可能是办不到的. 所以要作工程的判断来选择最有用的控制点,即可以最大地节省控制点. 在试验了不同控制点有用的程度以后,就把最有效的留下作为常规的检查站.

我们这里要考虑统计质量控制的三种应用:(1)对过程中的不正常性态作出警告;(2)诊断产生浪费的原因;(3)建立经济的检查方案.

第一方面的应用,我以贝尔电话系统公司制造一个产品的过程为例. 产品是西方电器公司成百万生产的继电器,用于电话局中接通、断开与转移电话通路. 继电器中有一些接触弹簧,当继电器带电时就合拢,放电时就松开. 触点通常是用半贵金属做的,电焊在继电器弹簧头上,它要能经得住成百万次冲击以及松开时会有的轻微的摩擦,并要求能在正常的使用寿命中正常运行. 如果有一个触点破了,就可能使电话服务中断,而需要大量更换和修理的工作. 根据用多少



意义是此过程的最小可容许平均值(minimum permissible average);LCL 是下控制极限(lower control limit);SL 是单个焊点的规格的下限(specification minimum limit).在第九小时,焊件样本的平均强度下降到下控制极限以下;采取了改正行动.下图则表示各样本的值的范围.URL 是控制的范围上限(upper range control limit);LRL 是控制的范围下限(lower range limit).

力才能使触点与弹簧分开确定了令人满意的焊接强度的规格.问题在于如何能确定一种工艺流程,使得总能生产出合规格的焊接.

我们在每个焊机上都建立了一个控制站,使得机器或其他元件在过程中出问题时,立刻就能知道.在每小时的产品中选 10 件作为样本.把焊好的触点从弹簧上拉下来,并记录下所需的力.把这些结果描在图上给出两件事的连续记录:(1)每组 10 个试件的样本的平均强度,(2)在一组样本中由最强的试件到最弱的试件所需力的分布范围.控制的界限画在图表上.若平均值在这些界限之外,就表示平均强度离所需的最小强度太相近.分布范围的控制界限则是这样算出的:若有试件开始落到这些限度之外,就表示有非偶然原因介入了.只有当平均强度和分布范围二者都在控制界限之内,才有充分的保证使在取样本的那一个时间区段中的焊接是令人满意的.如果某个样本的平均值或分布范围落到控制界限之外,我们就知道必须停下焊机寻找原因.

在制造的这个阶段,做弹簧和焊好的触点已经花了一些钱,但比之整个继电器的价值,这些钱是很少的.所以在每部焊机上安装一个控制系统的费用,只不过是用很少保险费用即可防止

因为没有找出不合格元件而让它进入成品而造成更大的损失. 此外, 只要样本是统计地满意的, 即可不中断流程运行, 不必重新调试焊机, 这是对时间、人力和机器的有用的寿命的节省.

这个例子表明统计质量控制能在生产线上给出可靠的警号. 下面的例子则是讲的第二种应用: 怎样用统计方法诊断或消除某一简单产品的不正常低产出率的原因, 此例中产品是一个小保护盒中的炭芯. 这个保护盒的用处是防止家用电话受到闪电放电冲击或电话线偶尔碰上了动力线. 人们发现了制造炭芯出废品的基本原因是它们的大小不合规格. 这里有几种操作, 先用模子作芯, 再作两次电击, 装入磁套管, 再量度大小. 报废主要是在第二次电击后由于缩短或变软, 有 60%炭芯不合格. 制订了一个提供更多信息的检查程度, 并对结果作统计分析, 表明在流程的这一步, 问题主要在平均值上而不在分布范围上. 为了提高平均值, 对炭粉和模具的处理都作了一些改变. 结果得到较硬的炭芯, 平均长度也较好, 而最大与最小值的差别也没有发生有害的增加. 这些改变把第二次电击后的废品率由大约 60%降低到 0.2%.

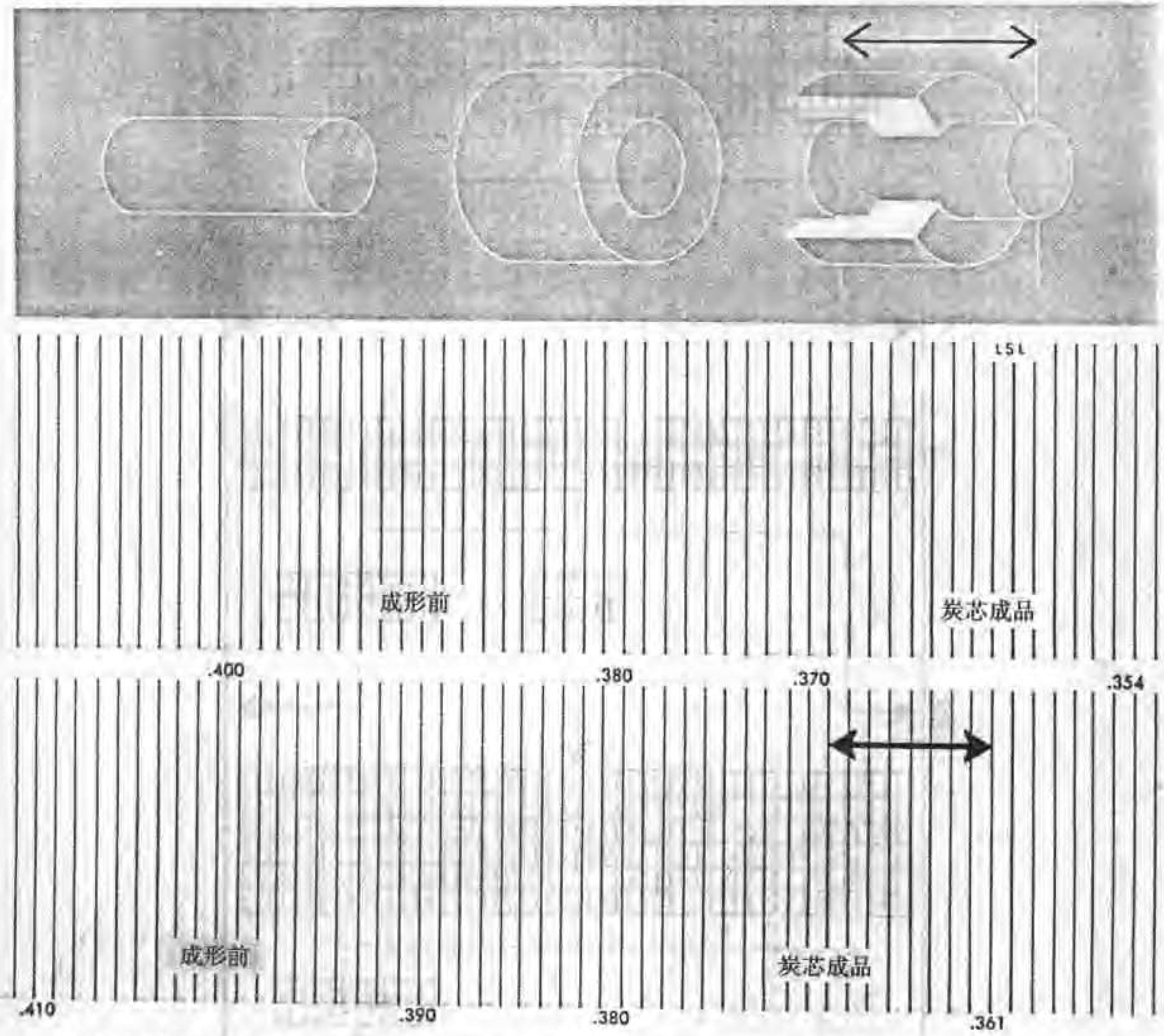
为了作统计分析, 共设了 6 个控制点. 其中有 4 个是为了对生产流程中临时性的障碍作出早期警告. 对此问题的研究和统计分析共花了不到三个月. 结果是废品由 75%降到 15%, 合格品由日产 5 000 个增加到 25 000 个, 还节省了三个操作工和 5 个检查员的劳动力.

经验表明, 这种用花费相对少的检查得到显著效果的事绝非例外. 在工业中用统计质量控制诊断有害的不规则性而得到显著的利益, 这种机会几乎是无限的.

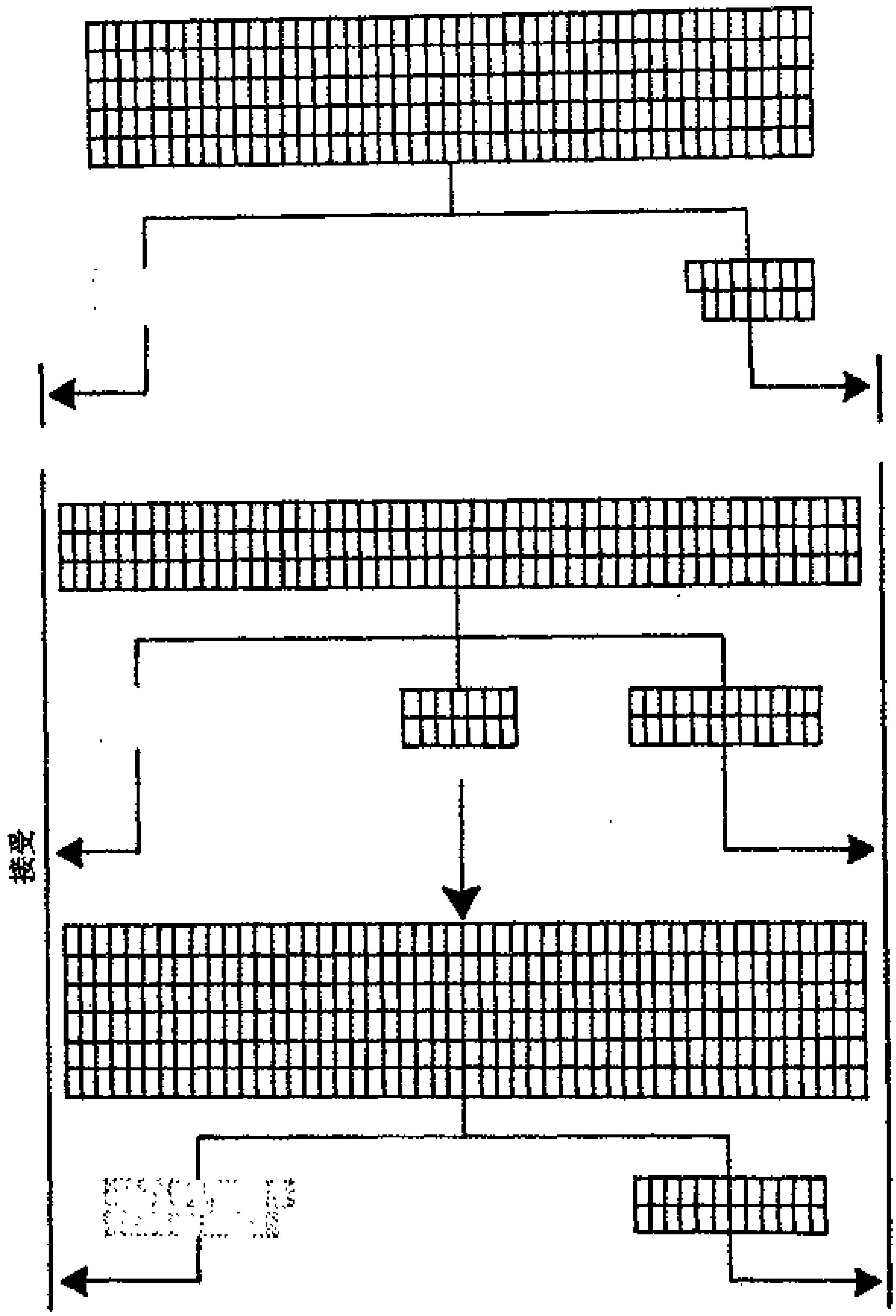
应用统计质量控制的第三个领域是计划经济的检查方案. 检查本身对产品并没有加上什么, 所以时常被看成是必不可少的祸害. 它得到这样的坏名声, 在许多情况下是由于, 在非常广泛的情况下, 检查就是一种逐个分检的操作, 把次品与正品分开. 这样作有时是经济的, 但时常也不. 它只在以下情况下才是经济的: 即制造厂无法生产出足够百分比的正品, 而要改进各种设备使得再不必逐个分检, 花费又太多, 反而分检操作的费用要低一些. 在分检操作时, 对正品也要检查, 花的时间和检查次品所需时间一样多甚至更多些, 这样就产生了一个老问题: "为什么不能只检查次品而不再花钱去检查正品呢?" 统计质量控制虽不能完全消除这种浪费, 它时常能大大减少检查"好产品"花去的费用.

如果一个工厂的产品正常情况下出现的次品百分比很小而可以接受, 那就可以安全地限于只检查那些保持这种性能所必需的操作. 这一类抽样检查本质上能提供许多信息. 可以把这种检查做得对生产过程中的任意变化都很敏感, 这样可以对产品质量即将到来的下降及时提供预警. 它们也比逐个分检便宜得多, 因为它们只对很小百分比的产出进行检查与测量.

然而, 很要紧的是要看到, 任何一种抽样的计划都有一种风险, 即样本并不具有代表性. 如果样本的质量低于从中采样的批量的质量, 则会不必要地抛弃了这一批量的产品. 反过来, 如果



分布曲线可以用来研究保护盒中炭芯的生产，保护盒是保护电话不受闪电的电击的．上图右方是炭芯的剖面图；其长度用图上方的黑色箭头表示．炭芯是用一根炭棒做的（上左），对它进行两次电击，然后装入一个瓷套中（上中）．炭芯的长度画在下面两个图表的横坐标上直到几分之一英寸．上面的一个图表中的两条曲线表示从一个月的产品中取出的炭芯样本的长度分布．注有"成形前"字样的曲线是电击前的长度分布；注有"炭芯成品"的曲线则表示电击后的长度分布．曲线上方的 LSL 表示规格下限（lower specification limit）．发现有大量炭芯成品被抛弃，因为其长度低于此限度（图表上右方曲线下的阴影区域）．改变制造过程使成形前炭芯长度分布移到左方，如下面一个图表所示．炭芯成品的分布也移向更有利的方向，使次品大为减少．下图右方曲线上的黑箭头表示炭芯成品分布图式移动的距离．



单重和双重采样见本图. 在单重采样(上图)中,从一个大得多的批量中取 225 个产品作为一个样本. 若次品不超过 14 个,就接受这一批量;若有 15 个或更多次品,这一批量就要丢掉. 在双重采样(下图)中,开始的样本要取小一些,例如 150 个产品. 若次品不超过 9 个,则接受这一批量;若有 24 个或更多次品,则要丢掉. 然而,若次品在 10 个到 23 个之间,则再次取第二个样本,在此例中比第一个样本大一倍. 若把两个样本加起来,次品数不超过 23 个,这个批量就被接受;若有 24 个次品或更多,则要丢掉.

样本比批量成品好，消费者就会得到质量很勉强的产品. 抽样检查可用来保护"批量"质量或"平均"质量. 不论是哪种情况，从特定批量中总是随机地抽取样本，如样本中的次品数不超过一个可容许的数，这一批量就可以接受. 这个数是基于计算可容许的风险. 如果次品超过了可容许数，则这一批量的每个产品都要个个检查.

有时采用双重抽样系统. 不是在一个样本的基础上决定一个批量的取舍，检查者首先取一个较小的样本作较严格的试验，即它的次品必须更少才作为通过. 如果符合了这个标准，这个批量就接受了，检查所花的力量是最小的. 若第一个样本不能符合严格的检验，再取第二个样本，通常比第一个大得多，而两个样本合起来，可容许的次品数要大一些. 双重抽样，若使用得当，需要检查的成品数会小得多.

双重抽样本身又可以推广为多重采样或顺序采样，并作一系列较大的样本试验. 然而，在许多情况下，由于有更大的复杂性，使用不当的机会更多，并且需作额外的记载，这都会抵消到顺序采样在理论上的经济性.

不论在哪一种抽样程序中，批量大小与样本大小的关系都不是固定的. 批量较小，所需的样本百分比，比之大批量，相对地要大一些. 若一个流程一贯地生产出质量高于要求的产品，通常从较大批量中抽样比较有利，因为抛掉整个批量的机会较少. 如果一个流程不太协调或时有变动，则对小批量作试验较好.

若适当应用抽样方案，其好处不止于节约检查时间. 抽样检查还对一个生产流程或一台机器的能力提供了一个历史记录，这对工程师在计划生产类似产品时会是有用的. 这些记录也对消费者有用. 因为如果生产者能提供证明，证明产品质量一贯地控制在特定水平上，他的顾客就可以减少与取消对购进品自行检查.

统计质量控制对于给即将到来的问题的预警是很有价值的. 对它发出的警告必须小心. 不论显得多么过激，都要减少生产或者把生产停止下来去寻求补救办法. 必须记住，对于不合产品可能采取的最便宜的措施就是：不去生产它.

38.

对策论

奥斯卡・摩根斯特恩*(Oskar Morgestern),1949 年 5 月号

策略博弈和经济社会行为之间的类似是如此明显,在商界和政界的思考上、甚至语言上都有广泛的流露.诸如"一场政治交易"、"玩玩股票"之类的说法就是这种类似的令人耳熟的反映.在博弈对策和这些活动之间的联系远非是表面的.当用现代数学方法来考察它们时,变得显而易见的是,经济和政治行为的许多形式都是严格等同于策略博弈,而不仅仅是类似.这样,对策的数学研究就为经济学研究提供了新的探根究底的可能性.

概率论起源于不登大雅之堂的赌博研究和职业赌徒寻求优势的企图.诸如扑克、桥牌、象棋之类的策略博弈提出了更困难的问题.在这些博弈中,结局不再只依赖于机会,并且也依赖于其他局中人的行动以及他们自身当前和将来的行动的期望,而一个局中人必须在其相当复杂的策略集中进行选择.在数学上,这类问题不但没有解决,甚至还没有触及.

德国哲学家和数学家莱布尼茨**看来已经意识到策略博弈的研究将形成社会理论的基础.另一方面,为提供一种对于个体、商界、甚至整个社会共同体的"理性行为"的理论,哲学家和经

---

* 译注:Oskar Morgenstern(1902—1977),美籍奥裔经济学家.1944 年,他与美籍匈牙利裔大数学家冯・诺依曼(John von Neumann,1903—1957)合著出版的《对策论与经济行为》一书被认为是一本划时代的著作.本文写于 1949 年.虽然对策论在最近半个世纪以来,又有许多重要发展,但本文仍然没有失去其意义.

** 译注:Gottfried Wilhelm Leibniz(1646—1716),他在数学上最大的贡献是与牛顿相互独立地发明了微积分.

济学家们沿着不同的路线作出了许多努力.

这样的理论必须是定量的，它意味着最终它必须赋有数学特征. 满足这些要求的对策论将考虑到：对策的参加者们在信息上和在智力上各不相同，他们对其他局中人的行为有不同的期望，而达到他们目的的各种途径对他们可以自定. 理论也必须顾及这样的事实：如果局中人（或者等价地，一个经济个体或一家公司）的对手察觉他的企图，那么他的处境通常会受到影响走向反方向. 局中人应该采取措施来保护自己以防万一，而理论必须指示，他应该怎样处理才更有效，以及他的反措施对其他局中人意味着什么.

为什么这样的理论对社会学家来说，尤其是对经济学家来说，是有意义的？难道今天的经济学有一个如同力学那样的具有力、平衡和稳定性之类的概念的合适模型？事实上，物理学正是在当前的研究中，从根本上为理性的经济行为提供陈述，不管它是否已经数学化. 但是在经济学中的各个层次上所出现的许多重要情况在物理学上并不能找到其对应物.

一个典型的例子是：当职工与雇主在确立工资率时，这两个群体都已经发现组成工会和行会对他们有好处. 当代经济学还不能告诉我们，在怎样的环境下就会出现这样的组织，谁将得益. 并且利益将是多少. 这两个群体有相反的利益，并且没有互不相涉的手段来追求他们各自的相冲突的目标. 他们最终必须达成某种协议，它可能对一方比对另一方更有利. 在处理这种分歧时，他们将会声东击西，虚张声势，软硬兼施；他们都将企图窥测对方的策略，而防止暴露自身的策略. 在这样的情况下，一种关于理性行为的理论应该告诉一方，面对眼前的障碍，所作的努力有多大的价值；这里的障碍是指其对手的行为以及偶然因素的影响.

垄断和垄断市场形式是所有社会经济的特征，这里垄断市场形式是指至少在市场的一方只有少数几个个人或厂商在进行交易. 它们造成严重的结仇和争斗，这是一幅与通常在经典经济学中所讨论的"自由"竞争非常不同的场景. 在正统理论中，个体被假设为面临价格和其他固定的条件，而且假设他们处于一种能控制所有变量的地位，以至他的利益或效用只取决于他自身的行动. 然而，实际上，当他们只有少数几个个体，或者许多个体组成了少数几个组合时，结局从来不会只取决于个体的行动. 没有单个个人能控制所有变量，而能控制有其中的少数几个.

在严格孤立中行动的一个个体的情形数学上可以描述为一个简单的最大值问题；即求出产生最大值或最大回报的行为公式. 涉及组合的情形的数学和逻辑结构是全然不同的. 事实上，它们提出了最大值问题的一种特有的混合；它开创了深刻的数学问题，面在物理上，甚至在经典数学上都没有什么与之相平行.

正是需要在这一层次上攻克经济行为问题. 很明显，如果从一开始先着手研究在经济和社会生活中无处不在的斗争的本性才是现实的，而不只是研究一些本质上是人为的、原子化的"自

由"竞争,其中人们被假设为像是拨一拨动一动的木偶那样行动.

对策论把每个策略博弈的解定义为分布,或者说是支付的分布,而这种分布是每个局中人要支付的,而是所有局中人的行为的函数.这样,解就应该告诉每个局中人,为达到其最大效益,在允许所有其他人的所有任意行为都有可能发生的条件下,应该怎样行动.显然,这个解的概念的内涵是非常丰富的;对于每种类型的对策求出这样的解,以至对于每一种特殊情形对它进行数值计算,会遇到巨大的数学困难.对策论要很本质地应用数理逻辑,以及组合论(对象的组合与排列的可能方式的研究)和集合论(处理共有一种或多种精确规定性质的对象全体的技巧).这一现代数学领域是特别严格的领域之一.但是,毫无疑问,想在社会现象领域有所突破,就需要重大的数学发现.

单个个体单独对策对付的是最简单的最大值问题;他的最优策略就是为他带来预定的最大增益的那个策略.考虑一个二人对策:每个局中人都希望赢得最大值,但是他赢得的仅仅是对方的付出.这种局势形成所谓零和对策,因为一个局中人的增益与另一个局中人的损失(一个负数)之和是零.一个局中人应该设计一个保证有最大好处的策略.但是对另一方来说也同样如此,以至他自然希望使对方的增益最小,自身的增益最大.这种清清楚楚的利害冲突引导出一个崭新的观念,即所谓"最小—最大"(mini - max)问题.

有些对策有一个最优的"纯"策略.换句话说,存在一连串行动,使得局中人坚持采取这些行动是可能有的最可靠的策略,而不管他的对手如何行动.一旦找到了这种策略,他的位置就不再恶化.在这样的"严格确定"的对策中,每一次行动,以至由一串行动所形成的局中人的地位,都是公开的.两个局中人都有完全信息.这一条件的数学表达就是描述对策结果的函数有"鞍点".这一数学术语基于与马鞍形状的类比,它可以看作两条曲线在一个点上的相交.在马鞍上的一条曲线是处于骑手位置的;另一条曲线则沿着马背弯曲向下.马鞍的坐位代表"最大值"曲线,而它的最低点是"最大化最小点".跨骑马背的曲线是"最小值"曲线,它的最高点是"最小化最大点".两条曲线相交于马鞍的中心的点就是"鞍点".在对策论中,某些更特殊的鞍点是两种特别的策略的相交.

两个局中人之间的策略博弈,其中每人有三个策略,这就形成九种可能有的结果.方格中的数代表对于每一由两个局中人作出的决策的组合,A 的增益或损失.

在这种假想的对策中所引起的策略的数学值表示在这页中的图中.这表示两个局中人 A 和 B 之间的一个简单对策,每个局中人可采取三个可能的策略.A 和 B 的变动有九种可能的

组合. 在方格中的数表示对于所有组合策略的 A 的增益或损失；由于这是一个零和对策，它的负值表示 B 的损失或增益. A 的最小化最大策略是 A-2，因为他采取它以后，不管 B 怎么做，能保证赢得两个单位以上. 类似地有，B 的最大化最小策略是 B-1，对此不管 A 的行动计划是什么，他的损失不可能多于两个单位. A-2 行与 B-1 列相交的点就是这个对策的鞍点.

看来似乎 B 不该去进行这样的对策，因为他即使采取他的最好策略，也必定损失两个单位，而任何其他策略都会使他损失更为惨重. 最好的情况下，他可以赢得一个单位，但那是仅当 A 犯错误时才会发生. 所有严格确定的策略都有这种特性. 一个简单的例子是井字游戏（ticktack-toe）. 当一局井字游戏完成时，结果将以"三点一线"为标志. 较复杂的例子是象棋，它有一个鞍点和一个纯策略. 象棋是激动人心的，因为其可能的行动和局中人地位的个数之多，使得要求得这种策略最好的计算机也无能为力.

然而，另一种二人零和对策没有单个最好可能的策略. 这类对策包括从硬币配对到桥牌扑克之类的博弈，以及大多数军事对阵. 在这类对策中，如果一个局中人的策略被其对手发现，那么对他来说将是一场灾难；因而它不是严格确定的. 局中人主要心计就都放在保护其策略不被发现. 对于"非严格确定"对策是否存在安全的好策略，使得他们的选择将使对策又变成严格确定的？在一个这样的对策中，局中人能否求得"纯"策略以外的策略，使得他的行为完全"理性"？数学上来说，鞍点是否总存在？

回答是肯定的，其证明原先是由数学家约翰・冯・诺依曼做出的. 冯・诺依曼是对策论的创始人，现在在普林斯顿的高等研究所工作. 他运用了各种现代数学的基本工具，其中包括荷兰数学家布劳威尔*的所谓不动点定理. 冯・诺依曼把这条定理既复杂又严格地用到对策论上，证明了存在单个"稳定"或理性的行动过程，它表示甚至在非严格确定的对策中的最好策略或者鞍点.

这一原理也可以用实际的情况来阐明. 观察指出，在局中人的行动计划被发现将有危险后果的对策中，他可以避免坚持运用一个纯策略，而只是以一定的概率来选用它. 换用统计决策使得对手不可能发现其策略. 因为局中人的主要目标必须是防止信息由其本人向对方泄漏，完成这点的最好途径就是本人也没有信息. 其具体做法就是：不去选择一个确定的行动方案，而是以不同的概率来考虑各种可能的交替.

概率的本质在于个体事件不能预测，使得实际应用的策略将被保守秘密直至决策的时刻，使得不但对其对手保密，甚至对局中人本人都是如此. 这种犹豫不决的类型是已知的经验事实.

---

* 译注：L. E. J. Brouwer（1881—1966），作为数学家，他除了拓扑学上的成就外，更为重要的是，他是数学基础的直觉主义学派的主帅. 关于他的不动点定理，详见本书第 18 章"不动点".

只要其意图不暴露有好处时，人们就会躲躲闪闪，试图在其他人的思想上造成不确定性，让他们产生怀疑，并且同时又千方百计要揭穿密封其对手整个运作的幕布．

扑克游戏是精彩的例子．在一个相当简单的形式下，这种行为的类型可用硬币配对游戏来解释．这里最好的策略是随机地出正面或反面，并且小心翼翼地使每面都只出现一半次数．因为对手也可采用同样的策略，当游戏进行的时间足够长，并且两人都知道这一原理时，两个局中人将打成平手．随着可能的变动的个数越来越多，计算最好策略也就越来越困难．例如，有一种意大利游戏叫做摩拉（Morra）*，其中每个局中人都可伸出一个、两个或三个手指，并且同时喊出他猜测的他本人和对手的手指数的和．这时，一个局中人就有 9 种可能的策略．他的最安全的行动进程就是每次都猜总共四个手指，并且在每 12 次游戏中，按下法变动自己伸出的手指数：一个手指五次，两个手指四次，三个手指三次．如果他以这种混合策略来进行游戏，那么他至少不输不赢，而不管对手如何行动．

让我们把这些原理用到一个简单的经济问题中去．假设有两个厂商在一个给定的消费市场上竞争，每个厂商考虑三种不同的销售策略．在右图的矩阵给定了厂商 A 的每个策略的可能的值．这一形势下，没有单个最好策略．如果 A 选择策略 A-1，B 可以通过运用策略 B-2 或B-3来使 A 的利润限于一个单位；如果 A 选择策略 A-2 或 A-3，那么 B 可以选择策略 B-1，使得 A 无利可得．这样，如果厂商集中于单种销售技巧，并且他的对手又发现了他的计划，那么他必败无疑．分析指出，A 除非采用 A-1，A-2 和 A-3 的次数各占三分之一这种混合策略，否则将总有损失．另一方面，如果 B 不采用他的最好混合策略（B-1 占次数的九分之一，B-2 占次数的九分之二，B-3 占次数的三分之二），他将使他的对手得利．这些混合策略是最安全的策略．厂商无论是否知道其对手将怎样干，他们都该这样干．

A \ B	B-1	B-2	B-3
A-1	4	1	1
A-2	0	3	1
A-3	0	0	2

两个厂商之间的商业竞争，其中每个厂商有三个策略，方格中的数仍然代表 A 的可能增益．只要对手能发现其策略，没有任何单个策略是最好的；因而双方都必须运用所有三种策略的混合．

有一个例子可以用统计的语言来说明日常生活中引起的许多选择的冲突，那就是著名的歇洛克·福尔摩斯被他的主要敌

---

* 译注：这种游戏与中国人的划拳类似．其区别仅在于摩拉只能伸 1—3 个手指，而划拳可以伸出 1—5 个手指，或者不伸手指．有兴趣的读者可以对划拳进行类似的计算．

手莫利亚尔蒂教授追杀的故事，即在柯南·道尔的小说《最后的问题》中的故事. 福尔摩斯计划坐火车从伦敦到多佛尔，然后再从那里逃往欧洲大陆. 就在去多佛尔的火车离开维多利亚车站时，莫利亚尔蒂冲进月台，两人互相看了一眼. 莫利亚尔蒂留在车站. 他包租了一列专门的火车，继续他的跟踪. 于是私家侦探福尔摩斯面临如何使他的追杀者出其不意的问题. 他究竟是在坎特布里（仅有的中间停靠站）下车，还是不顾一切地去多佛尔？而莫利亚尔蒂又该怎么做？事实上，这一形势可以或多或少地看成硬币配对的不寻常的版本：如果两人决定去同一个地方，并在那里相遇，那就发生了"配对". 假定这样的配对将意味着歇洛克·福尔摩斯之死，因而它对莫利亚尔蒂可以说有一个任意指定值的利好，比如 100. 如果福尔摩斯到了多佛尔，并且取道去了大陆，这显然对于教授来说是失败，但同样显然的是这一失败并非严重到像对于福尔摩斯来说的末日来临的地步. 因此，在这种情况下，对莫利亚尔蒂可给他一个－50 的值. 最后，如果福尔摩斯在块特布里下车，而莫利亚尔蒂去了多佛尔，那么追杀并未结束，这种临时结局可看作一种平手. 按照对策论的观点，这种偶然情况是 60 到 40 对教授有利.

当然，在故事中，这一对决只进行了一次：歇洛克·福尔摩斯推断莫利亚尔蒂将去多佛尔而在坎特布里下车，并且得意地眼看教授的跟踪火车飞速通过这个中间站. 然而，如果这一对决继续下去，福尔摩斯的得意是不大能站住脚的. 假定莫利亚尔蒂坚持他的追杀，计算指出，大侦探实际上在他的火车离开维多利亚车站时，其处境之好不过是：死的机会不大，仅仅 40％而已！

对策论已经用到许多实际问题中去. 类似于福尔摩斯的处境的那样的形势，在处理军事战术的运筹学的分支中就这样分析过；其中需要研究在双方力量的不同对比条件下，各种可能的行动过程. 对经济学中存在的更复杂的形势的研究要求使用计算机. 例如，两个互相竞争的汽车厂商都可以有许许多多种策略，诸如各种车体设计选择，增加新附件，宣布新模式和价格变化的最好时机等等. 已经估计过，对于一个有 100 个可能的策略的厂商，如果其竞争者有 200 个（这并非不常见）策略，那么其对策的计算需要一台电子计算机算上一年*.

如果我们现在把对策转向三人甚至更多的人的情形，就会出现一种基本上是新的现象，也就是，在某些局中人之间有联合起来一起对付其他人的倾向，或者如同在市场中那样，形成贸易联盟，同业联盟和托拉斯. 这样的联盟仅当他们为其成员提供比单独行动时更多的利益，才是成功的. 于是就有两个联盟成了二人对策中的个体局中人，并以那样的方式相互对抗. 一个联盟对于参加它的每个局中人可规定一个"门槛费"：老的局中人可以对愿意加入联盟的新来者要求支付或"补偿"门槛费，也规定对其收入分享的份额. 作为一条法则，对在联盟的成员之中如何确定

* 译注：这是 1949 年的情况. 现在只需要几秒钟.

增益或利润的分配制度，要进行一场重要的谈判交易.

联盟的形成基本上表达了垄断倾向，这被认为是社会和经济生活中的深刻特征.事实上，亚当·斯密*已经注意到商人有“串通一气”来反对公共福利的倾向；正如他所提出的，他们会为了更厉害地盘剥而结成一伙.美国经济史的一个篇章就是：政府如何努力粉碎各种各样的密谋，以限制托拉斯和其他兼并的势力.但是一个托拉斯哪怕是一旦已被全部粉碎，它也会企图东山再起，所以必须继续提高警惕.

因此，强大势力的垄断趋向应该是经济学研究的中心.垄断必将取代纯粹的自由竞争先已占据的统治局面（其实这种局面从来没有存在过）；现代经济理论的出发点是：在自由竞争中，任何人对任何事都没有任何可觉察的影响，并且所有数据都被假定为事先给定的.这其实只是一种臆想的框架，而一旦面对垄断竞争的现实，它就会遇到不可克服的困难.

在对策论中处理联盟问题的方法可以用下述三人对局来说明，其中一个局中人在任何对局中仅当他与另一个局中人联合时才有增益.每个个体局中人在他的每个可能的联盟中所引起的增益和损失如 495 页的图.这样，如果 A 和 B 形成联盟，两人就各得半个单位，而 C 就损失一个单位.对策中的局中人之所以愿意参加一个对局，仅在于他们全有机会获利；于是每个局中人的问题就在于，在任何给定的交易中，如何与另外两者之一形成联盟以获取成功.这一简单的局势说明，为什么在现代经济生活中发生的冲突会如此之多.

现在可以看到，这种类型的对策的重要特征在于对于任何个体局中人来说，没有单个“最好”策略.例如，A 既可以与 B，也可以与 C 联盟，而其增益是一样的.因此，所有三种可能的支付分布，如果看成一个整体，就必须看成这一三人对策的解.

当然，还有许多其他的分布模式可被局中人们考虑.例如，联盟中的成员之一可以与第三个局中人作一笔交易，使他们两人以牺牲另一个成员的支付为代价，而使他们二人处境都有所改善（第三个局中人的改善只不过是减少损失）.什么才能防止对策参与者搞这些鬼点子？

问题可以通过引人“优越（domination）”的概念来回答.在数学术语上，各种支付分布可能的模式称为“分配（imputation）”.一种分配称为优越于另一种分配是指对于给定的联盟的所有局中人来说，显然都有更多的好处.正如在上述三人对策中所指出，构成一个解的各种分配彼此互相不优越：在这一情形下，所有三种分配有同样被选机会；对于每种联盟中的局中人来说，没有一种分配有更多的好处.尽管在数学上要证明对于每个有任意多个局中人的对策都有一个这样

---

* 译注：Adam Smith（1723—1790），英国经济学家.古典经济学的创始人.

的解是极端困难的，但是还是可以期望这个原理仍是对的.*

现在也已经发现，当属于解的分配不是互相优越时，若采用解以外的分配，则对单个局中人就不一定没有优越关系了. 换句话说，总存在外部的模式，使得某些局中人可以得利. 但是任何一个解以外的分配总是有一个属于解的分配比它优越，以至将被看作风险太大而被拒绝. 于是不按照大家都接受行为标准行事的分配被看作是不安全的，而只有作为解的一部分的一种分配才可实现.

INDIVIDUAL PLAYERS / COALITIONS	A	B	C
A,B	½	½	-1
A,C	½	-1	½
B,C	-1	½	½

带有三个局中人的联盟对策还产生另一种矩阵. 这里由各种可能的联盟对局中人生成的增益或损失在垂直的列中指出. 局中人必须与别人形成联盟才能赢.

这些例子使我们对一个社会和经济组织的极端复杂性有了一个概念. 在这个领域中，要求"稳定性"比在物理科学中更甚；对于后者，一个问题的解通常是通过一个数或一个数组来给出的. 在对策中，不论是经济对决还是军事对决，解则是一组结果，其中没有一个比另一个或者比所有其他的要好. 在集合中的一种分配不比任何其他的分配更稳定，因为每种分配都可能受到解以外的分配的威胁. 但是每个又都有一定的稳定性，因为它受到解中其他潜在的分配所保护，以免它受到外界的侵扰. 它们汇集在一起消除了反叛的危险. 然而，平衡是最为微妙的，并且随着局中人的个数的增加，它变得越来越敏感. 这些高阶对策可以有许多解，而不止有一个解；在一个个别的解内部互相不冲突，而不同的解或不同的行为标准中的分配可以互相冲突.

这种解的多重性可以解释为一件无可争辩的事实的数学陈述，那就是虽然经济和文化的物质背景相同，却可以建立绝然不同的社会类型. 而在每个社会的内部，收入分布、特权和其他优势方面都可能有显著的区别，这就对应于在对策的单个解中，分配或者分布模式的多重性.

这个理论甚至对于更微妙的社会现象也可以给出洞察. 尽管假定每个局中人有完全信息，歧视还是可能存在：两个局中人都可以把第三局中人变成一个"假象"，即给他固定的收益，但又在任何谈判和联盟中把他排斥在外. 这种安排又不是对第三人的完全的剥削. 在实际经济生活中，例如，同业联盟并不消灭所有外部的厂商，虽然这不是技术上很困难的操作. 尤其是，与社会

* 译注：后来文献中把这样定义的解称为对策的冯·诺依曼-摩根斯特恩解. 但是并不是任何对策都有这样的解. 1967 年夏普莱(Shapley)首先构造出不存在冯·诺依曼-摩根斯特恩解的对策.

上接受的行为标准有所不同的是，他们允许一定数量的外来户分享行业的一部分收益，使得人们对他们不过分注意，让政府和公众以为在这特殊的行业中存在"竞争".

这是令人惊奇和极为意味深长的. 虽然在发展对策论时并未对这样的形势有过专门的考虑，而这样的形势的存在是用纯粹的数学方法由一般定理导出的. 更进一步的是，理论同样用纯数学指出，某些特权，甚至是作为博弈规则（或社会规则）硬性规定的特权，只要它们与大家都接受的行为标准有冲突，也不可能总由受益者维持下去. 一个有特权的个人或团体，为了在经济上生存下去，应该放弃他们的所有"好处".

这些以及许多其他的涵义都可由简单的三人对策研究来导出. 多于三个局中人的对策将提供更有意义的见解，但是在许多情形下，其巨大的代价是其不可克服的数学困难. 所引起的几乎是不可想像的复杂性，可以用扑克来说明，这种博弈超过其他所有博弈，为经济和社会形势提供了一个模型. 扑克的奥妙以及可采用的策略不计其数（例如，欲擒故纵，瞎吹牛，使得以后再吹牛也可能成功）就成为整个分析的障碍，而这种分析对于洞察实际日常事务所对应的问题是必要的. 由于扑克的可能策略的矩阵是如此之大，从没有去计算过它，更不说把它画出来了. 有一个从根本上简化了的博弈的文本，其中假定一局只有三张牌，一张底牌，两名局中人，两人间有三次开叫下注机会，第一个局中人有两次，而第二个局中人只有一次，没有追叫. 甚至这样的一清二楚的扑克文本也要求一个 1 728 项的矩阵，如果想对每个局中人以百分之十的精度计算单个最好可能的策略，几乎需要二百万次乘法和加法.

但是，尽管有这样的局限性，对策论已经使我们有可能分析以往的经济理论范围以外的问题. 除了已经指出的以外，现在正在探索的问题包括数学对于一个七人对策问题的应用，这问题来自确定一个特殊工业的最好厂址问题，还有工会与管理之间的关系问题，还有垄断的本性问题.

对策论中的原始问题是使"理性行为"的概念精确化. 定性或哲学的论证已经走进了死胡同，新的定量方法可能会提出一个正确方向. 现在的应用还是很有限的，但是前进的途径是遵循一步一步处理这一科学传统，而不是企图毕其功于一役，一下就把所有现象都包括在一个伟大的通解中. 我们全都希望有朝一日会发现真正的科学理论来确切地告诉我们怎样有稳定的就业，怎样增加国民收入和恰当地分配收入. 然而我们必须首先学会在有限的领域中达到精确和运用自如，然后再来处理越来越复杂的问题. 经济学中无捷径.

39.

对策论的运用与滥用

阿纳托尔·雷珀玻尔特(Anatol Rapoport),1962 年 12 月号

我们生活在一个有信仰的时代——信仰科学万能.这一信仰是以下列事实为基础的:把科学家找来解决的问题,绝大多数都是科学家自己提出来的.例如,我们的国防部从未在某天决定要一个原子弹,然后命令科学家去制造它.相反,当年是一位科学家阿尔伯特·爱因斯坦告诉一位决策者富兰克林·罗斯福,说这样的炸弹是可能的.今天,在比以往更大的程度上,科学家坐在决策者的身旁,说什么问题是科学可以解决的,从而引导决策者只提出这样的问题,而科学不能解的问题一般不会去提出.因此才出现了对于科学万能的信仰.

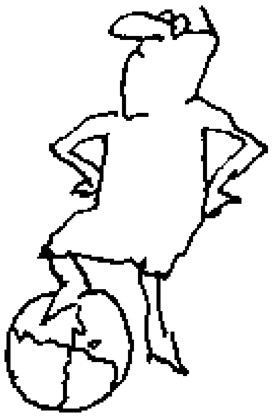
科学的自我夸大的声望目前在决策者更是有加未已,这是由于越来越流行说科学有助于决策本身.这就是对策论,一种分析冲突的数学技巧;它首先由冯·诺依曼于 1927 年奠基,然后因冯·诺依曼与摩根斯特恩于 1944 年出版的题为《对策论与经济行为》的一书引起广泛的注意.现在对策论是具有最高度原创性的智力成就,并且开拓了一个广阔的研究领域.不幸的是,对策论进入了某些领域,而在这些领域中,弗兰西斯·培根* 的警句“知识就是力量”是按其原原本本的冷酷无情的意义来解释的.在我们的社会中,决策者都以倾其全力的姿态来全神贯注于权力冲突,不管是在商界、政界还是在军界.对策论是“冲突的科学”.如果它不是那些跑得最快,劲头最足的人的权力宝库,又是什么呢?

对于对策论的彻底的理解将使这些贪婪的妄想化为泡影.对策论的知识并不能使人变为一

---

* 译注:Francis Bacon(1561—1626),英国作家和哲学家.

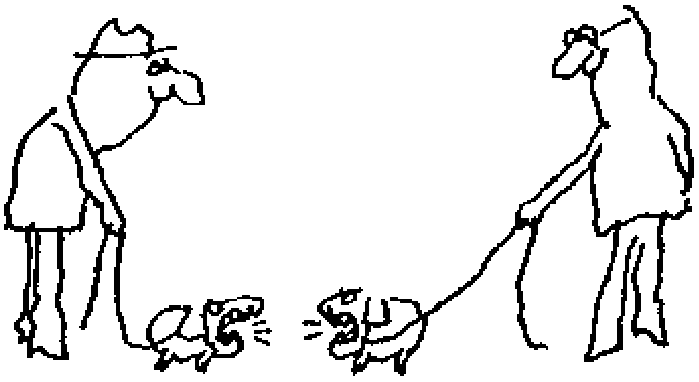
个好牌手、好商人或者好军事战略家，因为对策论首先并不致力于对任何特殊的冲突形势揭示最优策略. 它关心的是冲突的逻辑，即策略的理论. 理论的威力及其局限性全在其中. 其威力来自强大而又晦涩的数学工具能承担某些冲突形势的策略分析. 局限则来自，使这种分析能成功应用的冲突，其范围本身也有局限.



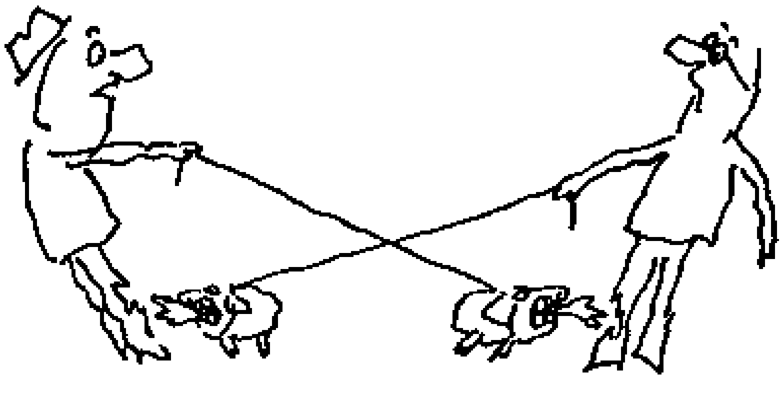
万能科学家

毫无疑问，策略的逻辑不可应用于某些冲突. 例如，在狗打架中就没有策略的考虑. 这样的冲突不如说是一个接着一个的一系列事件. 一声吼叫激起一声反吼叫，继而又激起咬牙切齿，突然出击，如此等等. 信号激起姿态，姿态激起行动. 人类争吵时常是只吆喝不练互相刺激，经常也是这种类型. 这种冲突可以叫做争斗. 争斗的动机是敌视. 目的是消除叫人如鲠在喉的敌手，而不是另一个人；其人虽有敌意，却也有目的与策略，需要考虑. 智力通常在争斗中也不起任何作用，因为智力是用于计算双方的能力，争斗的前景，比较不同的行动过程的.

对策论应用于非常不同的冲突类型，目前在技术上称为博弈. 众所周知的博弈诸如扑克、象棋、井字游戏等等都是严格技术意义下的博弈. 然而，这类室内博弈之所以成为博弈，并不在于它们只是为了消遣，而与实际生活不相干. 它们成为博弈是因为它们是可形式化的冲突的例子：双方或多方之间存在利害冲突；每一方在某些确定的时间可以有抉择余地但抉择必须符合事先制定的规则；结局由所有各方所作的抉择的总体来定，并且每一种情形下，都要考虑对方的抉择，或把自己的考虑告知对方. 这些决定了双方的得失. 推而广之，任何按此施行的冲突都属于博弈论所定义的博弈之范畴，不管这些规则是否是公众协议的结果，或者干脆就是形势强加的约束. 即使没有公认的战争规则，军事形势还是可以看成一场博弈，只要在任何给定的阶段对每个对手公开的抉择范围可以确切地规定.



您吼一声我就反吼一声.



您咬一口我就反咬一口.

冲突升级了.

让我们来看看，象棋和扑克为什么满足这些要求．在象棋中，利害冲突自然意味着两个棋手都想赢．对于每个棋手来说，轮到他走时其抉择范围就是他能走的所有合法的棋着．结局由两名棋手所有抉择来决定．在扑克中，形势不完全一样．在规定时刻的抉择在于是否跟牌；怎样的牌该退出；是否加码，加多少等等．每轮的结局是牌手之一作为赢家统吃．得失通常是钱．

扑克与象棋在一个重要方面有所不同．在扑克博弈中存在一个额外的不露面的局中人，他在每轮牌开始时恰好作一次抉择．这次抉择对于决定结局极为重要，但是该局中人在博弈中既无利可图，也不用付钱．这个局中人的名字是"运气"即"机遇"(Chance)，而他的抉择就是在每轮开始时的发牌．这时，运气将从将近一亿兆兆兆兆兆(10^{68})种可能的排列中选出一种来．"运气"在牌局中不再作其他抉择，其余的都是牌手们的事．人们可能争辩说，"运气"还会继续干涉，例如出于记忆有误，引导或者误导牌手们的注意等等．但是对策论只关心完美的局中人的行为．

虽然"运气"可能这样扮演一个角色，由对策论定义的博弈还是显然不同于由相当古老和人们熟知的赌博数学处理过的赌博．后者有引人注目的历史重要性；正是由于赌博理论的关系，概率论才在 300 多年以前首次发展起来．从此，概率论就融人所有需要考虑偶然性规律的科学分支，诸如基本粒子物理，遗传学，保险学，经济学，实验心理学，群体行为心理学等等．对于赌徒来说，概率的数学理论有可能对偶然性作出精确的计算．这通常需要相当精微的数学思辨．然而，在进行博弈时，这是毫不相干的；只是在决定是否进行博弈时要考虑一下概率．当可能结局的概率一旦算出，赌博问题就已得到解决．如果存在多个这样的结局，联系每个结局的增益或者损失应乘以对应各结局的概率，再把乘积附上适当的符号相加，合成的数就是期望增益．这就是说，当赌局按照这样的概率来安排时，这样的赌局长时间地进行下去，增益是可以如此合理期望的．一个理性的赌徒就是用这样的方式最大化其期望增益；由此决定接受或者提供赌博．所有赌场老板都是理性赌徒．这正是他们在此道上还能呆下去的原因．

赌博理论不宜用来指导真正的博弈．这可由一件人所共知的事实来说明：一个理性赌徒在扑克游戏中时常要倒大霉．理性赌徒严格按照概率的计算来进行决策．他将从不虚张声势，他将按他手中的牌的强度按比例来进行他的赌局．结果他就会把他手中的牌泄露给他的对手，而对手们就会利用这些信息来害他．

赌博理论甚至对井字游戏也没有多少用处．井字游戏是一种博弈，其中对于每一个可能产生的局势都有一着最好的下法．我们知道，"运气"在某些博弈中不起任何作用．肯定可以说，在所有纸牌游戏中都有运气，但是正如扑克的例子所指出，其中还涉及某些其他的东西，那就是策略技巧，而那完全不是赌博理论的一部分．

琢磨一下棋手是如何思考的*：如果我走马二进三捉他的车，那么他可能走车四平五，叫将. 这时，我可以撑士. 另一方面，他可以不管捉车，而回以士四进五反捉车；于是我又有下列选择……

棋手越强，这样推理的棋步也就越多. 但是由于我们在一段时间内的脑力有限，这样的推理必须在某个时候停止. 对于一名棋手来说，他只能考虑到目前棋势的几步以后就要停下来了，同时在可能的新棋势的集合中必须选择一步棋. 当前发生的棋势一部分取决于他自己的选择，一部分取决于对手的选择(而第一个棋手对此全然无法控制). 在行动的选择中要作两种决策：首先是目前可能发生那些棋势？其次是所有这些棋势中，那一步更好？

如果博弈中能够想到最后一着棋，那么现在这些问题就可毫不含糊地得到回答. 然而，在一场诸如象棋那样的博弈中，能预见自始至终的所有棋步绝无可能(除非已到了快要将死的稳操胜券的残局). 所以高明的棋手只考虑下一步的好棋：他根据他估计棋势的经验，计算各种可能的未来位置的相对价值. 但是考虑到他控制的仅仅是他自己的棋步，而不是对手的棋步，他又怎么能知道他真能达到哪一个位置呢？棋手们都认识到，有两种下棋哲学. 一种是"棋盘棋"；另一种是"对手棋".

对手棋使得象棋像是心理战. 伟大的象棋大师约瑟·卡巴勃兰卡(José Capablanka)在他对事件的回忆录中讲了这种戏剧性的冲突. 1918 年在一次锦标赛中，他与美国冠军弗兰克·马歇尔(Frank J. Marshall)比赛. 马歇尔对卡巴勃兰卡的习惯性开局下出了意想不到的对着，以至使整个棋局完全出乎常规. 卡巴勃兰卡怀疑，马歇尔已经发现一种进攻的新变化，并且把这一知识当作秘密武器保留，仅在最关键的时刻运用，也就是在一次象棋世界的众人都瞪大了眼睛看着的国际大赛中，面对一位真正令人生畏的对手时运用. 卡巴勃兰卡已经被当作新战略的牺牲品.

玩股市和吃角子机并不用到对策论.

"然而，拼杀的欲火已经在焚烧我的全身."卡巴勃兰卡继续说，"我感到我的判断和技巧受到一位在两方面都有理由怕我(由我们以前交手记录作证)的棋手的挑战，他以为我会因为我不熟悉面他已苦心钻研许多日日夜夜的招数而大吃一惊，这样就会为他带来好处……于是我审视我的局面，断定我还是高他一着，这样

* 译注：原文这里作者随手写了几步国际象棋. 为便于我国读者阅读，译者把它改为中国象棋的说法.

我接受挑战.”

他就是这样做了而且赢了这一局. 卡巴勃兰卡的决策基于对他对手的思想过程的考虑;其中不仅考虑到这局棋的棋步,并且还有马歇尔的野心,他对卡巴勃兰卡的棋力的估计,他的一相情愿的意向,如此等等. 卡巴勃兰卡就是这样与对手斗智.

象棋中的心理战

虽然博弈对策的戏剧紧密联系着冲突的心理方面,对策论则对这些方面置之不理. 对策论可以说只管棋盘棋. 它只注意策略的逻辑部分. 无论面对大师与面对初学者,它开出的都是同样的作战方案. 当用对策论方法完全分析一种博弈对策后,也就给这种对策什么都不留下. 井字游戏就是一个典型的例子. 这种游戏不是成年人玩的,因为它已经被完全分析过. 分析指出,每局井字游戏都必然以平局结束. 跳棋也几乎是这样,尽管只有非常出色的玩家才通晓所有有关的策略,一代人以前,人们曾经以为象棋也已经接近于“死局”. 但是随着许多新发现的出现,尤其是心理战被引进象棋赛,其中特别是俄国大师们的贡献,使象棋又重返青春. 尽管如此,卡内基工学院的西蒙(H. A. Simon)和内维尔(Allen Newell)已经严肃地预测,十年内象棋世界冠军将是一台电子计算机. 预测是三年多以前作的. 现在还有极好的机会使它成真*.

象棋中的高级心理战

那么什么是对策论的目标呢? 难道就是为了揭露每一种形式化的对策的逻辑,使得每个局中人的最好策略都被发现? 这样不就是使每次对策的结局都在事先已知,使对策作为整体宣告死亡? 这可不能这么说. 真正能进行这种分析的对策类仅仅是各种对策中非常小的类,即使只作原则上的分析,也会遇到巨大困难,更不说实际操作了.

这类对策以完全信息对策而著称. 它们就是不可能有军事秘密的对策. 象棋就是这种对策. 不管马歇尔是如何苦心积虑地为对付卡巴勃兰卡想出惊人之着,他并未藏有任何棋手都不可能发现的高招. 他只能希望他的高招由于人们的局限而被忽视.

并非所有对策都是完全信息的对策. 扑克就不是这种对策. 扑克的本质在于它处于一种没有一个局中人知道整个形势的状况,以至每人必须猜测形势,猜测别人将干什么. 象棋和扑克都是“零和对策”,其意义是指一个局中人所赢得的就是其他人输掉的但也并非所有对策都是零和的.

为理解这些不同的对策类之间的不同,让我们来每类中看看某些例子. 我们想要表明一个

* 译注:如所周知,直到近四十年后的今天,这一预测才得以实现. 1998 年 IBM 公司的“深蓝”计算机第一次击败了国际象棋世界冠军卡尔波夫.

基本思想，即每种形势的类型需要一种不同的推理类型.

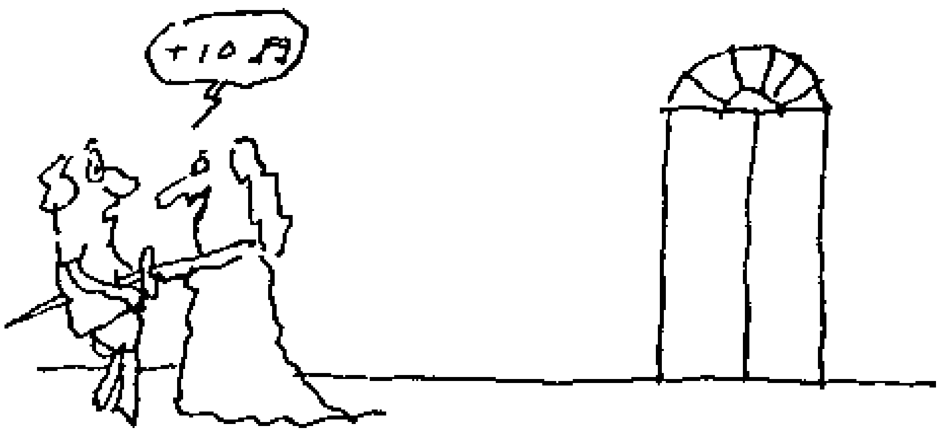
在商业竞争中有一个不寻常的初等形势可用来解释完全信息对策. 这一形势是另一种形式的二人零和对策. 卡斯托(Castor)公司是一个历史悠久的厂商，它正在受到一个来势汹汹的新来者，珀留克斯(Pollux)公司的倾轧. 卡斯托公司通过本公司的收支平衡表来指导它的政策，而其收支平衡表是提前一年制订的. 珀留克斯也用收支平衡表来指导它的政策，但是不是用它自己的，而是用卡斯托公司的. 它的目标是把卡斯托公司挤出商界，所以它把卡斯托公司的损失就看成它们的增益，以及也把它们的损失看作卡斯托公司的增益，而全然不顾它们自己的收支平衡表. 两家公司都面临着一项决策，看是否要采取广泛的广告战. 结局取决于两家公司的所作所为，当然两家公司都只能控制自己的决策. 然而，又假定两家厂商都有充分的信息，来弄清楚给定两家决策以后的结局(见 505 页的矩阵).

从卡斯托公司的观点来看，它作出某个决策后，结局是好是坏还要取决于珀留克斯的动向. 他就设身处地为珀留克斯着想：如果珀留克斯决定作广告(P_r)，则卡斯托不论作广告(C_r)或不作(C_N)，都要赔钱. 如果作就少赔一点，赤字一百万，否则还要赔得更多，赤字三百万. 所以卡斯托应该作广告. 然后他又站在自己的立场上问另外一个问题. 如果知道了珀留克斯的动向，他自己又该如何回应？如果珀留克斯作广告(P_r)，自己作只赔一百万不作要赔三百万. 如果珀留克斯不作广告(P_N)，自己还是作广告好，因为赚一百万是有把握的. 甚至有可能赚得更多：二百万. 总之，卡斯托的决策应该是：作广告. 类似的推理可以适用于珀留克斯. 结论也还是作广告(P_r). 这两家公司都是：两害相权取其轻. 用对策论的语言叫做“最小—最大”(mini - max)，即在最小值中取其最大者. 其实，任何对策，只要一方之所得即另一方之所失，而且对于一方的“不幸中的大幸”也一定是对方的“不幸中的大幸”，则不论各方有多少招数可供选择. 总是可以适用以上的推理. 这种情况对策论中称为有“鞍点”存在(取这个名字是因为顺着马身的方向看，鞍点是最低点，而横着马身看，它又是最高点). 对策论证明了，只要有鞍点存在，则必有一种决策，使哪一方都不能更改善自己的处境(当然也不能恶化对方的处境). 结局是必不可免的，和井字游戏一样.

下一形势有所不同. 它还是各方在两个策略中选择的二人零和对策. 然而，在这一情形下，必须在缺少对手决策的信息下作出抉择. 这几乎就是在大雾中作战所引起的军事形势.

一位部队指挥员必须决定在两个地段之一发起进攻. 突破一个地段将比突破另一个地段更有价值，但是更有价值的地段也会遇到更强有力的抵抗. 防守的指挥员也有一个问题：哪一个地段应该加强. 看来似乎是显然的，应该不惜牺牲其次的地段来得到加强最关键的地段. 但是显然防守的指挥员面临的问题更为复杂. 保密是要害. 如果他做的恰好就是敌人希望他做的，去加强

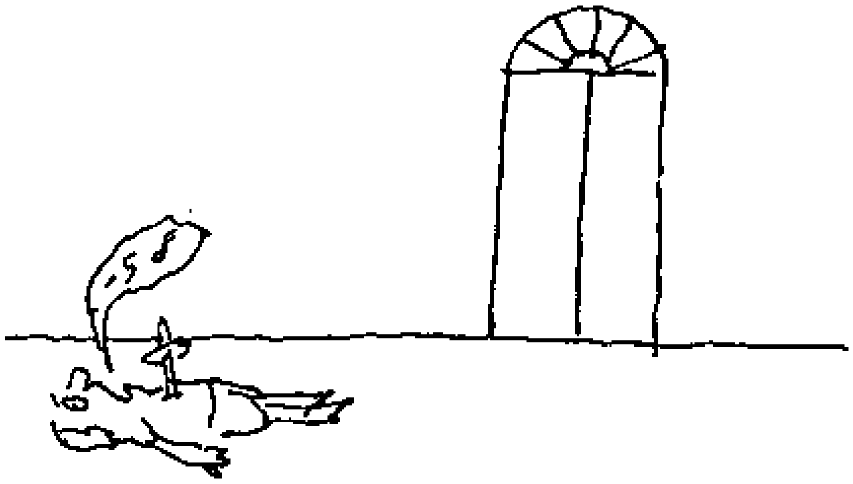
关键地段，这不会对敌人有利吗？如果敌人知道了重要地段防守也更强，那么他会不会不进攻重要地段，而进攻较弱的地段，即使突破后的价值较小，仍是更为妥当？如果防守者因此就反其道而行去加强次要地段，他想：敌方避强就弱，使得次要地段更易受到进攻，他不想给对方有机可乘，而转而加强第二地段？然而，是否敌方并未聪明到如此地步，以至它仍然进攻原来的地段达到它所企图的突破？



“托斯卡”中的对策论：托斯卡欺骗并刺死了斯卡尔披亚.

进攻的指挥员也在进行同样转弯曲折的算计. 他是否由于第一地段更像是会受到强烈抵抗而去进攻第二地段？或者因为敌方希望他避重就轻而应该仍然进攻第一地段？

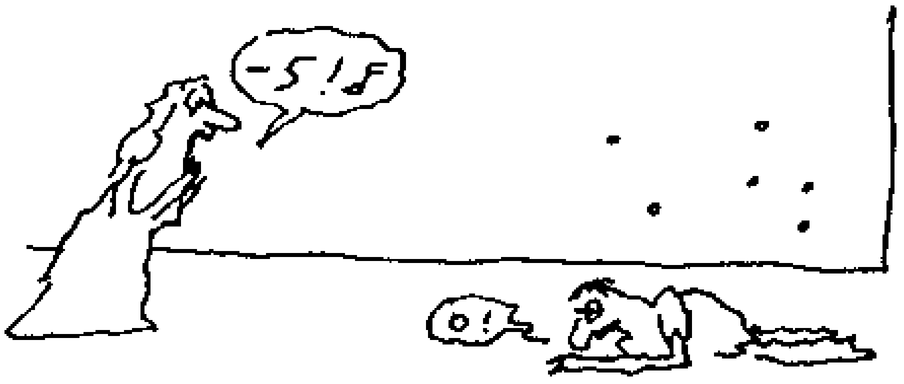
失望之下，进攻的指挥员请对策论专家来当参谋. 如果对策论专家要帮助他，将军必须对四种结局的每一种都指定一个数值；也就是说，他必须（以相对单位）估计每种结局对他“值”多少. 他所指定的数值在 504 页的图上指出. 对策论专家考察了这些情景后，对将军参谋如下：“掷一颗骰子. 如果是一点或六点，进攻第一地段，否则进攻第二地段.”



斯卡尔披亚想到即将发生的事感到满足.

如果防守指挥员对四种结局指定同样的值（但是带相反的符号，因为他是敌方），那么他的对策论专家将为他参谋如下：“扔两个硬币. 如果两个都是正面，那么加强第一地段，否则加强第二地段.”

解答看来有点古怪，因为我们想到，仅仅是对于完全无差别的一些事件. 才会用扔硬币来作决策. 肯定人们有时用扔硬币来处理一项争论，但是我们决不会认为这样的决策是理性的，更不会去雇佣一位专家才这样做. 尽管如此，对策论专家的决策不但是理性决策，并且也是在这样的环境下可能有的最好决策.



托斯卡和卡瓦拉多齐发现两败俱伤.

为看到这点，设想玩一种猜钮扣的游戏. 你把一颗钮扣放在手中，让你的对手来猜你的哪一个手中有钮扣. 如果他猜对了，他就赢一元；如果他猜错了，他就输一元. 在一系列这样的游戏中，

什么是你藏钮扣的最好策略？你将一定不会每次都选择同一个手；否则你的对手会很快就发现这点. 你也不能轮流藏在两个手中，否则对手也会发现这点. 可以合理地断定（也可以数学上证明），最高明的高招是无招. 为保证这一点的最好的办法就是放弃你作为决策者的角色，而是让偶然性来代替你决策. 扔硬币作为策略指导在这种情形下并非铤而走险，而是理性方针.

进攻者所得

A \ D	D_1	D_2
A_1	−10	−30
A_2	−5	+15

防守者所得

A \ D	D_1	D_2
A_1	+10	−30
A_2	−5	+15

最小化最大解

A \ D	D_1	D_2
A_1	+10 +10	30 −30
A_2	−5 −5	+15 +15

进攻指挥员（A）和防守指挥员（D）之间的二人零和对策被概述在这三个矩阵中，其中谁也不掌握指导对手决策的信息. 第一个指挥员可选择进攻第一地段（A_1）或第二地段（A_2）. 左面的矩阵指出他对四种可能性所指派的值. 第二个指挥员可选择防守地段. 中间的矩阵指出他指派的值. 正如在每个矩阵的对角线方块中的数所指示，第一个指挥员应该以二比一的偶然性来决策是否进攻第二地段；对于防守指挥员是类似的，只是偶然性变为三比一. 这些结果组合在右面的矩阵中.

在钮扣游戏中，所得恰好是对称的. 这就是为什么决策应该通过扔一枚完美的硬币来做. 如果所得是非对称的，例如当钮扣在右手中时，被猜中的可能性更大，那么这一偏差也应考虑在内. 这将反映在通过一枚有偏差的硬币来作决策. 对策论提供计算偏差的方法来最大化长期期望增益.

进攻者的对策论专家已经算出，如果进攻者让偶然性来决策，那么用二比一的机会进攻第二地段是最好的机会. 这就意味着可通过掷一颗有四面不是一和六的骰子，来决定是否进攻第二地段. 这是进攻者能做的最高明的高招，来对付防守者能做的最高明的高招. 防守者让偶然性决策的最高明的高招是用三比一的机会来防守第二地段. 这里对策论并未对每一特殊情形来提出最好策略，而是对这类情形提出策略的混合. 如果两位指挥员对同样的形势相遇许多次，如果这两个人都按理性决策，这些决策就使他们两人中的每一个都得到他们可能得到的最大收益.

在这一点上人们可以持异议：对实际形势的结局赋以数值，即使不是不可能的，也是十分困难的. 尤其是同样的形势不会再现，因而长期期望增益这个概念是没有意义的. 这类反对意见是

卡斯特公司和珀留克斯公司

C \ P	P_Y	P_N
C_Y	−1	+1
C_N	−3	+2

托斯卡的所得

T \ S	S_K	S_D
T_K	+5	−10
T_D	+10	−5

斯卡尔披亚的所得

T \ S	S_K	S_D
T_K	+5	+10
T_D	−10	−5

零和对策与非零和对策表示在这三个对策论矩阵中. 左面的矩阵是文中讨论的有完全信息的二人零和对策的矩阵. 这里 C 表示卡斯托, P 表示珀留克斯, Y 表示作广告(*Yes*), N 表示不作(*No*)矩阵列出了任何决策的组合对于卡斯托公司的结果(以百万元计); 例如, 如果卡斯特公司和珀留克斯公司都做广告(C_Y 和 P_Y), 卡斯特公司损失一百万. 但对于珀留克斯公司, 由于它将在对卡斯特公司的影响的基础上来决策: 它不研究自己的收支平衡表, 而研究对手的, 这是一笔正所得. 托斯卡和斯卡尔披亚处于非零和对策(也已在文中讨论), 这就是说, 对于一方的增益, 并不意味着另一方的损失. 托斯卡的推理路线可以由中间的矩阵来决定: 如果她遵守与斯卡尔披亚的协议(T_K), 那么当他违背协议(S_D), 她将失去一切; 如果她刺死他(T_D), 那么她的增益最大, 损失最小. 如果他们互相都违背协议, 那么他们将都有损失; 而如果他们都遵守协议, 那么他们将都有增益.

相当有力的. 我们只能说, 对策论迄今为止承担的只是弄清策略冲突中的本质. 不应该用它尚未进行研究的事来苛求于它. 从下面叙述中可以看到, 对策论的更加不合事宜之处将会变得十分明显. 这有点像是一个悖论: 对策论最大的价值正在这些不足之处. 这些缺点清楚地表明了, 策略思考能走多远.

在即将阐述的另一个对策类中, 抉择对双方都是公开的, 但是一方的增益并不意味着另一方的损失, 反之亦然. 我们的"非零和"对策是一个情慾和背叛的故事. 在普契尼 * 的歌剧《托斯卡》中, 总督斯卡尔披亚已经对托斯卡的情人卡瓦拉多齐判处死刑, 但是提出可以把他赦免与交

* 译注: Giacomo Puccini(1858—1924), 意大利作曲家. 他创作的歌剧名著除《托斯卡》外, 还有《蝴蝶夫人》、《图兰朵》等.

换条件是托斯卡必须委身于他. 托斯卡同意了,协议是:斯卡尔披亚将让卡瓦拉多齐将经受一次假处决. 斯卡尔披亚和托斯卡互相欺骗了对方. 托斯卡是在斯卡尔披亚企图拥抱她时刺死了他,而他也没有下达在刑场上放空枪的命令.

问题在于是否双方互相欺骗对彼此都有最大的好处. 我们必须再次对结局赋以数值,并考虑每个结局对于托斯卡,以及对于斯卡尔披亚值多少(见 505 页右上角的两个矩阵).

这些值虽然是任意定的,却合理地代表了形势. 如果谈判结果成立,托斯卡满足于她的情人获救而屈服于嫁给总督. 斯卡尔披亚满足于占有托斯卡而举行婚礼,但应该赦免他痛恨的情敌. 如果托斯卡刺杀了斯卡尔披亚并与她的情人一起逃跑,她将赢得最多(+10),而他将损失最多(−10);反之,斯卡尔披亚杀了托斯卡的情人,又与托斯卡结婚,那么得分就相反. 当双方互相欺骗对方时,则两败俱伤,但损失并不如她或他上当受骗那么大. 例如,垂死的斯卡尔披亚(我们设想)会想到大幕落下前托斯卡扑到她的倒地的情人身上,并发现他已经中弹时,这时他也会感到某种满足.

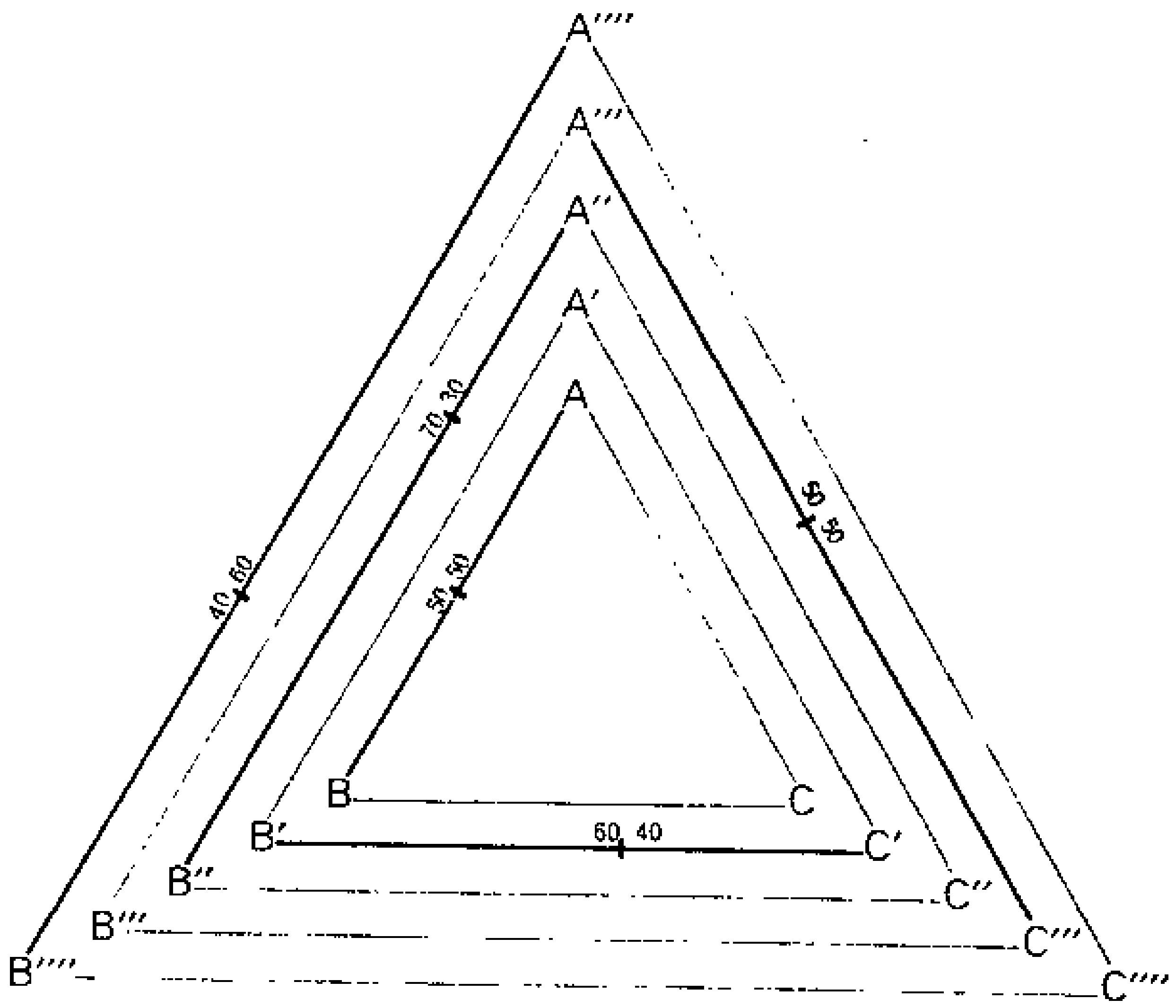
现在让我们从托斯卡的立场来作决策:是遵守协议还是欺骗斯卡尔披亚. 托斯卡对斯卡尔披亚的诚实不抱幻想. 但是她不能肯定他将做什么,因而她想到两种可能性:如果他遵守协议,我最好还是刺死他,因为我这样做,我将得到卡瓦拉多齐而且叫斯卡尔披亚完蛋;如果我不这样做,我虽然将得到斯卡尔披亚但是卡瓦拉多齐还在. 如果他不遵守协议,我更是最好刺死他. 这就是不管发生什么事,我都要欺骗他的理由.

斯卡尔披亚的推理完全是沿着同样的思路:如果她遵守协议,我最好是欺骗她,因为我这样做就摆脱了卡瓦拉多齐;如果我不这样做就得忍受他的存在. 如果她不遵守协议,我更愿意看到我报了仇. 因此,死刑必须执行.

结局是我们所看到的,托斯卡和斯卡尔披亚都得了−5. 如果他们互相信任而且遵守了协议,每人原本会都得到+5.

在这一例子中策略思考的缺陷变得很明显. 显然,如果想在冲突形势下作出最好决策,要除了计算自身的得失,还需要些什么. 对策论还可以通过引入联盟的概念来令人满意地处理上述问题. 如果托斯卡和斯卡尔披亚都意识到,两者都遵守协议对两者都有利,这样,两者都不需要成为牺牲者了. 然而,联盟又会带来它们自身的烦恼,正如在下一个例子中将看到的.

甲、乙、丙三人分钱. 如何分钱的办法将通过少数服从多数的原则来决定. 甲、乙形成联盟,同意把钱在他们两人间平分,而把丙排除在外. 对策的规则允许谈判. 丙就向乙建议,如果乙改变他的投票,把甲排挤在外,他将把钱的百分之六十分给乙. 甲当然不甘心这样的安排,他又向乙建议如果他还是投票把丙排挤在外,他将分给乙百分之七十. 乙刚要庆幸他的高明谈判技巧



在三个人之间分钱就涉及了联盟对策;分法由少数服从多数的原则来决定. 甲和乙(A 和 B)形成排除丙(C)的联盟. 然后,丙(C')建议给乙(B')钱的百分之 60,如此等等. 任何分法都内在地不稳定,因为两人总能做得使他们自己比第三者好,而两人可以推行任何分法. 没有一种对策论策略能够分得让所有人都满意.

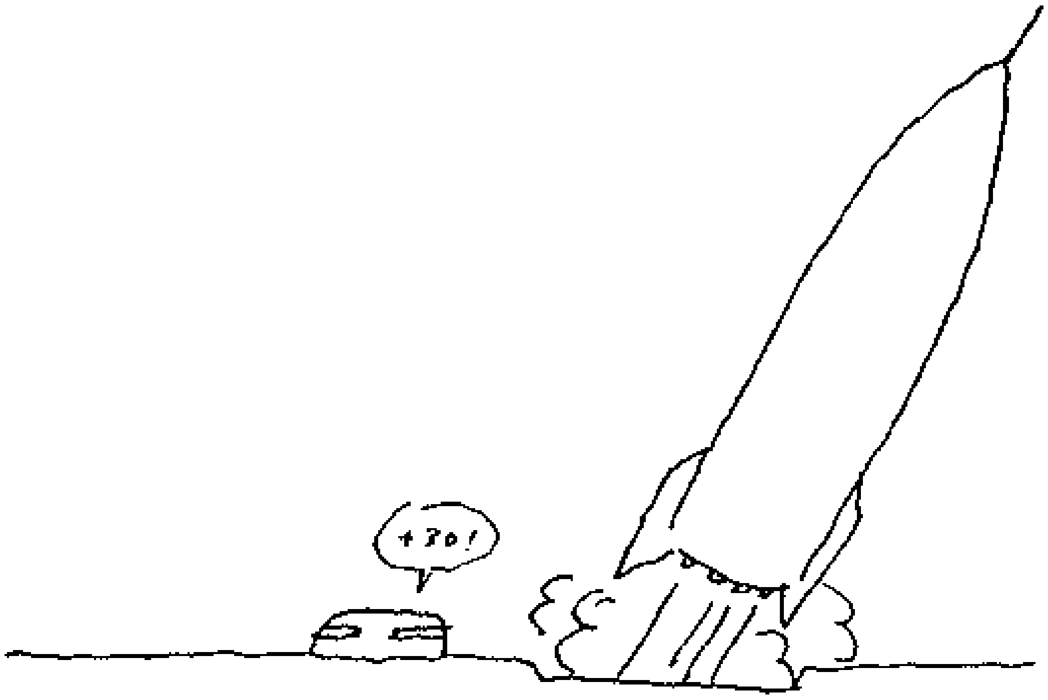
为他带来美好前景,忽然注意到甲和丙正在一个角落嘀嘀咕咕. 乙是个聪明人,马上猜到他们在讨论什么. 他想得不错. 他们在讨论既然他们完全有能力把乙排挤出去,由他们两人来平分秋色. 又何必愚蠢地让一个人得百分之三十,另一个人什么也得不到? 事实上,他们正在这样做. 现在是乙向甲低三下四,请他回到原来的立场上来,他将分给甲百分之六十. 问题在于:甲是否应该接受这一建议?

这种问题的对策论解是极为累赘的,我们不需要在这里多费口舌. 让我们还是来用普通语言概述对策论方法对于人类冲突的价值和局限.

对策论的价值并不在于它对高度简化和理想化的情况所提供的特殊的解;这种解可能在形式化的对策中发生,但是不大可能在现实生活中发生. 尤其是,它的首要价值在于揭露在不同种类的冲突中应该用不同种类的推理.

让我们回到我们的例子,并对它们进行比较. 由卡斯托公司和珀留克斯公司所作的决策—

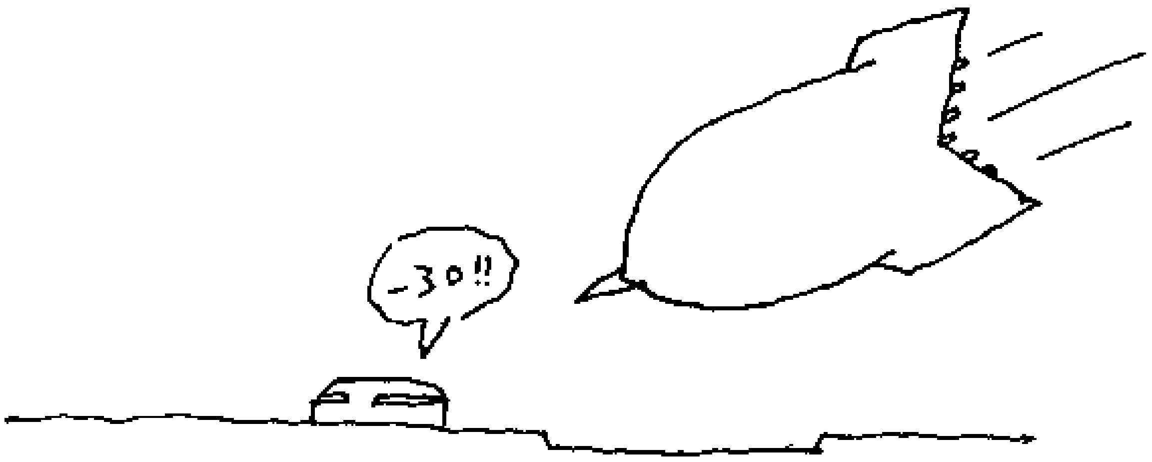
清二楚，他们基于他们掌握的知识作出最好决策. 正如我们已经看到的，两个公司都用最小一最大原理来作指导：在最坏结局中选取最好结局. 当两者都选取最小—最大，则没有一个厂商可以改善它们的处境. 只要两个总经理之一不选取这样的决策*，他将明显处于不利地位. 军事秘密的例子中引进了一个随机因素来迷惑敌人，这样就带来不同种类的推理. 这样的推理对于卡斯托公司和珀留克斯公司的例子是无用的，因为在它们的情形下，它们互相都知道对方应该作的最好决策，而一方是知道这件事对另一方来说全无影响. 这两种形势之间的区别对于对策论专家来说是一目了然的. 在第一种情形下，一个局中人的最小—最大选择也是另一个局中人的最小—最大选择，而在第二种情形下并非如此.



对策论的军事应用中的最小值

考虑托斯卡-斯卡尔披亚对策. 这里双方都有同样的最小—最大选择，而事实上，他们也正是这样选择的. 结局是两败俱伤. 为什么会如此？答案对于对策论专家来说还是明显的. 托斯卡和斯卡尔披亚在进行对策时以为这是一个零和对策，其中一方赢得的必定是另一方损失的. 如果我们考察双方得失，就会发现并非如此. 双方都可以通过把他们的最小—最大解改为联盟解来改进他们的所得(遵守协议，各得+5). 如果冲突中的双方的利益总是可以通过形成和保持真正的联盟来得到，生活将是单纯的. 但是折磨甲、乙、丙的两难又打破了我们的这种希望. 更尤其是，托斯卡-斯卡尔披亚对策和分钱对策揭示，基于算计自我利益的决策会导致灾难.

无论对策论导致一清二楚的解、模糊的解还是无济于事的解，它都达到了一个目的. 在引起利益冲突的问题中引进逻辑和数学技巧，对策论给



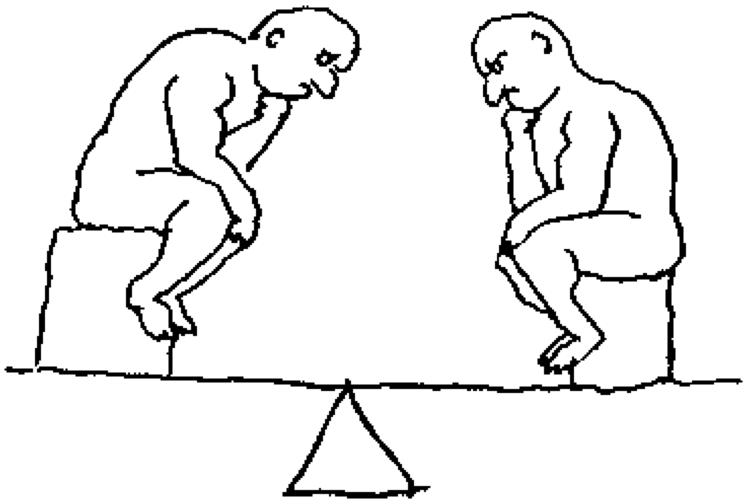
最小值

* 译注：原书误为“选取这样的决策”.

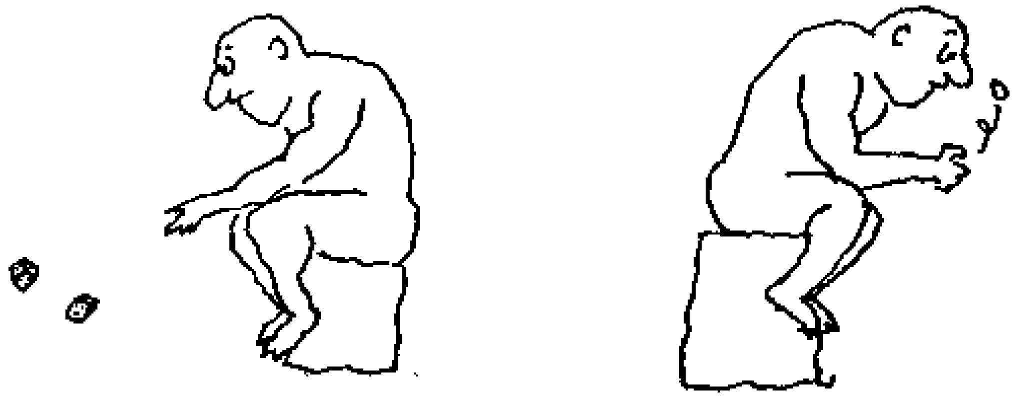
人们一个机会把掌握冲突从斗争的水平提高到对策的水平，其中斗争水平是指智力被激情所蒙蔽，对策水平是指有机会来发挥智力. 这就其自身来说，已经算是不差的成功，但这还不是最重要的. 对策论的最重要的成就，以本人之见，是对策论分析揭示了它自身的局限性. 因为这一负面远没有如其正面那样被人理解，进一步探讨将是有益的.

对策论对于决策和社会科学的重要性可以从科学史的角度来更好地理解. 科学家已经能够避免浪费许多无效的努力，因为科学的真正基础在于对什么是不能做的作出明确的陈述. 例如，热力学指出，永动机是不可能的. 生物学的原理肯定自发生成生命和后天获得的特征遗传都是不可能的；测不准原理对某些同时进行的测量的精度设置了绝对的极限；伟大的数学发现已经揭示求解某些问题的不可能性.

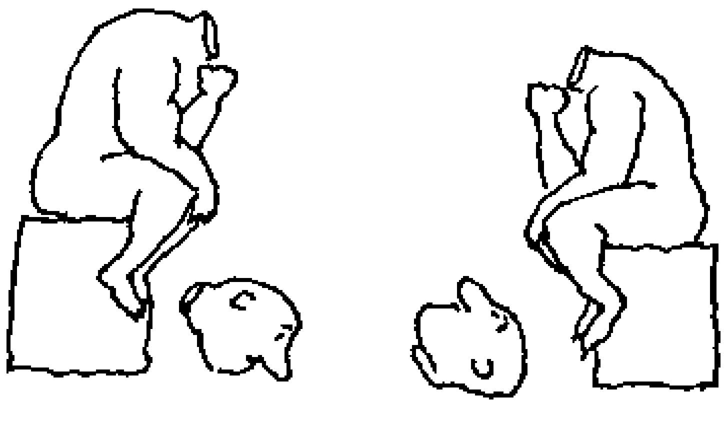
这些不可能性中的绝对，并非是绝对地绝对，而仅仅是在某些特殊的背景条件下的绝对. 科学的进展就是把这些背景一般化. 这样，机械能守恒可以通过把能量的其他形式转换为机械能来绕过. 较简单的守恒律被违背，但是它又在更一般的热力学的框架中重建. 在这一形式下它还可能被违背，但是又在更宽广的 $E=mc^2$ 的框架中重建. 三等分一角可以机械地用比圆规直尺更复杂的工具来完成. 生命大概可以合成，但是并非以腐肉生蛆的方式；后天获得的特征大概也可以由基因遗传，而不再通过肌肉锻炼.



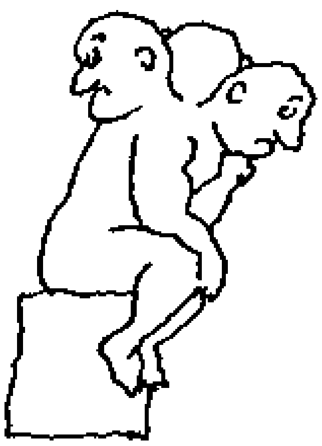
有鞍点的二人零和形势的中策略思考



无鞍点的二人零和形势中的策略思考



二人非零和形势中的策略思考



有联盟的三人常和形势中的策略思考

科学的否定裁决时常伴随着肯定附加条款. 那么,科学赋予的力量就在于知道什么是不能做的,而这又蕴含着什么是能够做的以及需要什么才能做成它.

我们由对策论导出的知识也有同样的性质. 由最简单的对策类型出发,例如从有鞍点的二人零和对策出发,我们从对策论分析懂得,这样的对策结局是事先就定的. 这就导出不可能性裁决:任何人都不可能比最好做得更好. 一旦这些最好已经发现,再去进行这样的对策就不必要了. 如果战争是有鞍点的二人零和对策,那么每次战争的结局都可事先可信地进行计算,而仗就不用打了("之所以需要打仗是因为战争不是有鞍点的二人零和对策"的结论可没保证!).

现在考察无鞍点的二人零和对策,我们就又达到另一个不可能性裁决:在这样的对策中不可能定出最好策略. 然而,定出许多策略的最好的混合还是可能的. 策略混合的意义以及运用它的好处只能在一定的上下文中来理解,即在期望收益的意义下来理解. 这点转而要求我们关于偏好的观念要有一定的明确性. 在一个鞍点对策中选取最好策略只要对于可能的结局按偏好来排队即可. 而为选取最好策略混合则必须对我们的偏好指定一个区间范围,就像指定温度的范围那样. 不作出这一更为精确的偏好定量化,就不能在无鞍点的对策框架中作出理性决策.

我经常想知道,究竟有多少已经"卖身"给对策论的决策者已经懂得这最后一条不可能性裁决,就清楚明确而言,这个裁决并不亚于用经典工具来作一个与圆等面积的正方形的不可能裁决. 关于热战和冷战是如何可以"对策",我已经看到许多研究方案和听到长时间的讨论. 一旦使热战和冷战成为零和对策(它们不是!),结局的"效用"的定值就必须在一个区间上来进行. 问题就在于此. 当然,这个问题可以绕过,效用的定值可以这样那样地来做,使得我们可以尽快运用对策论;这是最为可笑的事. 基于任意假定的结果,难道会有用吗?

这还不是全部. 使人类伤透脑筋的最重要的冲突完全不能归人二人零和对策. 托斯卡-斯卡尔披亚对策和甲、乙、丙对策都是人类冲突的更为现实的模型;这种冲突犹如戏剧,其中个体为利益所驱动而最后又归于痛苦. 在这种对策中,既无纯策略也无混合策略能在对策的约束下保证最大所得的意义下最好. 没有什么论点可个别地说服托斯卡或斯卡尔披亚,使他们相信遵守协议比两败俱伤要好. 只有同时对二人解说才有力量. 只有集体的理性才能帮助他们避免陷人两败俱伤.

与此相类似,我们无法告诉甲、乙、丙怎样行动使自己好处最大. 我们只能告诉他们应该按照某些已存在的社会规范来合作解决事端(例如,他们可以各取百分之 33,剩下一份捐给慈善事业).

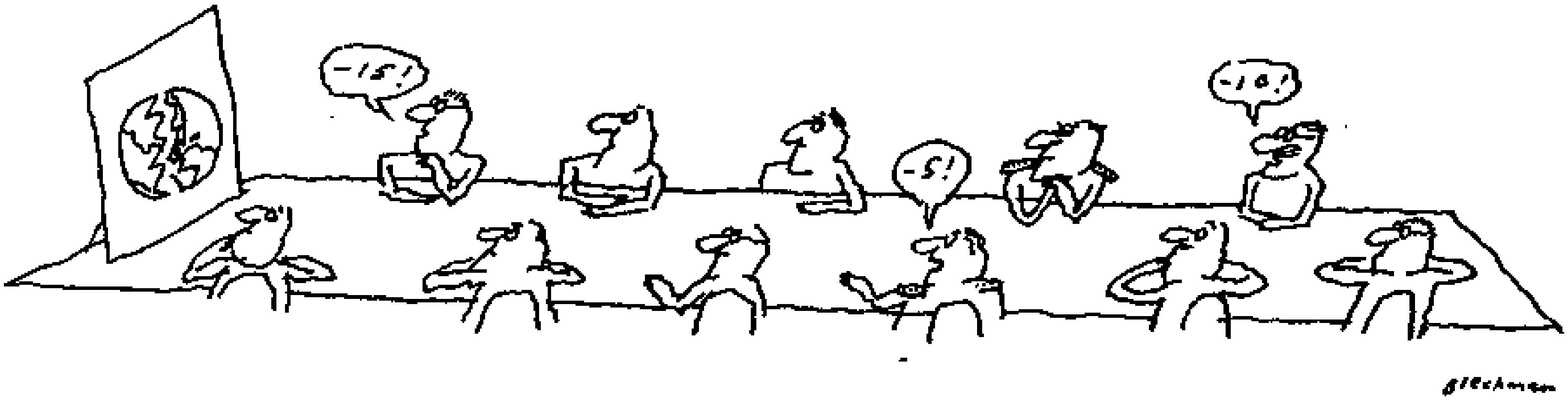
在多于两个局中人的对策中的社会规范的作用并未被冯·诺依曼和摩根斯特恩所忽视. 诚实、社会责任和高尚情操自人类有史以来就已经被哲人们所提出. 然而,对策论向我们给出这些事端的另一侧面. 它指出,以对策论为出发点来对冲突作"精明"分析会如何走向死胡同;两难的

结论是如何不可能避免，除非在其他背景下重新审视形势，以及引进另外的超对策论概念. 这样，了解对策论的这些侧面就能揭露，扑克博弈并非是冲突的最一般的或者最精巧的模型，也不是最有应用的，但是许多职业战略家却暗里是这样想的.

为解决冲突，互相交流是一个前提.

如果我们追随对策论使它有不产生基本的悖论的陈述，它告诉我们，为了能把智慧用于人类冲突的科学，什么是我们必须要做的事. 为科学地分析冲突，我们必须能同意相对价值（为效用定值）. 然后，我们必须学会有洞察力（估计对方的效用定值）. 再进一步是，为了研究这样形式化了的冲突，我们必须能够交流（给对方一个可信赖的指示，我们是如何为结局的效用定值的）. 有时，我们必须懂得信任的意义，否则我们与我们的对手就会不可避免地像托斯卡-斯卡尔披亚类型的对策中那样同遭损害. 有时，我们必须能够说服对方，他应该遵照某些规则行事，或者叫他玩另一种游戏. 为说服对方，我们必须让他倾听我们，面若我们自己不听他的，这通常是不可能做的. 因此，我们必须学会在最广泛的倾听意义下来倾听，就是暂时采取对方对世界的总的看法，因为只有这样，我们才能听懂他在说什么.

所有这些技巧都是智慧而非诀窍. 很可能，如果我们有了必要的智慧，则许多冲突，策略专家以自己专业的热情坚持认为是技巧的战斗（甚至更糟，看成是意志之争），都可以按自己的协议而得到解决.



另一个前提是弄清结局的效用是什么.

40.

通讯的数学

华伦·韦弗尔(Warren Weaver),1949 年 7 月号

人们怎样互通信息？用口语，或直接谈话或用电话、无线电交谈；用手写或印刷的文字，以手、邮政、电报或任意其他方式传递——这些都是通讯的明显的、通常的方式. 但还有其他方式：点点头，眨眨眼，丛林里的鼓声，银屏上的手势，信号灯的闪光，一段音乐使人忆起往事，沙漠空中一缕烟，芭蕾的动作和造型——这些也都是人用来传达思想的手段.

事实上，通讯一词在这里是用于一种非常广泛的意义，包括了一个人的意念可以影响另一个人的一切过程. 虽然这个词时常特指语言的通讯，但实际上所说的一切都同样可用于音乐、图像和许许多多传递信息的方法.

通讯中有三个层次的问题：1)技术层次，2)语义层次，以及 3)影响力层次.

技术层次的问题注意的是信息由发信者传输到收信者的准确性. 这是一切形式的通讯生来就有的问题，不论是用一组离散的符号(如书面语言)，或用连续变化的信号(如用电话或无线电发射来传送声音或音乐)，或用二维图样(如电视)作通讯都有这个问题.

语义层次的问题注意收信者对意义的解释与发信者想传达的意义的比较. 这是一个很深刻而且复杂的情况，甚至在处理相对简单的通过语言的通讯问题中也是这样的. 例如，如果怀疑 X 先生并没有听懂 Y 先生所说的话，那么，Y 先生如果就这样下去与 X 先生再谈下去，则在任意有限长时间里，也不可能把情况完全弄清楚. 如果 Y 先生说："您现在听懂了吗?"而 X 先生回答："确实懂了"，这并不一定证实已达到了理解. 可能恰好是 X 先生连问题也没有听懂. 如果换一种语言问"Cgy pan mnie rogumie?"，也换一种语言回答"Hai, wahkate imasu."，这就有些可笑了. 在语言通讯这个有限的领域内，可以用"解释"来把困难减小到可以容忍的大小，但永不能完全

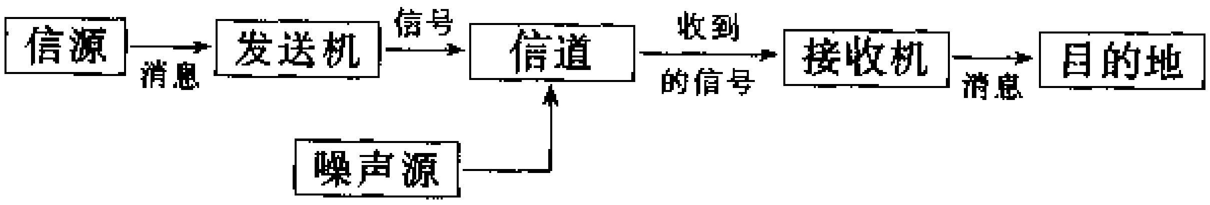
消除."解释"永远只能是对被解释的思想的近似,如果用某种语言来表述这种解释,而这种语言过去已在使用中合理地弄清楚了,这种解释可以使人理解.例如,不用多少时间就可以在任何一种语言中,理解"yes"(英语:是)这个符号的意义.

影响力,也就是有效性层次的问题,注意的是,向收信者传达的意义能否成功地使他的行为如所期望.乍看起来,认为所有通讯的目的就是影响收信人的行为,这似乎过于狭隘.但若对行为合理地较广泛地定义,则很清楚,通讯要不能影响行为,就是没有可辨别可证实的效果.

人们可能会以为技术问题只涉及通讯系统的良好设计的工程细节,而语义与影响力问题包括了通讯的一般问题的几乎全部哲学内容.为了说明情况并不如此,我们现在必须考查通讯的数学理论中近来的一些重要工作.

通讯的数学理论并非全新的理论.数学家冯·诺依曼(John von Neumann)就指出过,奥地利物理学家波尔茨曼(Ludwig Boltzmann)就提出过,统计力学的某些概念可用于信息的概念.另一些科学家,突出的如麻省理工学院的维纳(Norbert Wiener),作出了深刻的贡献.下面要报告的工作属于贝尔电话实验室的香农(Claude Shannon),其前驱是同一机构中奈奎斯特(H. Nyquist)和哈特利(R. V. L. Hartley)的工作.这个工作初看起来只适用于工程问题,但其实意义更为广泛.首先,语义和影响力不可避免地受限于符号传输的准确性的理论极限.更值得注意的是,技术问题的理论分析表明,它与语义和有效性问题互相重迭的程度超过人们的预想.

信息系统可以用符号图示如下图.信源从一组可能的消息中选出一个(以后会看到,这是一个特别重要的功能).发送机把这个信件变成一个信号并沿一个信道传送给接收机.



通讯系统可以化为这些基本成分.在电话中,信号是变动的电流,信道则是导线.在语言中,信号则是变动的声压,信道则是空气.信源有时会把并不需要的东西掺到信号中来.无线电的静电干扰是一例子;电话声音的失真又是一个例子.所有这些掺进来的都可以叫做噪声.

接收机是某种逆发送机,它把传来的信号又变回为一个消息,并将此消息送到目的地.当我与您谈话时,我的脑就是信源,您的脑则是目的地;我的发音系统是发送机,您的耳和第八神经则是接收机.

在传输信号过程中,很不幸,其特征就是信源所不想发送的东西会加到信号中去.这种不想要的加进去的东西可以是声音的失真(例如在电话中),静电干扰(无线电),图像形状和扭曲变形(电视),或传送中的错误(电报或传真).所有这种信号的变化都称为噪声.

在研究通讯系统时，要研究信息量，通讯信道的容量，把消息变成信号时所用的编码过程以及噪声的效应.

首先要弄清楚"信息"这个词在这个理论中的奇怪用法；它有特殊的含意而绝不要与"意义"混淆起来. 令人吃惊但是确实是真的，从现在的观点看来，两个消息，一个有丰富内容，另一个纯属胡说，就信息而言可能是等价的.

事实上，在这个新理论中，信息一词与其说是讲的你确实说了什么，不如说是讲的你可能说些什么. 就是说，信息就是你选择一个消息的自由程度的一种量度. 一种很基本的情况是，必须由两个消息择一，如果是这样，那就规定说这种情况下的信息为 1. 信息的概念并不是用于个别的消息，"意义"的概念才是；信息这个概念说的是某一种情况的整体，单位信息就是指在此情况下有一定程度的选择自由，即选择一个消息的自由，而把上述情况规定为标准的或单位的信息量. 在这个情况下必须从其中择一的两个消息可以是随便什么东西. 例如一个可以是詹姆士王朝版本的圣经，另一个则是"yes".

迄今为止我们所讲的都只是人为的简单情况，即信源只能从几个确定的消息中择一，好像一个人只能从几种标准的祝贺生日礼仪电报中选取一种一样. 更自然也更重要的情况是信源可以从一组基本的符号中作一系列选择，这样选出来的系列就构成一个消息.

在消息的生成中概率显然起了主要作用，而后继符号的选择又依赖于以前的选择. 如果我们讨论英语的语言，而上一个选择是冠词"the"，则下一个字仍然是冠词或者是动名词形动词以外的动词形式，这概率是很小的. 紧接着"in the event"后，下一个词是"that"的概率是相当高的，而是"elephant"的概率就很低了. 类似地，出现"Constantinople fishing nasty pink"这样一串词的概率是很低的. 顺便提一下，概率虽低却不是零，因为完全可能想出一段话，上一句以"Constantiople fishing"结尾，下一句以"Nasty pink"开头.（我们顺便还可看到，所讨论的这一串字确实出现在一个很好的句子里，即上面"类似地，……很低的"这一句话.

事实上，香农曾经证明了，如果把随机选出的字母或词仅按概率的考虑排成一列，则它们更倾向于成为有意义的词或句(见 518 页的图).

现在回到信息的概念. 对信息的度量应该有自然的要求，面符合这些要求的量只有一个，恰好就是热力学中称为熵的量，它是随机性的程度. 在玩牌的时候. 你如果高兴，也可以说熵就是把牌"洗匀"了的程度. 它可以用所涉及的种种概率来表述.

对于学过物理的人，一个如熵一样的表达式会出现在通讯理论中作为信息的度量是最值得注意的. 熵的概念是德国物理学家克劳修斯(Rudolf Clauslus)100 多年前引入的，与波尔茨曼有密切关系，耶鲁大学的吉布斯(Willard Gibbs)在他关于统计力学的经典著作中大大加深了它的

意义. 熵是如此基本而无处不在的概念,所以爱丁顿(Sir Arthur Eddington)说:"熵增定律,即热力学第二定律,我认为在大自然的诸定律中,有至高无上的地位."

所以人们在通讯理论中遇到了熵,本应十分激动. 只要记住信息就是我们构成消息时进行选择的自由度,则信息应以熵为度量毕竟是自然的. 所以谈到信源时可以和讲到热力学系统时一样,说它是"高度组织化的",说它"没有很大的随机性或可选择性——即是说,信息或熵很低".

我们必须记住,在通讯的数学理论中我们关心的并不是个别消息的意义,而是信源的统计本性. 所以我们不应该奇怪,通讯信道的容量是以它能传送的信息量来描述的,说得更清楚些,是以它传送某一已知信源生成的东西的能力来描述的.

发送机可取一书面消息,并用某种代码把此消息译编为一串数字,再把这些数字作为信号从信道上传出去. 所以我们一般地说发送机把一个信件编码,接受机则译码. 通讯理论则对很精巧的发送机或接收机都提供例如"存储"之类的东西,这样,它对信件中某一符号的编码的方法不仅依赖于这个符号本身,而且还依赖于这消息前面的符号及其编码方式.

现在我们可以来陈述无噪声通道传送离散符号的基本定理了. 这个定理讲的是一个能力为每秒 C 个单位的通讯信道,从一个能力为每秒 H 个单位的信号源接收信号得到信息. 这定理说,若发送机有适当的编码程序,则它可以用每秒接近 C/H 的速率传输信号,但不论代码多么灵巧,速率也不可能超过 C/H.

肤浅地看,例如把它与变压器与电路阻抗的匹配作粗略的类比. 会认为这个类比是很自然的,虽然肯定也是很漂亮的,即认为这定理讲的是信源与信道的统计特征的匹配问题. 但是如果对于此定理可以适用的众多情况之一作详尽的考查,就会认识到这个理论是多么深刻而有力.

噪声怎样影响信息呢? 我们始终要记住,信息就是选择消息的自由的度量. 选择的自由度越大,选中某一特定消息的不定度也越大. 所以,更大的选择自由度,更大的不定度以及更大的信息,三者总是结伴而行的.

若有了噪声,则收到的消息中就会包含一些畸变,一些错误,一些题外的东西,这肯定会增加不定度. 但若不定度增加了,则信息也会增加,听起来似乎噪声还是有益的!

确实当有噪声存在时,接受到的信号是从一个变化较大的信号集中选取的,此集中的信号有一些是发信人原来不打算发出的. 注意,这里的"信息"一词是在很特殊的意义下使用的,即是选择的自由程度的度量,因而究竟如何选择是有不定度的,不记住这一点就会落入语义的陷阱. 这里的情况就是一个漂亮的例子. 由于发信人选择的自由性而产生的不定度,其实是一种值得欢迎的不定度. 由于错误或噪声而产生的不定度则是不值得欢迎的不定度. 要从收到的信号中

得到有用的信息，就要除去其中虚假的部分.这一点在理论上是可以做到的，方法是建立一个称为“暧昧性”(equivocation)的量，即指由噪声引起的疑义的程度.然后则把前面关于无噪声信道的定义细化、推广，从而定义有噪声道的容量为：有用信息(即全部不定度减去噪声不定度)在此信道上传输的最大速率.

现在我们可以最终提出整个通讯理论的伟大的中心定理了.设容量为 C 的有噪声信道从一个熵为 H 的信源中得到信息，熵相当于源中可能的消息的数目.若信道容量 C 等于或大于 H，则只要有适当的代码系统，从这个信源输出的信息都可以由此通道传输，其误差可以任意小.但若信道容量 C 小于信源的熵 H，则不可能找到一种代码使出现错误的频度小到如人所需.

不论编码过程多么巧妙，在收到信号后对于消息究竟是什么总会有一些不受欢迎的不定度；这个不受欢迎的不定度——即噪声或暧昧性——总大于或等于 H－C.但一定有至少一种编码方法会把这种不受欢迎的不定度减少到与 H－C 只差一个很小的量.

这个有力的定理描述了通讯信道在有噪声情况下运行所产生的可靠性的极限，其简单明了几乎令人吃惊.必须要思索一个长时间，考虑它的许多应用，才能充分认识到这个惊人简短的定理是多么有力和广泛.这里可以举一个例子.但为此，我们还暂时要回到源中的信息的概念.

在算出了某个信源的熵(或信息，或选择的自由度)以后，在信源仍使用原来符号这一条件下，把它与这个熵可能有的最大值来比较，现在的熵与最大熵之比称为信源的相对熵.若某个信源的相对熵例如是 8/10，这大体上就意味着，这个信源在选择符号构成消息时，其自由度是应用这些符号所可能有的自由度的 80%.1 减去相对熵称为“冗余”，即是说如果这一部分被丢失了，仍然是基本完全的，或者说可以补完全.在这个意义上，冗余就是信件中不必要的部分.

最有意思的是，英语的冗余大约为 50%.换言之，如果我们用英语说话或写作，则我们所选用的字母和词只有一半是我们自由选的，另外一半其实是受这个语言的统计结构所控制的，虽然我们平时并未意识到这一点.顺便说一下这是为了作出满意的字谜游戏所必需的最小自由度(或相对熵).如果有一种语言只有 20%的自由度，而 80%是冗余，就不可能作出比较复杂的字谜游戏，即令能作出来，其数目也很少.这样它就不可能是相当流行的游戏.

既然英语有 50%的冗余，所以通常的电报只要编码适当，就可以节省一半时间，只要是在无噪声信道上传输.然而，若信道上有噪声，不使用能够消除所有冗余的编码过程却会有实在的好处.因为留下一些冗余有助于对抗噪声.例如说，正是因为英语有很高的冗余，在传输送过程中产生的拼写错误就容易纠正了.

迄今我们讨论的通讯系统都使用一个不算太大的符号的离散集——例如字母之集.人们很可能以为，如果想要处理连续的消息如语音，它的声调与能量是连续变化的，就会变得无限的复

杂. 但是时常是这样的：会有一个非常有趣的数学定理出来解困. 事实上，人们总是关心一个由这样的谐振成分合成的连续信号，这些成分的频率并非任意的，而完全落入一个由每秒 0 周到 W 周的频道. 例如若一个电话信道能处理高到 4 000 周的频率，就能得到满意的通讯了，虽然人声含有更高的频率. 若频率能高到 10 000 周或 12 000 周，就能对交响音乐作高保真的无线电传输了.

有一个能帮助我们的定理说：一个长为 T 秒而频宽为由 0 到 W 周的连续信号，必可用 2TW 个数来表示. 这确实是一个了不起的定理. 一条连续曲线通常只能用有限多个点来近似表示. 但若一条曲线是由有限多个频率的谐振成分合成，例如一个复杂的声音只由有限多个单频声调合成，则只需有限多个数就足以完全决定这曲线了.

部分地由于有这个定理，部分地也是由于连续信号的本性，推广的连续通讯理论虽然在数学上难一些，复杂一些，却与离散符号的理论没有根本的不同. 许多关于离散情况的命题不需改变即可用于连续情况，有些则只需不多的修改.

通讯的数学理论是如此一般，所以不需要说是考虑的哪一类符号——书面的字母或词，音乐的音符，人说的话，交响音乐，图像均可. 它所揭示的关系适用于所有这些和其他的通讯形式. 这个理论的引出是如此富于想像力，它处理的确是通讯问题的内核.

它的一般性有一例证. 它对密码(这当然也是一种代码)学的基本理论有重要贡献，与此相类，它也对一种语言到另一语言的翻译问题有贡献. 虽然，整个理论在此除要考虑信息问题外还要考虑意义问题. 类似地，在这个工作中发展起来的思想与计算机的逻辑设计密切相关，所以，毫不足怪，香农曾写过一篇论文讨论如何设计一种能下很技巧性的棋的计算机. 此文结尾处提到，要末承认这个计算机会“想”，要末就得本质地修改“想”这个动词的含意，这一点当前还有争论. 通讯理论与这个争论有进一步的关系.

这个理论还走得更远. 它虽然表面上只能用于技术层次的问题，但对于语义层次和影响力层次的问题也是有帮助有启发的 513 页上关于通讯系统的形式图示，可以完全相像地推广，使得关于意义和影响力的中心问题也包含在内.

这样，当进到那些层次时，考虑那些层次问题的统计特性可能是很基本的. 可以设想，可以在该图的工程的接收机(它把收到的信号又变回为消息)与目的地这两框之间再加上一框. “语义接收机”. 它对来自工程接收机的消息进行第二次译码，其要求是使消息的统计的语义特性与接收者全体，至少是对构成听众的那一部分的接收机的统计的语义特性相匹配，听众就是想要对之施加影响的接收机.

类似地，还可设想在此图示的信源和发送机两框之间加上另一框“语义噪声”(不要与工程

1. 零阶近似

XFOML RXKHRJFFJUJ ŽLPWCFWKCYJ FFJEYVKCQSGXYD QPAAMKBZAACIBZLHJQD

2. 一阶近似

OCRO HLI RGWR NMIELWIS EU LL NBNESEBYA TH EEI ALHENHTTPA OOBTTVA NAH BRL

3. 二阶近似

ON IE ANTSOUTINYS ARE T INCTORE ST BE S DEAMY ACHIN D ILONASIVE TUCOOWE AT TEASONARE FUSO TIZIN ANDY TOBE SEACE CTISBE

4. 三阶近似

IN NO IST LAT WHEY CRATICT FROURE BIRS GROCID PONDENOME OF DEMONSTURES OF THE REPTAGIN IS REGOACTIONA OF CRE

5. 词的一阶近似

REPRESENTING AND SPEEDILY IS AN GOOD APT OR COME CAN DIFFERENT NATURAL HERE HE THE A IN CAME THE TO OF TO EXPERT GRAY COME TO FURNISHES THE LINE MESSAGE HAD BE THESE.

6. 词的二阶近似

THE HEAD AND IN FRONTAL ATTACK ON AN ENGLISH WRITER THAT THE CHARACTER OF THIS POINT IS THEREFORE ANOTHER METHOD FOR THE LETTERS THAT THE TIME OF WHO EVER TOLD THE PROBLEM FOR AN UNEXPECTED

人工语言就是由字母或词统计地排起来而成的. 1. 是从 26 个字母和空白随机选取而得的. 2. 按字母在英语中出现的频度来选取. 3. 字母按其跟随另一个字母出现的频度来选取. 4. 字母按其跟随其他两个字母的频度来选取. 其另外两个例子是对词按照对字母的办法选取出来的.

噪声相混淆). 它代表由信源(例如说话的人)引入的意义的失真,它虽非有意的,却会影响目的地即听讲话的人. 而语义译码问题必须把这种语义噪声也考虑进去. 也可以设想对原来的消息作一些处理和调整,使得消息的意义加上语义噪声之和就是希望在目的地得到的总的语义意义.

通讯理论有助于改善通讯的另一种方式可以由下面的事实得到启发. 即若想在信道上挤进过多的东西,必造成错误与混淆的增加和保真度的下降. 一个涉及各层次的一般理论必须不仅考虑信道容量,而且考虑听众的容量,尽管传输的词都是正确的. 如果听众容量负担太重,由直接类比可以看到,恐怕浪费了的不止是听众听不进去的多余部分. 同样,由直接的类比可以看到,你会造成普遍的错误和混淆.

这个理论中发展起来的信息概念. 初看起来,既令人失望,又感到奇怪——令人失望是因为它与意义毫不相干,奇怪是因为它并不处理单个消息,而是讨论整个一族消息的统计特性,奇怪还因为,使用了这种统计的说法后,信息这个词总是与不定度这个词结下不解之缘.

但是在进一步考查了这个理论以后我们也看到了,这个理论的分析如此透彻地澄清了疑问,可能直到现在,人们才为关于意义的真正的理论作好了准备. 一个通讯理论工程师就好像电报局里一个合适而谨慎为你接收电报的女电报员一样. 她并不过问电报的内容是喜是忧或者令你尴尬. 但是她必须准备好聪明地处理所有送到她的桌上来的消息. 一个通讯系统应该要能处理一切可能的消息. 要做到这一点,聪明的办法就是把它的设计放在信源的统计特性的基础上,这一个想法对于一般的通讯肯定不是没有意义的. 设计或发展一种语言时必须考虑到人们想用它来说的一切事情的全体,但既然不可能每一件事都能用它说得很好,就应该在尽可能多的场合尽可能好地做到这一点. 就是说,它应该统计地对待自己的任务.

这个研究举例来说,揭示了英语这个语言的统计结构的许多事实,而它们对研究语言和通讯的各个阶段的人必然都是有意义的. 它启示人们,应用概率论于语义学的研究是特别有前途的. 特别是概率论中研究数学家称之为马尔柯夫(Markov)过程的强有力的理论与此有关,在这类过程中过去的事件影响现在的概率,它之所以特别有关是因为这个理论特别适于处理意义的一个最值得注意而又最困难的侧面,即上下文的影响. 人们有一个模糊的感觉,信息和意义二者会像是量子力学中一对典则共轭变量,即必须服从一种联合的限制,若坚持一方面有得,必然另一方面有失.

也或许意义就好像热力学中的熵所依赖的那种量. 这里,爱丁顿又有另一个聪明的评论.

“设若要求我们把以下各项分成两类——距离,质量,电力,熵,美,旋律.

“我想,有最强有力的依据,把熵和美及旋律放在一起,而不与前三项放在一起. 只有当把各

个部分联系起来看时才能找到熵，而且只有把各个部分联系起来才能看出美，听出旋律.这三者都是有关排列的特性.这三种联结中应该有一种成为科学的最平常的量，这是一个孕育着重大成果的思想.为什么这种陌生的联结会在物理世界的土著人中发生，是因为它能说它们的语言，即算术的语言”.

我们感到肯定爱丁顿也会把意义这个词放在美和旋律一起；我们也不怀疑，他会激动地看见，在他的理论中，熵不但会说算术的语言，还会说语言的语言.

41.

线性规划

库柏，查恩斯(William W. Cooper and Abraham Charnes)1954 年 8 月号

假想你在几个工厂中制造一种产品，并且要把它运到国内不同地方的市场去.你会怎样计算装运的模式，使得从不同的仓库发货到各个市场而运费是最低的?

你可以根据常识和试试改改的方法制定一个合理的方案.但是甚至一个非数学家也能看出，要从无穷多个可能的答案中找到最佳的解答，是一个困难得多的问题.

我们将在本文中讲一个新近在应用数学中发展起来的技巧，能用比较简单的计算在比较短的时间里解决这种问题.线性规划理论是由冯·诺依曼(John von Neumann)，但泽(G. B. Dantzig)，库普曼(T. C. Koopman)和另外几个数学家、统计学家和经济学家发展起来的.首先把它作为运作工具来用的是伍德(Marshall Wood)和他在空军 SCOOP(Scientific Computation of Optimum Program，"最佳程序的科学计算"之缩写)计划中的成员.它的应用之一就是柏林空运.由于这个空军小组和其他一些人在线性规划方面的工作和一些相关领域的发展，例如对策论，统计决策理论和输入—输出分析，在企业管理和后勤方面一些过去认为不能作真正的科学分析的问题，现在可以作这样的分析了.本文仅限于线性规划并用一个例子来说明它的原理.

线性规划这个名称的来由是这样一件事:它所处理的典型问题在数学上是用线性方程来表述的.(其实，把这种技术限为"线性"是太窄了，它也能用于许多非线性问题).本质上，它是一种同时考虑许多变量并求得一个问题在一些限制下的最佳解的方法.任何一位制造家都马上就会看到，这正是他的问题的确切的叙述.他在决定究竟要制造哪一些项目，各造多少时，必须要考虑许多因素的综合体:他的机器的能力，各项目的成本和可销售性等等.使得情况更糟的是，他的问题的每一个部分又各有其复杂性;例如，制造某一项目可能有好几个流程供选择.所有的因

素和决策又都互相交织，互相影响，使人难以事前想得周全. 在许多情况下，管理层能够做到的最好也只是一个合理可行的妥协. 然而，有了线性规划以后，就可以在各种可能的解中确定地找到最优解. 不论是就总体决策或部门的细节范围内都是这样.

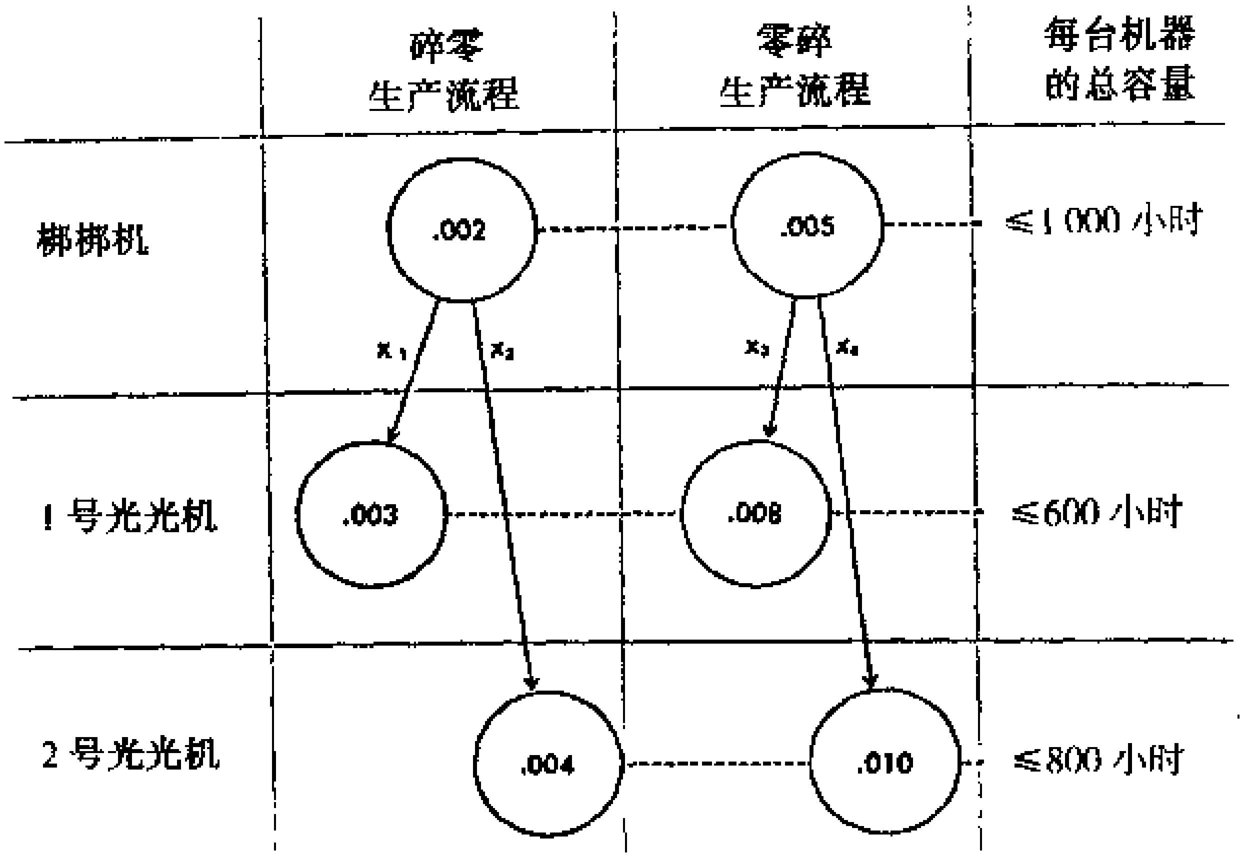
为了说明这个方法，我们举一个高度简化假想的情况. 有一个工厂生产两种产品，为简单计，不妨称之为“零碎”和“碎零”. 这个工厂有三台机器——一台“梆梆机”，两台“光光机”. 同样的机器都既能生产“零碎”，又能生产“碎零”. 每个产品都要先用梆梆机粗加工，再用光光机磨光. 制造每种产品都有两种工艺可行：即用梆梆机和 1 号光光机，或者用梆梆机或 2 号光光机，做零碎和碎零都这样. 我们把生产碎零的这两个流程编号为Ⅰ和Ⅱ，把生产零碎的两个流程则编号为Ⅲ与Ⅳ. 关键的变量是需要的时间. 用流程Ⅰ生产碎零件工时，梆梆机时为 0.002 小时，光光机 1 机时为 0.003 小时；用流程Ⅱ，则梆梆机时为 0.002 小时，光光机 2 为 0.004 小时. 生产零碎则用流程Ⅲ为 0.005 小时用梆梆机，0.008 小时用 1 号光光机，流程Ⅳ则为 0.005 小时的梆梆机以及 0.010 小时的 2 号光光机. 最后我们还知道，在我们所考虑的时期(设为 6 个月)中，梆梆机上可用的总机时为 1 000 小时，1 号光光机 600 小时，2 号光光机 800 小时.

这些信息都概括在 523 页的上图上. 生产指挥者可以把它称为流程图；我们则认为它是规定了条件即约束的模型，它控制我们必须做的每个生产决策. 现在很清楚，我们可以把这些事实译为代数模型. 设用 x_1 表示用流程Ⅰ生产的碎零的未知个数，x_2 表示用流程Ⅱ生产的碎零数，x_3 和 x_4 则是用Ⅲ和Ⅳ生产的零碎个数，我们可以把所有的信息列为一个代数表(下页中图). 在表示机器可用的总机时前的符号≤就是表示“不大于”的大家熟知的符号. 这个表所表示的只不过就是，我们所能做的碎零与/或零碎的总数不能超过各台机器总机时所能许可. 但是把条件这样表示了以后，我们就能同时考虑这些变量，并算出满足约束的解来. 一个解就称为一个线性规划；线性讲的就是：在每个机器上所耗用的可用总机时与在其上经过的工件数成比例.

重要的是要注意到，未知数 x_1, x_2, x_3, x_4 都可以是零，但没有一个能是负数. 当然，我们显然不能生产出负数个产品. 但在数学上，排除负数值却必须小心地注意到. 事实上，线性规划理论成功地发展，要求广泛地研究这个限制对解方程和分析方程的传统方法有何影响.

约束明白了以后，我们就能进而找出在这些限制下所能达到的最佳生产计划. 什么是“最佳”当然要视我们选用何种判据. 我们可以想找一个生产最多产品的计划，或者找一个使用总机时最充分的计划. 但通常是以可能的最大利润为目标. 设用Ⅰ生产每个碎零利润为 85 分，用Ⅱ为 70 分，用Ⅲ生产每个零碎为$ 1.60，用Ⅳ为$ 1.30. 我们于是可得方程：总利润 $= .85x_1 + .70x_2 + 1.60x_3 + 1.30x_4$.

用这些信息就可以算出每个产品应该用各流程来生产的个数，才能在机器容量许可之下获



图示模型画出了用这三台机器：一台梆梆机，两台光光机，生产"零碎"和"碎零"时所受的限制. 小圆中的数字表示各台机器在每种产品上完成任务所需的小时数.

梆梆机	$.002x_1 + .002x_2 + .005x_3 + .005x_4$	≤1 000 小时
1 号光光机	$.003x_1 + .008x_3$	≤600 小时
2 号光光机	$.004x_2 + .010x_4$	≤800 小时

同样这些条件的代数模型，x_1，x_2，x_3，x_4 是用上图箭头所示流程生产的各个产品的数目. 各行中的空白都可以不管，它们表示在该情况下耗时为 0.

梆梆机	$.002x_1 + .002x_2 + .002x'_1 + .005x_3 + .005x_4 + .005x'_3$	≤1 000 小时
1 号光光机	$.003x_1 + .008x_3$	≤600 小时
2 号光光机	$.004x_2 + .010x_4$	≤800 小时
1 号光光机（加班）	$.003x'_1 + .008x'_3$	≤200 小时
合同	$x_1 + x_2 + x'_1$	≥450 000 件碎零

完全的模型基于有一台机器有额外的生产能力. 这就是 1 号光光机加班. 现在要引进两个新的流程 x'_1 和 x'_3. 450 000 件碎零前的符号表示至少要生产这么多碎零.

得最大利润(要注意,虽然每个零碎利润较高,却不应该在各机器上都优先生产它,因为生产碎零花时间较少).

问题如上表述却过于简单,不能代表真实情况. 要想更接近真实问题,至少要引入销售因素. 所以,设工厂已得到 450 000 件碎零的订单. 做一点简单的算术就知道,现有的机器的能力在时限之内生产不出来. 梆梆机有足以生产 500 000 件碎零的能力(1 000 小时除以每件碎零的 0.002 小时). 但两台光光机合起来最多也只能生产 400 000 件. 我们必须要有更多的光光机生产能力. 这只有批准一个光光机或两个一起加班. 我们安排在较快的光光机(生产一个碎零需时 0.003 小时)加班 200 小时. 因为加班工资较高,所以加班时生产的碎零利润将从 85 分降到 60 分,而如果利用加班的能力生产零碎,单件利润将从$ 1.60 下降到$ 1.40.

控制这个扩大的问题的约束已经用代数式表示于上页的下图(新符号 x_1' 和 x_3' 分别表示 1 号光光机在加班时生产的碎零和零碎数目). 已知单件利润数字,我们就可以计算使用机器利润最大的方式.

答案可以用好几个方法来计算. 最一般的方法称为单纯形法,是由但泽制定的. 本文作者对这里考虑的这一类问题发展了某些更有效的特殊方法. 这些方程组虽然因为太长太复杂不能在这里仔细讲,却只需简单的算术运算,可以由会计人员或买得到的计算机来执行. 单纯形法开始是设所用的机时为 0,并按一系列特定步骤来计算,每一步都更接近最终解答.

这一情况下的答案是,不应生产零碎而应生产 466 667 个碎零,其中 200 000 个在 1 号光光机的正常时间生产,另外 200 000 个在 2 号光光机正常时间生产,余下的 66 667 个用 1 号光光机加班生产. 总利润是$ 350 000. 我们的计算系统告诉我们,不可能制订出一个生产计划使在我们的限制下获得更大利润.

可能有其他程序会提供同样多的利润(但不可能更多). 如有这样的程序,分析家会立刻找出它们. 他也能制订出第二好、第三好程序等等. 所以这个方法不仅有力,也很灵活;它为管理人员提供了基于不同考虑的选择余地. 此外,线性规划方法可以推广来分析,当限制条件有了变化——如效率的提高,成本的升降,能力的增加会有什么效果. 这些方法使用一种"对偶定理",把一个求最大值的问题(例如在我们考虑的情况中即求利润最化)看成一个相关的最小值问题之逆. 在我们的情况下就是关于机器能力的价值. 用同样一组事实和计算,可以准确地表明用 1 号光光机加班而不用 2 号光光机,能多获多少利润. 若 1 号光光机加班时间增到 300 小时而非 200 小时,则最大利润将是$ 370 000 而非$ 350 000. 但加班时间从 300 小时再增到 301 小时是无益的,因为在这一点上光光机的产出超过了梆梆机的加工能力.

总之,线性规划不仅可用来在已给限制下求出最佳程序,而且可以估计,改变限制本身的合

理性.

本文概述的假想的问题是简化了的,以便说明这个方法的基本要素.在实际生活的问题中,起作用的因素更多而且更难确定.确定真正有关的因素和建立处理它们的正确数学模型是同样的重要.线性规划的应用充满了陷阱.要估计一个问题的种种特点并决定哪一些应包括在数学模型中,就需要数学分析家和实际从事这一工作的运筹人员互相理解的合作.

可以应用线性规划的问题范围很广.我们已经说过,空军曾把它用于后勤问题.在工业中不但用于生产问题,而且还有诸如管理人员的工资模式怎样才最有效这样的问题——这个模式不但要能应付外界竞争挖走人才,还要避免公司内部的不安定.

线性规划通过对偶定理与对策论相联系;这样它就能既考虑已知的限制,又考虑概率.它也与统计决策理论有基本的,虽然是间接的联系,已故的瓦尔德(Abraham Wald)在不久前死于空难之前把它与对策论联系起来了.这三个分支的进展互相有贡献.事实上,作者自己对线性规划的主要兴趣就是要加以推广以便扩大这一技巧的范围.

我们十分满意地看到,对一个特殊问题的研究经常会导致更广泛的,有时甚至是在想不到的领域中的更广泛的应用.例如我们所作的改变线性规划以用于管理人员的工资模式的研究,就打开了研究统计回归和相关分析的新途径.类似地,研究经济计量和管理科学的一些问题,却在工程和物理的完全无关的领域,如塑性和弹性,铺平了新的途径.

在这种科学分析的新工具继续发展中,我们可以期望它们会有许多新应用.但是最重要的可能是科学和技术在数学中造成的伟大的继续进展的革命.数学家兼作家贝尔(Eric Temple Bell)在他写的《数学的发展》一书中说:

"当科学……变得越来越精确时,它们就要求越来越高的数学创造性,而整个数学在1637年*以来的伟大的扩大,大部分也归功于这种要求.再有,从18世纪晚期到19世纪早期的工业革命以后,工业与发明变得越来越科学时,它们也刺激了数学的创造.……数学创造力的时间曲线,越来越快地(向上伸展).

* 译注:此处疑指牛顿《自然哲学之数学原理》发表之年.但应为1687年.

42.

运筹学

莱文森，布朗（Horace C. Levinson and Arthur A. Brown），1951 年 3 月号

第二次世界大战中发展了科学的一种新的军事应用，称为运筹学（美国称为 operations research，英国称为 operational research）. 与以往科学在战争中的应用不同，过去几乎完全用于发展武器，运筹学则注意运用武器. 它的领地是军事行动的战术和战略方面；例如，它研究如何侦查潜艇的位置，而不是研究鱼雷和炸弹. 它做的事就是用科学方法，包括数学技术去分析情况，以及分析应付这些情况的各种组织的系统的效率.

显然，这个方法也可用于企业和政府组织，与军事组织一样，而且在战后已经成功地用于企业和工业问题. 在英国，政府用它相当多，这个领域的工作者成立了一个运筹学俱乐部. 在美国，国家研究会议也组织了一个运筹学委员会以推进其发展，应用运筹学于非军事的目的. 1948 年以后麻省理工学院与海军合作开设了关于它的非军事用途的课程. 在军事方面，三军和参谋长联席会议都有运筹学组织.

运筹学诞生于不列颠战役中. 英国政府在寻求一切可能的手段保卫国家抵御德国的灾难性轰炸. 英国人有一支水平很高但规模不大的空军，他们还有雷达. 雷达可以补足英国空军规模的不足吗？怎样使用雷达拦截系统才能得到最大的益处？天线应如何分布？信号应如何组织？等等. 政府召集了来自各学科的几位科学家来回答这些问题. 这些人收集了有关的事实，用一般的科学方法加以分析，制订了新的运用技术，成倍地提高了空防系统的效力.

英国看到这种壮观的成功，就组织了类似的小组来解决其他的军事问题. 美国军队在美国参战后也很快组织了运筹学小组开始工作. 两国的这些小组在一些问题上大获收益，例如侦察潜艇的飞机飞行高度应是多少，飞机载重量应怎样分配于自身的燃油重量和仪器与装甲的重量

才是最好，什么是最好的侦察模式等等. 经过短期的运筹研究就知道，只要改变深水炸弹起爆的深度，猎潜机的效力可增加五倍. 在盟军著名的比斯开湾*反潜战役中，英美运筹学小组联合制订了一个巡逻系统，使得进出比斯开湾的几乎每艘潜艇都被发现，而被攻击的潜艇有 1/4 被击沉.

运筹学可以处理十分多样的问题，但是适于用它来解决的问题必须适合两个条件：1）必须要能用数字或量来表示，2）数据必须适应于现有的技术. 例如，如果数据是统计的，它们必须来自大体相似的行动，而且必须相当广泛地使某种统计正则性或统计规律能表现出来. 现在考查几个实在的军事例子.

战争早期通常的军事观点是，一个飞机中队最重要的是有尽可能多飞机处于随时可起飞的情况. 英国空军规定一个中队适于起飞的飞机不能少于 70%；这个百分比称为维持效率. 因为很难达到这个标准，就让运筹小组的成员戈登(Cecil Gordon)去研究.

戈登采取了一个全新的途径. 他本是生物学家，他觉得在人和飞机的生命循环中有类比可用. 他的推理是，飞行就必造成故障，因此就要维修，维修后就有适于飞行的状态，一旦有机会就可飞行，于是又开始了一个循环. 但在空军中队中，需要的并非适于飞行的状态，需要的是飞行. 停在地下的飞机只是潜在地有用——不起飞就无用.

戈登与空军中队一起生活了一段时间，测定了飞行时间产生维修时间的比例，深刻体验了中队作战行动的每个值得注意的特点以及飞机的生命循环. 结果他得出了一个惊人的结论：原来的维持效率这个指标是错误的. 有用的是能满足飞行任务要求的飞机百分比是多少，还有，用于维修的每个人一时能提供多少飞行量. 结局是把适于飞行的飞机的百分比的要求从 70%减到只要求大约 35%，从而大大增加了作战时间和中队的效率.

另一个例子是对付威胁我方太平洋舰只的日本神风攻击队(自杀飞机). 问题是，一条军舰应该急速机动以扰乱俯冲的自杀飞机的瞄准，还是应保持航行不变以改善己方防空火力的瞄准. 寻求回答的运筹小组分析了 477 次战例. 自杀飞机命中战舰 172 次，击沉舰只 27 次. 科学家们发现，两种防御战术之有效性视军舰的大小而定. 对于大舰，急剧的躲避行动对于高射炮手瞄准显然只有轻微的影响，但对小舰的瞄准则影响显著. 如果把神风攻击机的瞄准的效果考虑在内，净效果如何？小组经过相当的考虑，得出如下结论：大舰受到俯冲的神风机攻击时，应该急速地改变航线，而小舰则应慢慢变. 还发现，当攻击机从高空俯冲时，舰只应以船舷迎向攻击机，而从低空俯冲时应以首尾相向. 舰只把船舷迎着神风机可以集中更多高射炮火打它，但是研究

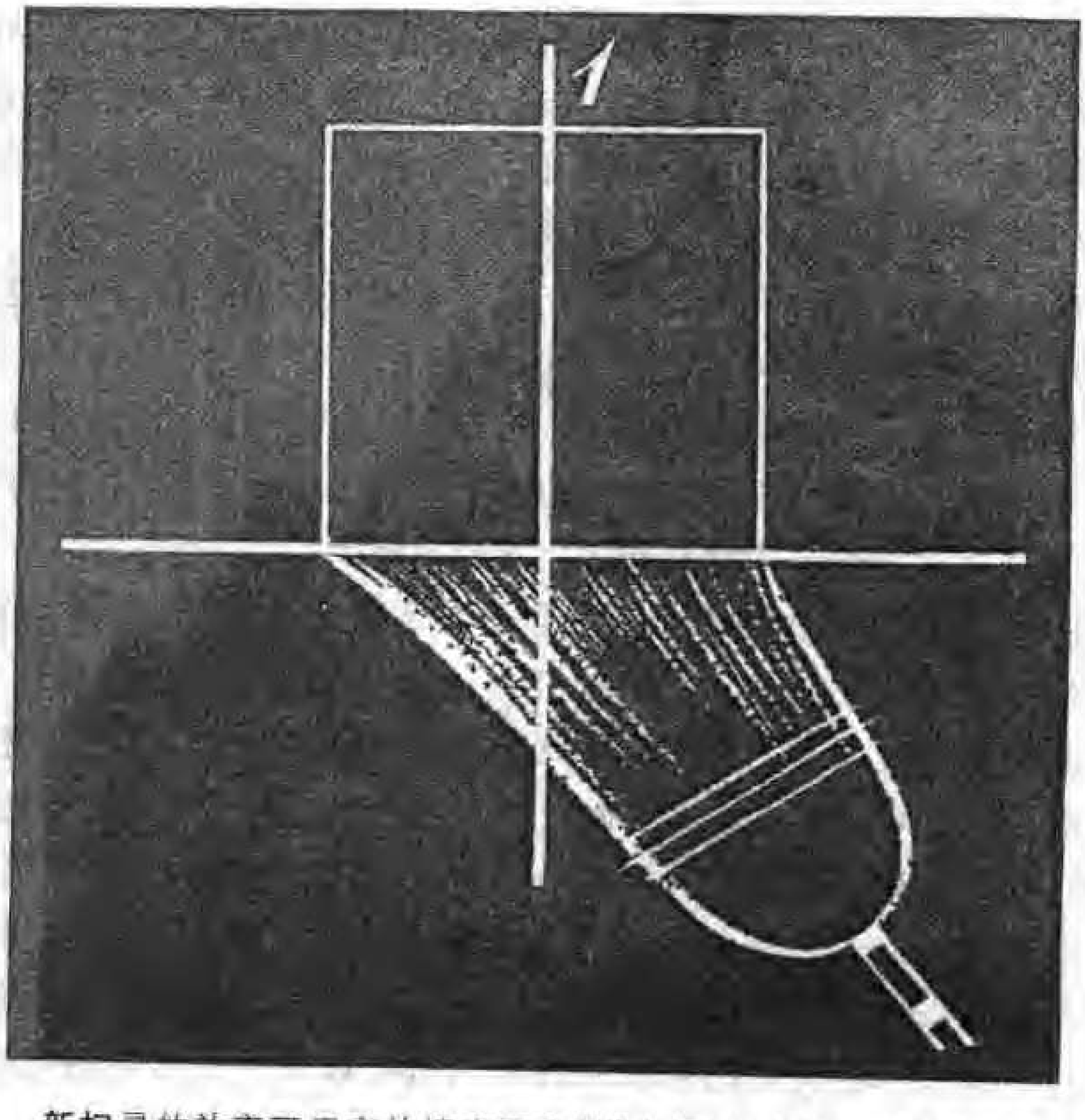
---

* 译注：即英吉利海峡南，法国西部面向大西洋的海区.

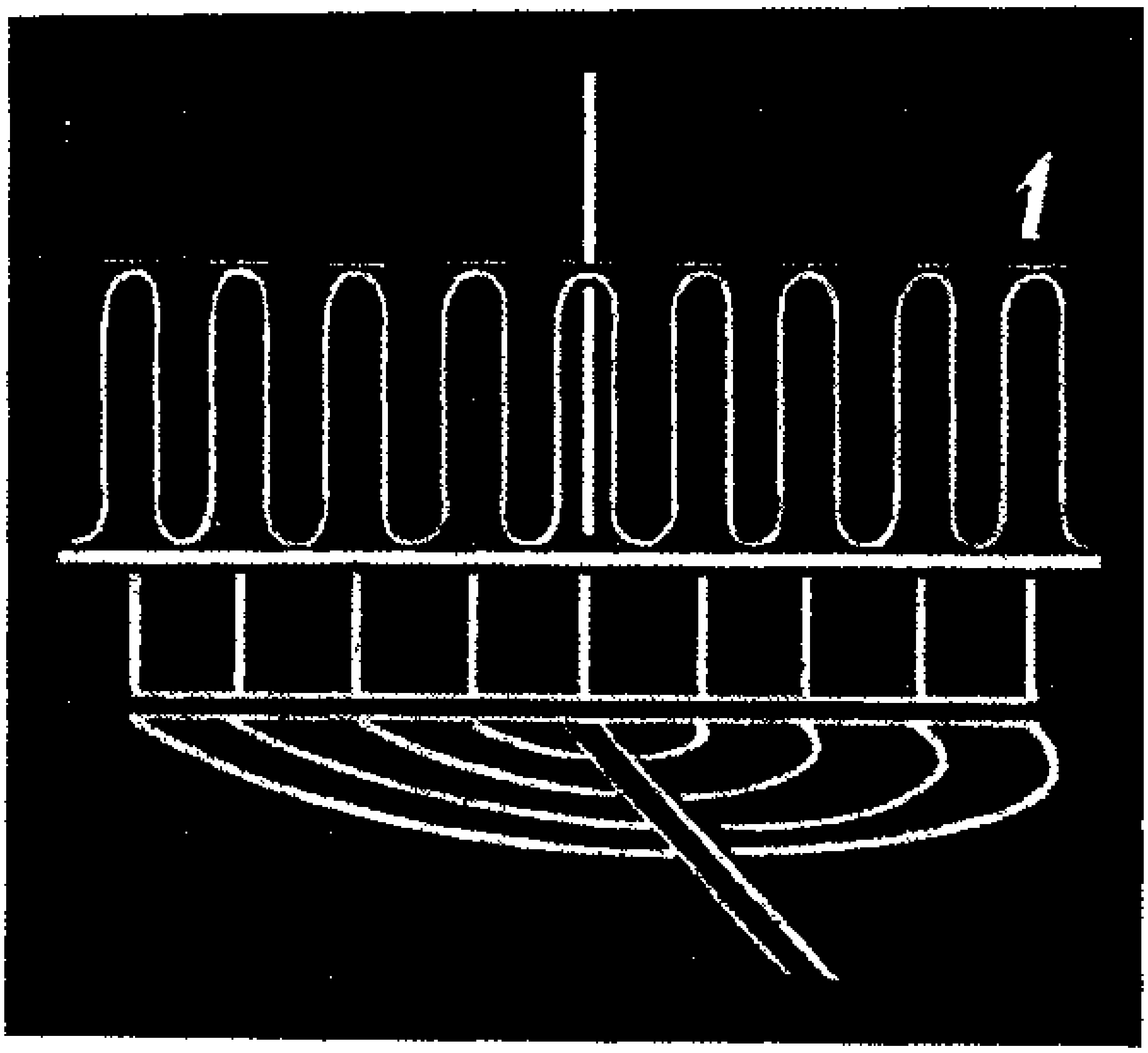
结果表明，对于低空俯冲飞机，增加火力的效果不足以抵消舰只露出了更大目标的后果. 运筹小组的建议的价值在后来的战斗中证实了：遵从这些建议的舰只在被攻击时被击中的次数只有29%，而不按此行事的被击中的次数是47%.

运筹学要用到如变量、统计常数，函数，概率等数学和统计学概念. 它的军事应用中也引入了一些新概念，例如收益率，搜索率. 收益率当然就是我方与敌方损失之比，但若损失不是按直接可比的单位计算时，就需要作复杂的分析才能确定一个行动在总体上的真正价值.

搜索率概念来自搜索敌方舰只或潜艇. 任何一种搜索工具(如扫帚，齿耙，手电筒光束，雷达电波束)基本上都是搜查一个区域中目标的未知的确切位置. 它的效率可用其搜索宽度和搜索率来度量. 它在某一点能找到一个目标有一定的概率，而依赖于这些因素. 一个"扫得干干净净"的新扫帚的搜索宽度就是它的实际宽度，它在此范围内找到一个对象的概率为1，即肯定可以找到. 扫除一个区域中的落叶的齿耙有一个不规则的侦察概率曲线，一个人在夜间用手电筒寻找



新扫帚的效率可用它的搜索宽度(横坐标)及其搜索率(纵坐标)来度量. 扫帚碰上它的路径上的一个对象的概率为1，即一定会碰上.



花园用的齿耙的效率显然不如扫帚. 一个对象若在一个齿的路径上,碰上它的概率为 1,但碰上位于两齿之间的物体的概率则为 0.

目标,他的概率图形又是另一样.

设一飞机以一定速度往返飞行而航路不交叉,这样来在一块洋面上搜寻潜艇. 为了计算搜索宽度,可先把假设在此区域中的潜艇数乘以飞机飞行的航程,然后再用此数去除实际找到的潜艇数与搜索过的总的平方英里数之积. 这个商即搜索宽度,再乘以飞机航速,就是搜索率.

这似乎就老是在算. 人们会问,它能做到什么. 答案是,搜索率是搜索行动的效率的一个敏感的度量. 如果指挥一队飞机在某一区域侦察潜艇的搜索率急速下降了,这对于指挥就是一个警号:什么地方出了问题.

这些概念也能用于企业中的某些问题,因为军事行动和企业行动的类比很相近. 事实上可以编一本粗略的字典把一方面变成另一方面. "武器"译为"材料","指挥"译为"管理"或"执行";"敌人"就读作"竞争对手"或者说来也怪,读作"顾客";"摧毁"读作"战胜对手"或"获得";"敌方损失"即是"我方获利"等等. 在企业中,收益率就是获利与消耗之比. 搜索率概念可以直接用于寻找顾客.

运筹学在企业中不是全新的东西. 在有些企业中很长时间以来即以"企业分析","企业研究"的名目进行了分散的这一类活动. 第二次世界大战带来的只是发展了系统的技术,并招收了一群有训练的科学家来从事这方面的工作.

为了说明运筹学怎样用于企业,我们举实际上做过的关于百货公司在报纸上作广告的效果的研究为例. 分析一类特别类型的广告,即设计得能产生立即的销售的广告——所谓"快速反应"广告(以下简称 QR). 因为百货公司每年要花成百万美元于 QR 广告,其结果的科学测定当然是值得研究的课题.

这种广告的效果不能简单地用做广告的特定商品额外的销售量来度量. 广告的目的是为了把顾客吸引到店里来以增加总销售量. 如果它只增加某一部门的销售而以牺牲店中其他部门或本部门以后的销售为代价,这个广告就不是有效的. 例如,店中为某种上衣作广告,将其售价由$30 减为$24. 这自然会引起很大一笔快速销售. 但是有多少顾客即令没有做这个广告,也会现在或晚一些以正常价$30 来买这种上衣呢? 这笔$24 的销售中有多少本来会是用在本店其他部门购物的呢? 有多少冲着上衣减价而来的顾客也会在本店其他部门随兴买些别的东西呢? 最后,这个广告会把本来在对手商店做的交易拉到本店中来呢?

很清楚,为了估计这类广告的净回报,必须研究相当长一段时间中本店的总销售和一切这类 QR 广告. 它的目标必须是决定"真正的外加销售",即全店整体上不作广告就得不到的外加销售量. 某百货公司的研究部主任几年前就作了这样研究. 他把本店的 QR 与总销售量与竞争对手即本城其他百货商店作了逐周比较. 他对这些数据的分析是基于以下的推理:某一周的销售量中有一定百分比来自 QR 广告. 由于本店和竞争对手的 QR 费用的起伏,这个百分比是逐周改变的. 此外,本店广告费用的起伏与对手的起伏并不同步:有几周它作的广告相对多一些,有几周相对少一些. 所以本店的总销售与其竞争对手总销售之比也会有起伏. 这反映了广告变动之比. 问题是怎样把这种起伏分离出来.

为此,研究部主任求助于数学. 令 S 表示全店销售量中不能归之于 QR 的那一部分,即一周总销售量减去 QR 销售量. 令 O 表示竞争对手相应的销售量. 假设比值 S/O 在相当一段时期中是一个统计常数是合理的,因为由 QR 广告这个可变因素产生的销售量已经减掉了,而气候或经济变动只要不太剧烈,其效果对所有商店都是一样的. 这个假设对于解决问题是一关键,因为由它可以得出一组方程,而用总销售量与 QR 广告费用等已知数据可以数字地解出而决定未知的统计常数以及广告的吸引力.

研究得出了许多结论,其中有:1)QR 广告产生很大的真正的外加销售;2)真正的外加销售量敏感地依赖于做广告商品减多少价;3)广告的平均吸引力在几个月这样长的时期中大体不

变，虽然个别广告的效果可以变化很大. 这项研究还有些副产品，它对商店运作的某些方面有启示，从而使效益有改进.

运筹学在和平时期的应用还包括分析以下问题：装备和人力的适当使用，工厂和公用设施中的操作程序，政府项目的计划. 例如，在英国为路面铺设材料所作的一项运筹研究使得能节约数百万英镑.

运筹学已经是一个很有力的机器. 像农场用的拖拉机一样，它需要有专门人才操作. 美国运筹学委员会主要目标之一就是提供这个领域中有训练的工作人员. 委员会相信，在目前的国家紧急情况下，运筹学特别重要和急需. 由于非军事的运筹研究成功地增加了美国工业的效率，它对减少人力的严重短缺是有贡献的. 运筹学青年科学家训练得越多，在必要时就可为军队提供更多的专家.

43.

数学机器

戴维斯(Harry M. Davis),1949 年 4 月号

项新的革命今天正在技术领域中进行着.它与一个世纪前开始的工业革命平行也完善着它.工业革命的第一个阶段意味着体力的机械化,然后电气化.这项新的革命意味着脑力的机械化和电气化.

19 世纪的那项革命是基于能量(卡路里,尔格,马力小时,英尺磅,焦尔,英制热单位,千瓦小时等,随便你愿意称呼它是什么)的转换和传输.

20 世纪的这项革命是基于信息(一个数,一个字母;图上的一个深色的或浅色的点;一个"开"或"关"记号;一个"是"与"非"之间的决定;一个"多"或"少"之判断;一个在"与","或"及"两者皆不"之间的逻辑选择)的转换和传输.这些被认为既是人类的计算,通讯和控制功能的"信息处理系统"的原材料,也是它的产品.

这项革命已经走了多远了?许多已经被认为是日常生活所需了,如收音机,电视机和电话系统等.其他的形式目前影响我们尚不够明显,如飞机的机器人驾驶员,电子航行系统,工厂中的自动控制,各种类型的雷达等.所有这些装置都有在这一方面或另一方面可与人类思维相比拟的功能.

但是比所有其他的都更配具有"脑子"称号的机器是电子计算机.它们很容易解决很复杂和很费劳力的使最耐心的数学家都不知所措的问题.它们会读,它们会写,它们会算术,都比人类的眼睛,心灵和手快一千倍到一百万倍.*

---

* 译注:这是 1949 年的"记录",今天甚至今后将会如何,有人敢打包票吗?以下讲到一些数据时,按今天的观点来看都小得奇怪,但请记住,这是 1949 年!所以下面不再加注了.

它们真能思考吗?

"这些机器真正能思考吗?"人们对于"真正地"和"思考"这些词有着不同的语意学的解释,包括反问"究竟人们能真正地思考多少?"也有不同的语意解释. 计算器的设计者和心理学家似乎对于人类头脑的机器竞争对手了解得越多对人脑就越尊重. 用严格的电气的和化学的术语说,人脑是最有效的计算机器,虽然它也是最慢的. 它不需要成千瓦的电力去激活它的神经,也不要吹风机为其通风换气;电气脑子则肯定地发散出很多的热空气. 神经心理学家麦卡洛(Warren McCulloch)曾经指出,如果一个计算器完全模仿人脑的神经网络建造,它将需要一座摩天大楼来装它,需要尼亚加拉瀑布的电力来驱动它,还要尼亚加拉的所有的水来冷却它.

一位专家说:"我越与这些机器打交道多,我越有这样的印象,它们是多么笨呀". 他们不能做创造的事. 它们只能按照指令干,而指令必须简化成最简单的术语. 如果指令错了,这些机器便干错了.

另一方面,这些机器不会分心. 它们集中全部才能于手头的问题. 它们完成一个复杂的计算能够比一个人所花的时间少得多,例如对街上亮了红灯,它就作出反应发出信号让右脚从油门上移到刹车上,比人就快得多. 因此它们能够接受智力劳动的繁重负担,完成数学和逻辑数据的量之大正如同一大批流水线将手工劳动转化成大批量的生产一样.

贝尔电话实验室的香农(Claude E. Shannon)合适地回答了"它们能否思考"的问题,他说最新的机器的表现"将迫使我们或者承认机器思考的可能性,或者进一步限制我们的有关思考的概念."仙农是在无线电工程师学会(Institute of Radio Engineers)三月份的会议上说这番话的,他在那儿解释了如何能够教会计算机去下棋,虽然不是很卓越但也过得去了. 与人类象棋大师的伟大创造性相比,机器带着它安装好的程序用以选取下一步棋着,它具有高速运转,没有错误和毫不懒惰的优点.

一项新的产业

自动脑子的建造和运转已经成为一项巨大的产业. 电脑的价值每台 5 万美元到一百万美元,还有许多顾客在急切地等着用,其中有飞机制造商,保险公司,统计事务所,以及首先政府各个办事部门. 我们希望 1950 年的人口统计将会是首次用全电子的计算机进行分析,提取出丰富的关于国家经济生活的信息. 虽然以前也使用穿孔造表机,但不曾从统计数据中提炼充分的信息.

电子机器是多才多艺的. 芝加哥的核物理学家将问题送到马里兰州的阿伯丁,在著名的

ENIAC 计算机上进行处理. 放在纽约第五十七街的平板玻璃后面的 IBM 选序计算器，现代化的电子管和继电器装了满满一房间，远远不只是一个广告性的展品. 当逛商店的人和逛展览会的人瞅上一眼，这台机器正静静地解决着诸如月球的运动或者导弹的控制等问题.

IBM(即国际商业机器公司)已经把这台大机器的某些最好的电路组装到一台小的，大小如两个文件柜的整洁的钢板箱子里，并且安装上转脚轮，使之能安置在任何办公室靠近电源插座的地方. 十倍快于早先的 IBM 商业计算打孔器，604 型电子计算机现在正大批量从生产线上下来.

但是这些仪器仅仅是新的电子思考时代的先驱. 在二月份美国电气工程师学会的会议上和三月份无线电工程师学会的会议上，已经很清楚每一个现在正在运转的计算器将很快地过时，正如同一个耳机矿石收音机与 1949 型的调频电视机的比较一样. 然而老一些的机器将不会作废，因为有着不同的问题适合各种机器去处理.

令人感到奇怪的新计算机，不是按几分之一秒来运转，而是按几分之一微秒的速度，正在迅速地被赶制完成着. 宾夕法尼亚大学莫尔学院，ENIAC 的诞生地，正在建造一台称为 EDVAC 的机器，它有一个容量大得多的存储器和更多方面的才能. 这时没有了 ENIAC 的主要设计人和 EDVAC 的最初构想人毛赫利(John Mauchly)和小伊克尔特(J. Prosper Eckert, Jr.)的帮助，因为他们已经去开设一家公司：伊克尔特毛赫利计算机公司去了. 在费拉德尔费亚大楼上占了两层的伊克尔特毛赫利公司正在调试一台称为 BINAC 的计算机. 伊克尔特毛赫利公司还有六台精心设计的称为 UNIVAC(Univa)的机器合同，每台价格大约 20 万美元，为政府、工业和商业界所用.

在新泽西州的普林斯顿，在一个属于高等研究所的特殊计算机大楼中，冯·诺伊曼(John von Neumann)和其他卓越的数学家们已经在一台巨大的尚远未完工的计算设备上工作两年多了. 这台机器被美国无线电公司 RCA(它参加此项目之协作)的研究主任兹沃里金(Vladimir Zworykin)描写为一台未来的"世界气象模型". 它可以设置来模拟每一种形成天气的力以及这些力之间的影响，甚至比自然界中还要快一点；从而明天的气象今天可以读出来，而不是像用现在的方法当每一个因素都考虑进去时要一年以后才有结果. 但是冯·诺伊曼正很有兴趣于用这台机器去解决原子物理和经济统计的问题.

同时麻萨诸塞州瓦尔珊的雷神制造公司原以制造微波雷达中的磁控管而著名，现已接受了一个大的政府合同生产一台可与 UNIVAC 相比的计算机. 哈佛大学已经将它的马克Ⅱ型计算机海运到佛吉尼亚的达尔格伦的海军试验基地，现正在建造马克Ⅲ型. 麻省理工学院则有它的"旋风计划"制造军事目的所需的电脑.

英国的科学家们也在这方面积极行动. 他们在这个领域有令人骄傲的传统，因为英国人巴贝奇(Charles Babbage)一个多世纪以前用他的"差分机器"详图(见本书第 8 章巴贝奇传)勾画

出现代计算机的本质特征. 现在有四个英国实验室正在建造高级计算机.

不是所有这些活动都是公开的，也不都有同样的味道. 有军事的机密也有商业的机密. 在幕后人们感到紧张的敌对和竞争，私下里还在议论着不公平的炒作和控告盗取发明，以及暗示将要进行专利诉讼. 这些是一个大的新产业正在建立的现象，伴随着人们为自己能以同样的条件占有一席之地而斗争.

竞争中之得失攸关可以从一个简单对比来理解. 某些在开发中的新机器的基本的能力将是在千分之一秒内完成 10 位数字的乘法. 同样的任务一个人用铅笔和纸去做将需五分钟(大约 300 000倍长). 这台机器等价于大约 25 000 个台式计算机操作员.

数字机还是模拟机

有两族计算机——数字机与模拟机. 上面所论及的均为数字机. 本文的基本目的就是谈论它们. 但是模拟计算机先出现；麻省理工学院的著名的“机器脑子”，二十年前布什(Vannevar Bush)* 因它而获得名声，是一台模拟计算机. 雷达和枪炮的指导者们特别依靠它们，并且它们还将继续在许多方面发挥其重要性. 因此让我们先考查一下这些机器，再弄清楚模拟的与数字的计算机之间的区别，然后详细分析后者.

你的汽车里的速度计是模拟计算机的一个简单例子. 设定一个离心力正比于驱动轴的速度，这个离心力移动一根针到“英里每小时”表盘上的适当位置. ——在表盘上的一个稳定位置表示汽车位置的变化率. 这是一个微分学的运算.

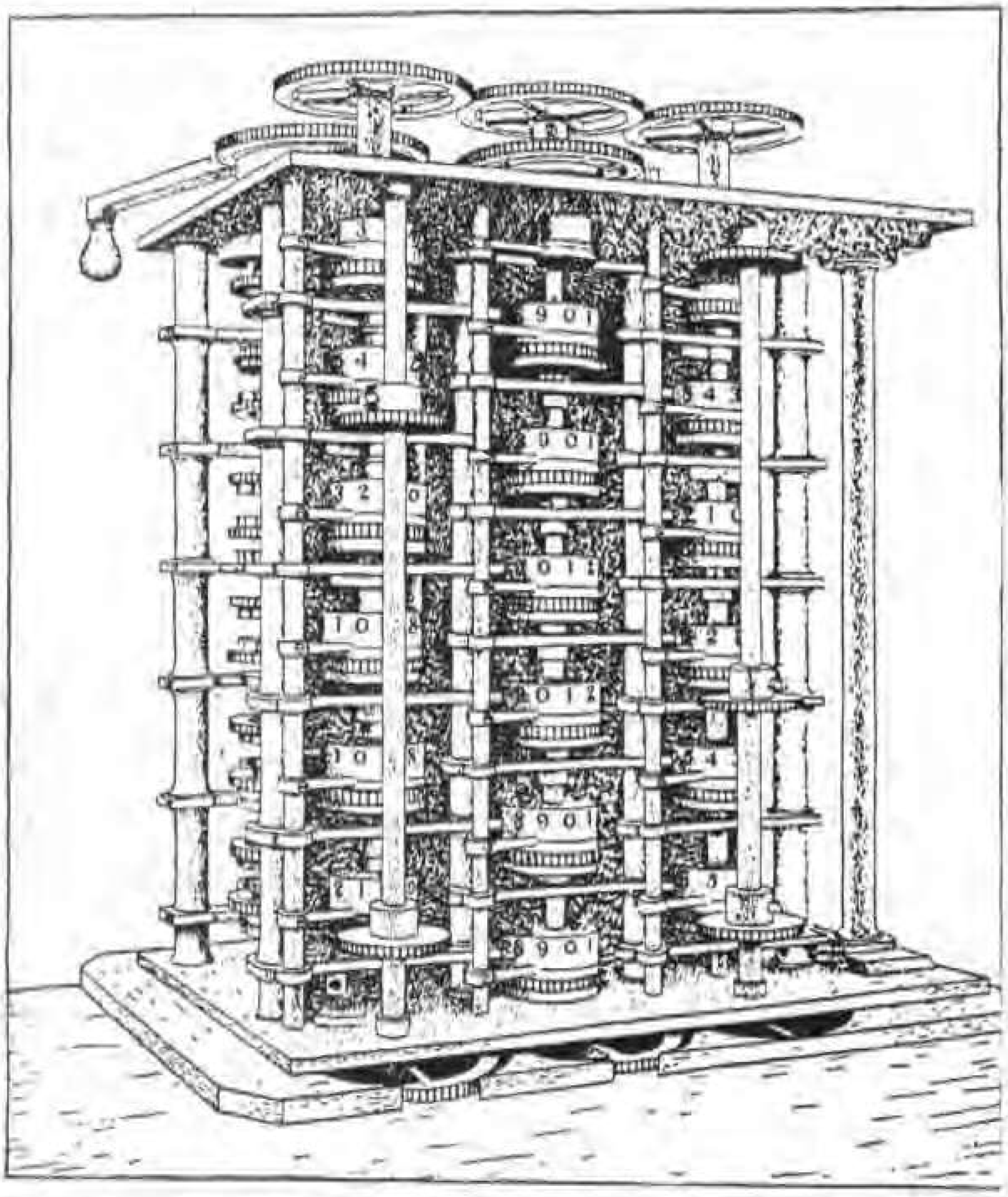
你的汽车或者你的表的齿轮也在做算术：它们能做乘除，当然乘数是由装入的齿轮的比率确定的. 汽车后轮之间的差速齿轮正如其名称表示一个机械减法机器，由一个轮子得到的任何多余的速度被另一减掉. 所有这些观念都实际地被应用于模拟型的机械的计算机器中；其零件是齿轮，凸轮和差速齿轮.

布什的“微分分析仪”解决微积分中的问题. 这台机器的不同元件是为方程的不同部分而设置的，全部用齿轮连接，使得所得出的仅有的答案将是方程的要求所认定的正确答案.

还有电气的模拟计算机. 代替一个机械的位置，我们可以有一个电位；代替一个速度，我们

---

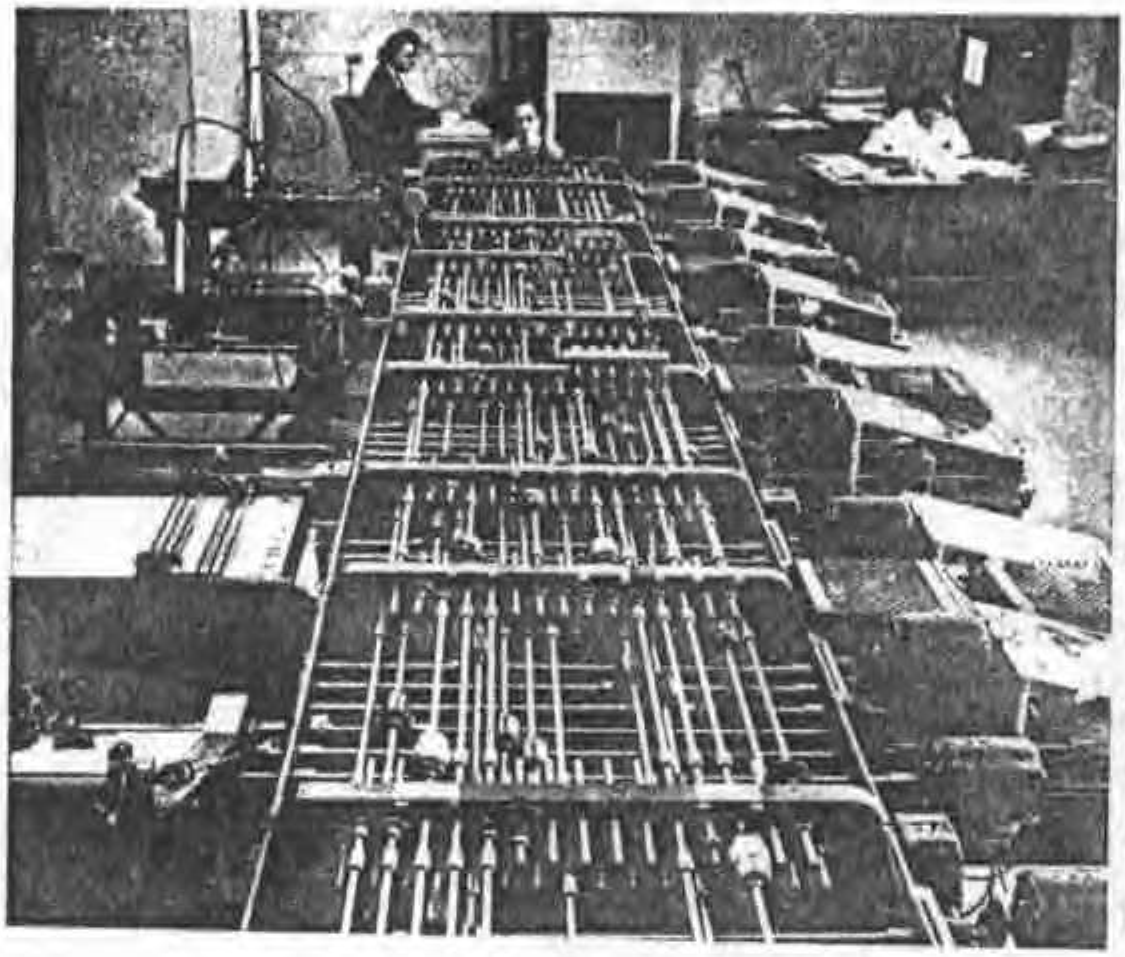
* 译注：这是另一个布什，与美国总统无关，生卒年月为 1890 年～1974 年，本人是电机工程师，他的贡献除了电脑以外，主要是担任了罗斯福的科学顾问. 造原子弹的曼哈坦计划是由国家科学顾问委员会主持，其时他是顾问，他还是 NASA 前身的主任，NSF 的创始者. 特别是，香农是他的学生.



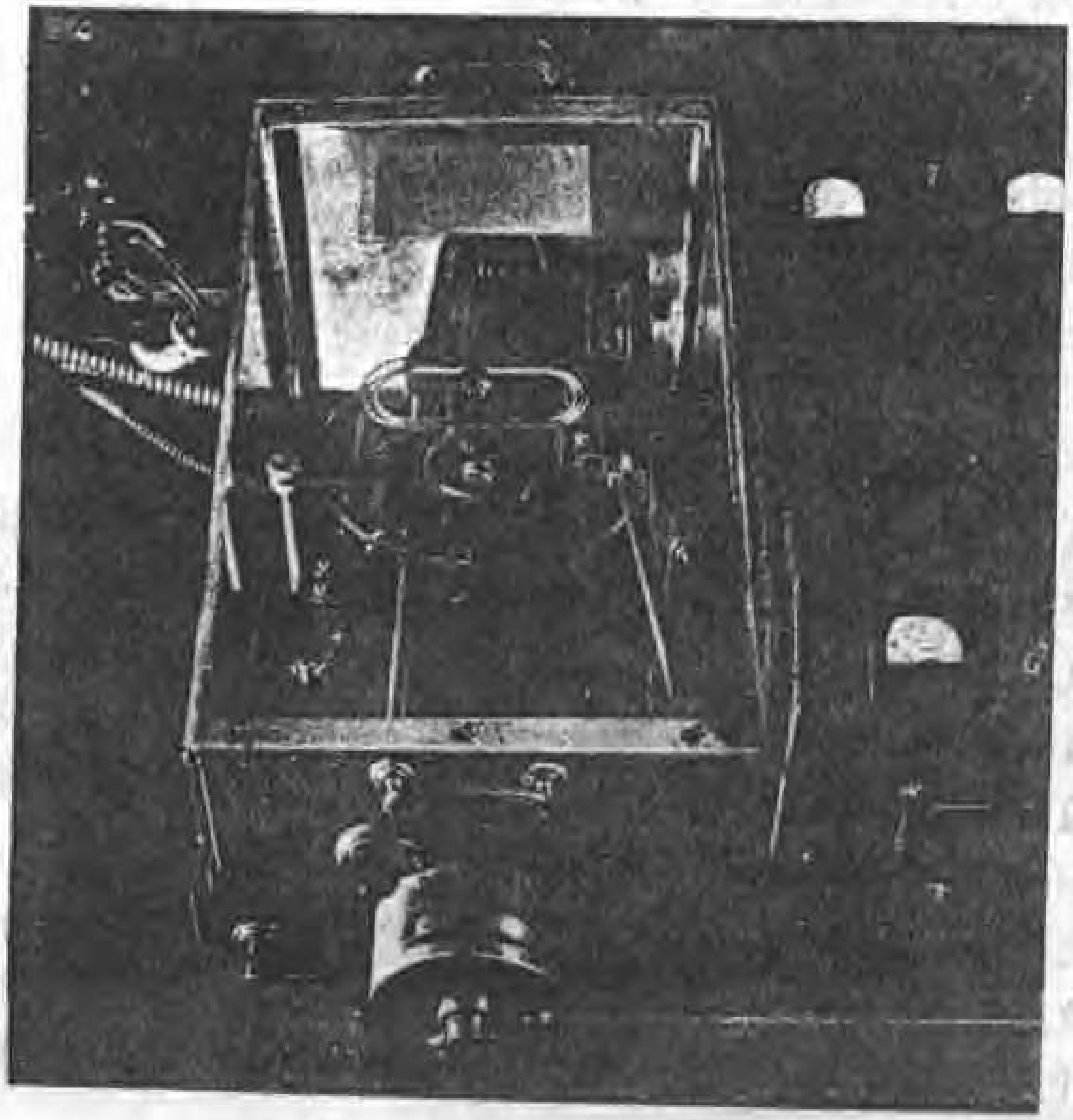
差分机器于 1820 年由英国数学家巴贝奇设想，是第一台现代数学机器. 它不能工作，因为他那时代的工匠们不能造出有足够精度的零件.

可以有一个电流，或者由它导出的一个磁力. 设置带有电阻，电感和电容的回路以根据给定的方程来行事. 一个电气变压器能够像一对齿轮那样做同样的乘法. 真空管回路能够积分. 这样的机器正在适量地生产着——由里弗斯仪器公司制造的 REAC 是一个成功的例子，它能自动地用一系列的曲线来描绘出一个微积分问题的答案. 麻省理工学院有机械分析仪的一个电气的后继者，它看上去像一个电话总机.

模拟计算机似乎比数字计算机要少占点地方并且便宜些；它们很快地提供解答. 但是像计算尺（它也是一种模拟的工具，因为它将对数转变为距离）那样，它们允许精度很有限. 对于高精度的计算，数字的或者逻辑的计算机如今已是随时可资利用了.



在阿伯丁的试验基地的弹道研究实验室里，于 1930 年代由麻省理工学院和宾州大学莫尔学院建造的微分分析仪.



微分分析仪之主要部件为积分器. 这个装置的主要零件是一个圆盘和一个转动其表面的小轮. 这些旋转零件调节好以后就能积分两个不同的变化率.

数字观念

数字计算机是非常卓越的，因为它不作度量而作计算. 它不反映较大或较小的程度；在它的每一步行动中，它是一个“全或无”的装置，操作离散的信号，或者存在或者不存在.

最简单的数字计算机是人手，我们肯定是从它才有了我们的十进位系统. 对应于像一个手指头，一块卵石或者一条唱针划痕这种原始的数字单位指示器，新的自动计算机表示数字用到的方法如下：

一条纸带上的一个圆洞.

一张卡片上的一个方洞.

一个电磁体中的一个电流.

一个磁铁所吸附的一个线圈.

一对闭合的电流接触器.

一个电气传输线上的一个电流脉冲.

一个电子管其中电流允许从灯丝流向板极.

一个铁的或合金的导线上的一个磁化区域.

一个磁带上的一个磁化区域.

一个照相胶卷上的一个暗色区域.

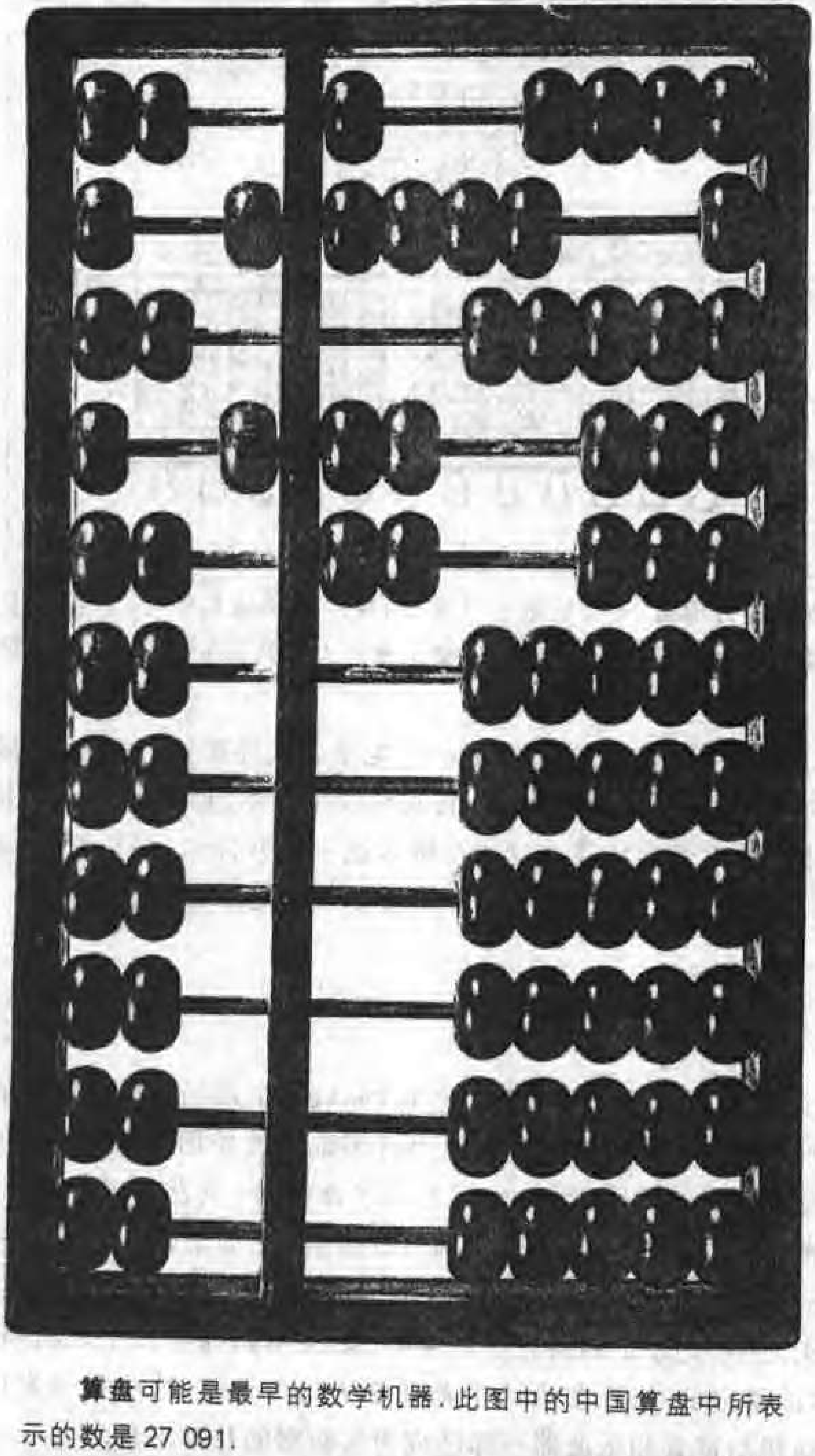
一个阴极射线管中面板上的带电荷区域.

一个水银槽中一个波纹的移动.

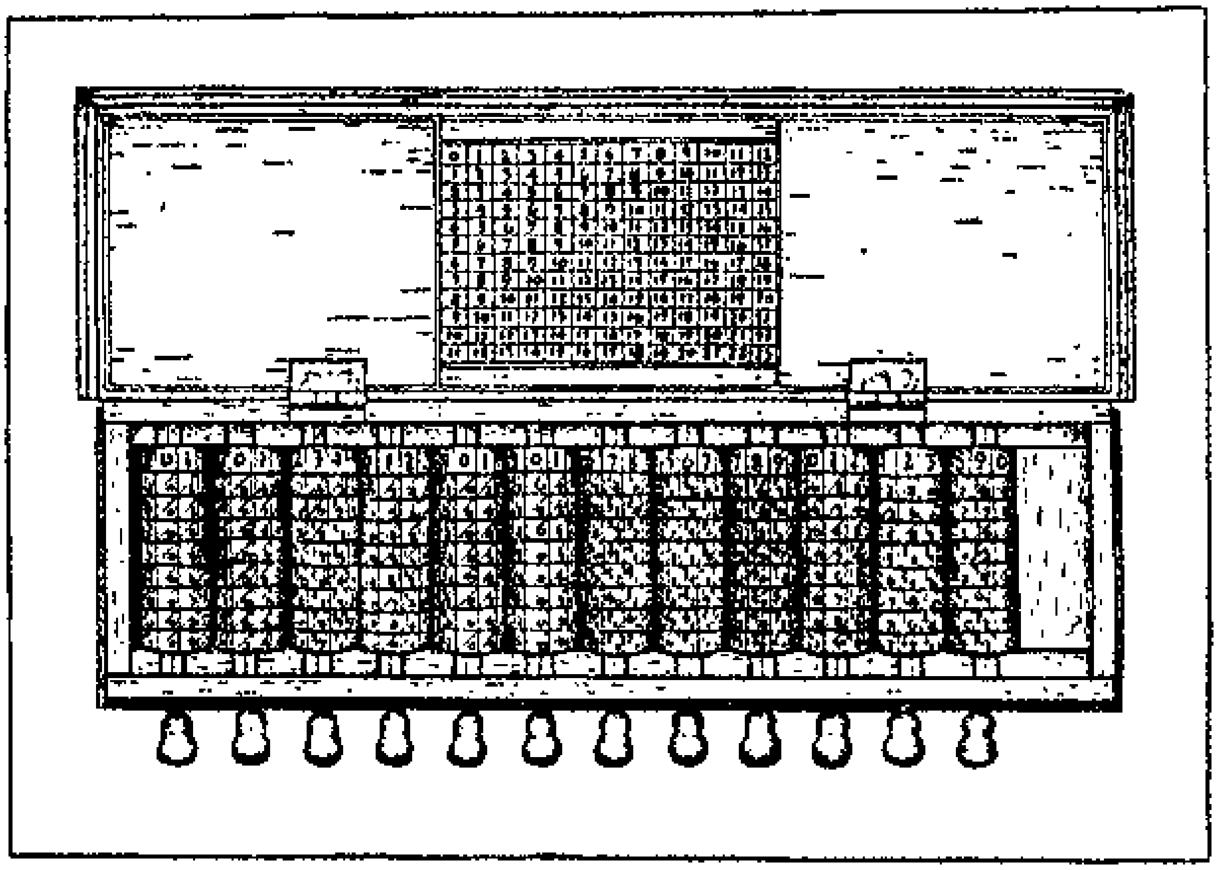
以上各种情形都没有用信号程度的度量. 有一个洞或者没有洞，接触或者不接触，有电流或者无电流，有脉冲或者无脉冲. 设计者只需弄明确那里没有含糊不清. 例如，他们只需留下足够的磁带面积，使得一个磁化的区域不至与一个非磁化的区域相混淆. 然而，这种考虑只限制了密集程度以及机器在某方面的速度；这不影响精确性或者计算得以实行的十进位的数字.

任何这种印记或者装置称为一个“记忆”. 运用“记忆”作为计算机行业的一个技术术语支持了它们的与“脑子”的拟人论的相似. 但是的确没有什么值得惊奇的. 每一张照相，每一页印刷好的纸，每一张注销了的支票，都是一个机械的记忆的形式.

有关计算装置的重要之处不是它们能够记录和记住数目，而是这样的事实，它们能够特别迅速地放弃所记忆的内容，并且用某种适合的方式立即转移和处理到同一机器中的其他部分去. 用“开关”型或者“是非”型的对比使得它易于将一个记录从一种形式转移为另一种形式：一个



算盘可能是最早的数学机器. 此图中的中国算盘中所表示的数是 27 091.



纳皮尔的杆组是17世纪的一项尝试，用以将乘法机械化.它们从没有制造得能满意地工作.发明者爱丁堡的纳皮尔更为人所熟知的，是因为他是对数的发明者.

打洞模式立即变成一个开关闭合的模式或者一个电子管通导模式；它是表示该数的模式.

当然，数1 000 000不是用一百万个点，洞或波纹来表示.即使用每个单位一微秒的速度的速率传输，那将意味着一百万个步骤并且要花费多达一整秒钟的时间.显然，解决的办法是与我们在日常计算中同样的办法——位值码，其中十进位系统是最为熟悉的一例.

机械化数字

人类第一个人工的数字计算装置是算盘(abacus)，一个用手操作的机械存储器，非常古老，早到只用指头计数的时代.它仍然有效地在世界许多地方被使用，包括美国的中国人洗衣房.第二个进步是加法轮.莱布尼兹，他独立于牛顿发明了微积分，也发明了步进轮，成为第一个商业计算器的基础.各种各样的加法轮导致现代的台式计算器.如果没有各种各样的办公室机器用指头按键盘来进行加、减和乘，很难想像一个经济能够包括许许多多保险公司，统一核算的连锁店，以及为个人户头之10美分支票而竞争的银行.如果不是商业数学之机械化，现在工业将需要比工厂工人更多的簿记员.从社会统计学者到原子物理学家，这些科学家们已经充分运用了这些商业装置.加法机与试管和示波器一样已成为实验室的日常工具.

适合于电气化时代的一项进一步的发展由人口调查专家荷勒里斯(Herman Hollerith)开始.他发展了第一台穿孔卡片机,利用洞的位置来记忆数据.在1890年的人口调查中已证明它可减少一半劳力.他于1896年组建的造表机器公司后来被合并入国际商业机器公司(即IBM).

IBM卡,标准化大小为三又四分之一英寸乘七又八分之一英寸,它有80行每行12个穿孔位置,已经成为一种数学新名词了.在许多穿孔,分类,计算,以及会计机器之间可以交换,它们处理卡片的方法可以是机械化的,电气化的,以及电子化的.同一张卡片既可记载天文轨道,或一个统计员的审计,一个公司的所得税,或者这份杂志的订阅的数据.

IBM卡,或者它的变体,不仅铺平了通往现代电脑的道路,而且在许多情形它们组成了重要的部分.打了洞的卡片说的正是一台电子机器能理解的那种语言.机器从它们读到分派给它的任务,将答案写到它们上面,并用一摞卡片可以形成一个图书馆或者存储器.

现代计算器的开发上,重要性可以与之比拟的,虽然某种程度被忽视,是电传打印机.这是这样的机器,在每个报纸办公室,每个新闻社分社,每个电报局都在使用它,而不用手来打字;它是这样的机器,可以远距离地阅读和书写.在这个机械化的通讯中的基本要素是继电器和穿孔纸带.继电器是电报中继器之直系后代,开关一个新的电气回路作为电枢对输入的信号作出反应而导出电磁拉力.穿孔纸带上能容下五个洞,加上第六个扣齿洞,它用以将纸带送进阅读机器.

请充分注意在跨过一条纸带的宽度上有五个洞或者没有洞的数学意义.这个"五单位编码"能传递多少不同的意义?答案是32,并且我们所用的办法说明了二进位计数系统在最先进的电脑中的出现.

纸带上的第一个位置可以穿孔或者空着;这指出两种可能性.其中每一个可以配以第二个位置有洞或者无洞;这得到四种可能.第三,第四和第五位每一个都使可能性加倍,总共得 2^5 或者32个可能.其中26个用来为通常的通讯目的表示字母,五个作为给机械打字员的其他命令:间距,回车,进行,换为字,换为图.(32个位置有一个通常要空着,不用作任何信号.)将这些命令编成码并且用继电器来实现它们,这种能力是电脑的又一重要成分.

这样一种带有 2^5 种选择的纸带的宽度表示了一个二进制的五位数.有些纸带采用六位码,提供64种选择.

继电器计算机

有可能建造一个更快的计算机,除电传打印机和穿孔机,电键板和导线,和一批精巧地连接起来的继电器外再不用别的东西.这不仅是可能,它已经被贝尔电话实验室建造成了.

穿孔机将问题用穿了孔的纸带表示出来. 继电器(任何电话中心的标准元件)完成计算. 加法的办法是:这样来装置继电器使当任何两个继电器闭合时,表示其和的继电器充电. 例如,如果第 1 号继电器和第 3 号继电器都闭合,电流只能是通过闭合的接触器通向第 4 号继电器的线圈. 然而,如果输入电流从"载着 1"的电线(意思是加法的原来的那行有一个"1 载着")到达,这条道路引向第 5 号继电器.

贝尔电话实验室不做计算机生意而只做电话生意. 但是那里的工程师们必须完成业务上的大量计算,于是,当时在贝尔实验室的(现在是计算机工业的一位独立的顾问),斯蒂皮茨(George R. Stibitz)构想了用电话系统的熟知机械来建造一个机器人计算机的想法,并且五个一系列的一个比一个复杂的计算机的第一个是由贝尔于 1939 年建造的.

本质上说,通讯工程师们并不满足于一台只会计算的继电器机器人. 如果他们必须围绕着实验室迷宫式的走廊走到这台机器跟前才能工作, 节约脑力劳动有多少好处呢? 因此他用连接导线以替代走路,并且装配了三个遥控站于不同的楼层,数学问题可以电传打字进去(当然,如果电传打字机出现了忙音时不行),答案可以打字出来. 这个特点很像电话使用者的日常的事情,而当美国数学会(American Mathematical Society)的成员在 1940 年的达特茅斯学院的会议上通过从汉诺威到纽约的长途线路提出的问题立即在电传打字机上得到答案而感到大为吃惊时,他们多少有些出乎意料. 实际这并不比隔一个房间传送答案更困难.

与我们下面将讨论的电子装置相比较,继电器计算机太慢了. 在另一方面,它们是可靠的. 一台机器可以工作 1 500 个小时而不出错误. 它们自我检查,不让任何错误通过,即使当它们没人管时也如此. 当仪器中的某个元件坏了时,机器干脆丢掉有问题的这一部分而继续前进到下一部分.

二战期间 IBM 建造了若干台继电器计算机,其中两台安装在哥伦比亚大学,并且在伊克尔特(W. J. Eckert)的指导下为进行基本研究的科学家使用. 第一台大规模的计算器是马克 Ⅰ 号(Mark Ⅰ),或自动序列控制计算器,它是 IBM 提供给哈佛大学于 1944 年 4 月开始在那里工作. 利用由电气脉冲控制的加法轮,带着通信方向继电器,它能计算 23 位十进位数,并且计算机乘积精确到 46 位. 它从穿了孔的纸带,从 IBM 卡,并且从 1 440 个手拨开关用手设置而获得指令. 它发出答案到 IBM 卡上或者打印到纸卷上.

电子计算机

继电器究竟在干什么? 它们不是别的,而是电力操作的开关,使得一个信号开一个阀或者一道门,而另一个电流得以通过它. 电子管可以做完全一样的事——正是由于这个原因,英国人

在我们用“管子”一词时，总是用“阀门”一词. 电子阀做继电器做的事，而且做得快上千倍. 在继电器中，一个机械对象必须经过空间移动来开或者关这道门. 在电子管内，只有电子在移动，而它的速度由于每一秒钟电子流反转自身达数百万次，甚至数十亿次. 雷达装置也利用了这个事实.

头一个应用无线电和雷达的快速的电子数学计算机是战时为陆军兵工署在宾夕法尼亚大学秘密地建造的，后来花费 10 万美元迁移到阿伯丁试验基地的弹道研究实验室. 这就是电子数字积分仪和计算机，简记为 ENIAC. 这台奇异的机器是如此复杂，甚至在它的发明者中都没有一个人知道它的 18 000 多个管子的每一个的连线和功能. 不过，它的某些安排是相当简单的. 电子数字存储器显然已初露端倪.

如果你被陆军兵工署的官员允许进到 ENIAC 的新的装有空调的房间去，你将看到用电子管做的插件板排成的墙. 会向你显示一块称为累加器的插件板，并会告诉你它能记忆一个十位数. 它能登记上从零到 9 999 999 999 之间的任何数，但每次只能登记一个这样的数.

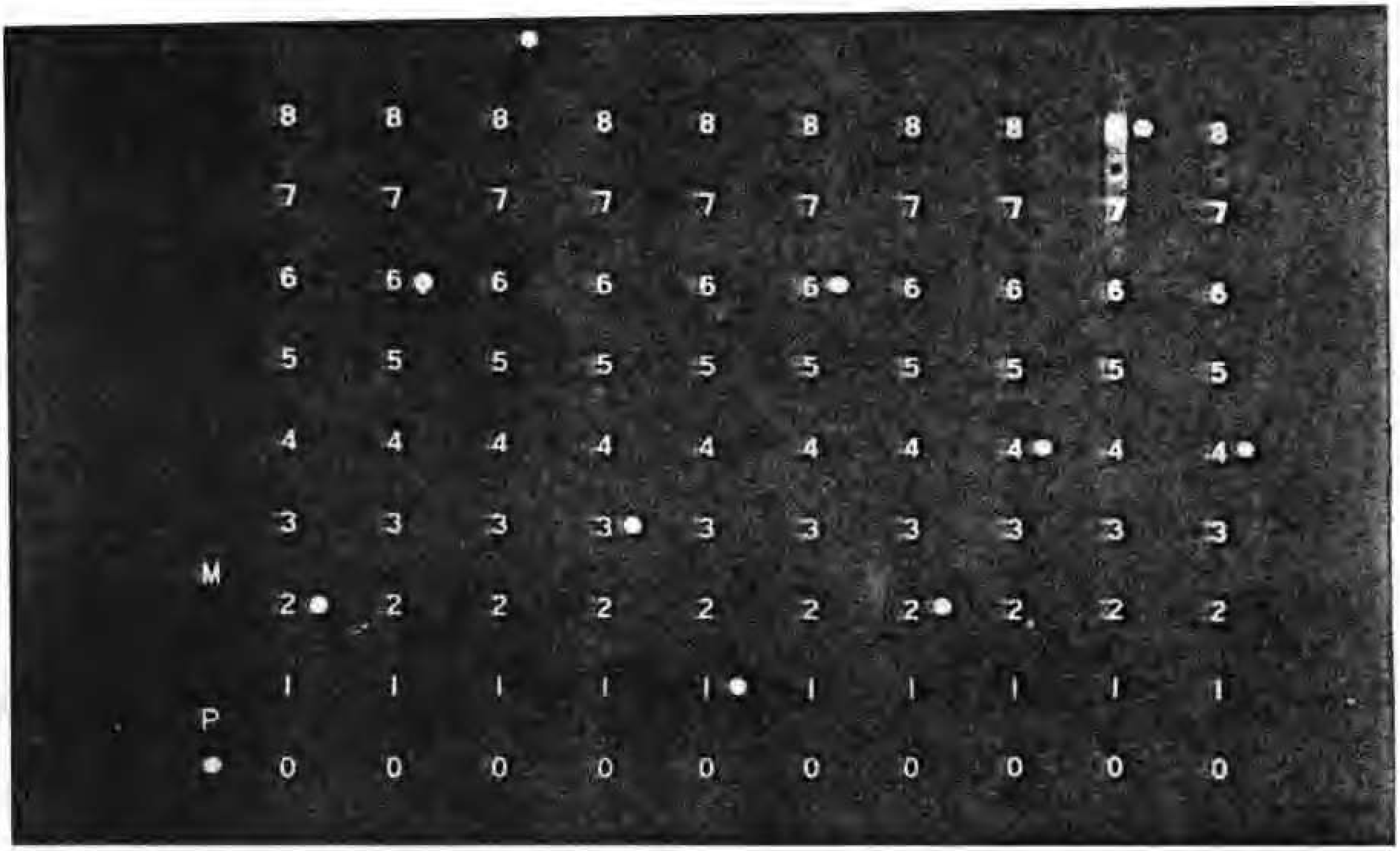
一个累加器本质上由 100 个真空管(也可以说是 200 个管子，因为每个都是一个双三极管)组成. 它们安排成 10 个一列共 10 列. 由右至左来读，依次个位列，十位列，百位列，等等. 在每一列中，最底下的管子表示零，第二个表示 1，第三个表示 2，等等直到 9.

为使事情更容易些，每个管子前面装一个氖灯，当管子处于“指示”状态时它就亮. 每列只有一个管子能处于指示这个状态. 如果这个数是 5 384 293 768，第一列管子 5 将亮起来，再就是第二列的管子 3，等等. 如果这个数停住几秒钟(除了演示或检查实际运用时不这样)，甚至未经训练的人也很容易读出这个写在墙上的数.

ENIAC 有 20 个这种累加器，它们占了机器的总体积的一半. 因此它只能存贮 20 个数(每个 10 位)于其“电子存储器”中. 在任一给定瞬间至少一个累加器将会工作于动态状态——或将已得到的数送出或者收进一个新数. 新数可以进到一个空着的累加器，登录于其中，或者它进到一个已经有一个数的累加器. 在后一种情形，新的数自动地被加上去.

这里在一瞬间我们就看到了这台机器的惊人的能力. 一个累加器只花费五千分之一秒就可吸取一个 10 位数(如果必要，将它加到已有的内容上). 或者用更适合于这个讨论的时间单位来说，用了 200 微秒.

高速计算器的一个特点是它做最复杂的加法所用的时间不比最简单的多. ENIAC 把 1 和 1 加起来所费时间与加两个全十位数是一样的. 事实上，一个累加器当要求它从 1 减去 1 时工作花时最多. 因为它是单向工作的，它不能从 1 一步回到零. 而换成先将负 1 设置成 9 999 999 999，即一百亿减 1. 然后将 1 加到 9 999 999 999 上去.



ENIAC 计算机的累加器运行于十进制. 它有一个 10 位的"存储器". 左边字母 M 和 P 表示减与加. 由氖灯指示的数为 2 693 162 484.

为实行这个加法，机器工作如下：表示 1 的一个单独电脉冲进入个位列. 在第一个管子处它发现有一条自由的通道通向第二个管子. 那儿同样，大门是敞开的，如此逐个通过各个管子直到该列之最上方. 这个脉冲一直走到表示 9 的管子. 在 9 的位置上的"触发器"回路已经是处于"开"条件. 在这一点上发生三件事：第一，脉冲将最上面的管子"关"了，将 9 清除掉. 第二，它继续到下一个管位，即表示零的管位，并开启了指示条件. 现在个位列读出零，这正是所需要的. 但是如果你来心算你会说"得零进一". 与此相应，第三步，这个零引起一个单独脉冲被送到十位列. 在这里这个脉冲走过完全一样的过程，直到列的上端将 9 变成零，并送一个脉冲到百位列. 重复这个过程直到整个排列已被从 9 999 999 999 变成 0 000 000 000. 这台机器用了很困难的办法实现了 1 减 1 等于零的计算.

假设欲加的数是 1 000 000 011. 则同时有单独的脉冲进入个位列、十位列和 10 亿位列. 当每个都跑过其自己的一圈后，来了另外一个信号，它指令每个列如果它已经有了一个"进位"信号则将它送到左边的一列去.

乘法和除法是如何进行呢？这些可以用重复加法和减法来完成，并且在有些计算器中是这样完成的，52 乘以 7 只是意味着给数 52 再加六次 52. 类似地，除法是重复的减法. 不过，存在一些捷径. ENIAC 用了一个装在内部的乘法表. 这立即可以给出任意两个数位数之乘积. 所有乘积送入累加器相加. 用这种方法，整个被乘数被一个个位数去乘，花的时间等于一个加法的时间. 一对 10 位数的完整的乘法可以在 1/350 秒内完成.

每一个数值计算，不论涉及一个方程或者一个数字表，可以约化为一系列的基本的算术运算.

设计 ENIAC 是为了一个特殊目的之用. 兵器部需要射击表——对每一种新的炮，并且对每一种不同的尺寸和形状的炮弹的表是不同的. 陆军有一批熟练的脑力劳动者，坐在办公桌旁用他们的指头按办公用的加法计算器的键，编制出必需的表来. 做出一枚炮弹的弹道，估计出空气阻力和许多其他因素，要花费一个人 20 个小时. ENIAC 做同样的事只要半分钟. 这种速度对于控制导弹的含意是明显不过的.

虽然 ENIAC 在用它自己的办法开辟了全电子计算的道路上是一个巨大的成功，但是现在再不会建造与它完全一样的东西了. 它有多种严重的局限性. 其中主要的是计算速度与它从知道了问题到把答案呈现出来所需时间之间的脱节.

对于一个给定类型的问题，它必须用插接导线和开关来下指令，两者均用速度很慢的人手的手工操作实现. 此外，它有这么多的部件，以至故障来源太多而需要例行常规的精心保养. 另一个局限性甚至在建造过程中已为设计者所知晓，那就是很有限的电子存储量以及用电子管来存贮数目所需的巨大空间. 电子管要求 120 千瓦电力，还需要 20 千瓦供通风装置将电子管发出的热量驱走. 这便导致了这样的结果：用 100 个电子管来呈示出一个 10 位数，是很浪费空间和电力的.

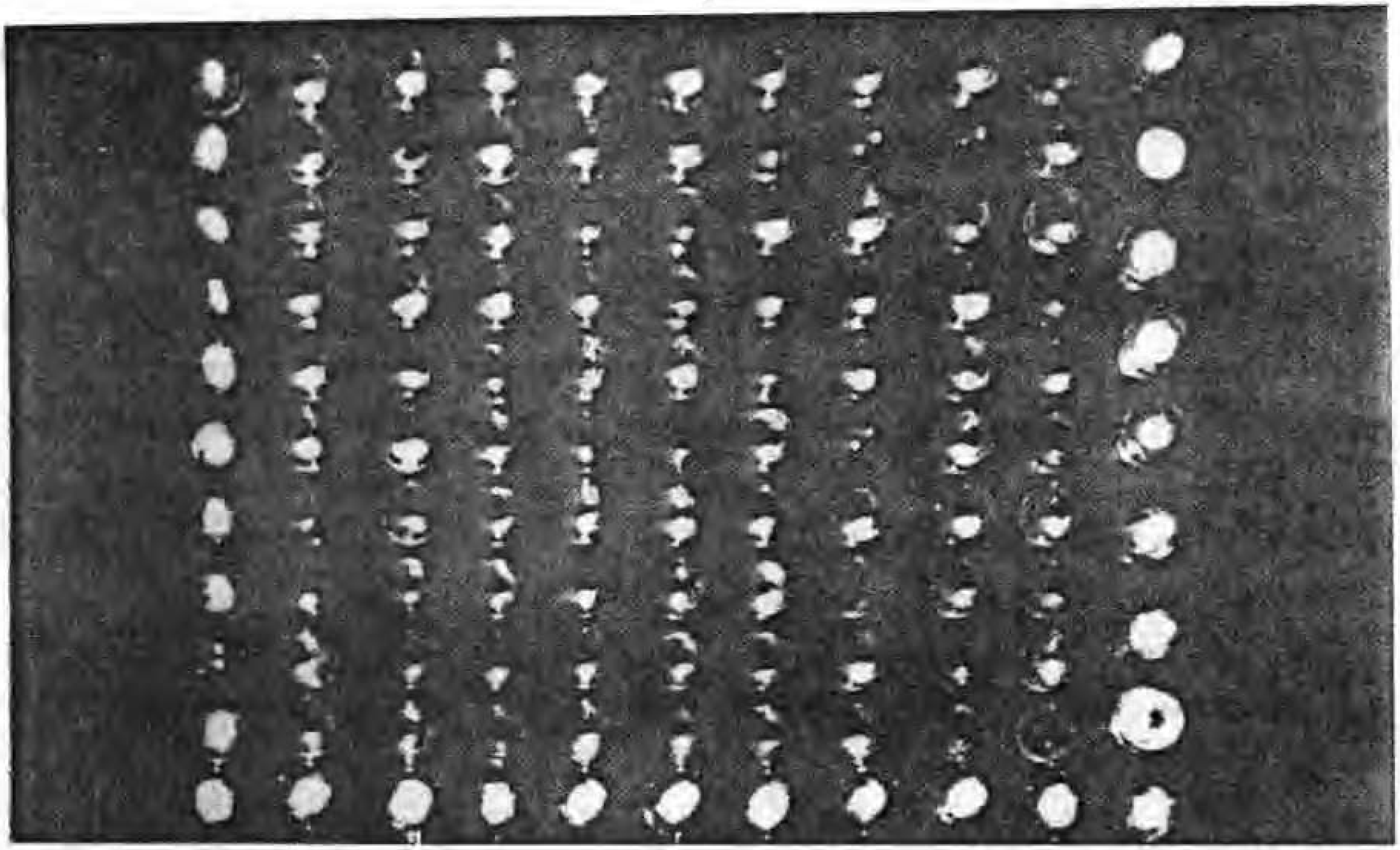
有一个办法来使由电子管组成的存储器更紧凑. 在纽约的 IBM 选择序列电子计算器是其一例. 这台机器处理 14 位数. 按 ENIAC 的原理每个数要用 140 个双电子管. 这台机器用了 56 个就成了.（在 ENIAC 和 IBM 机器中都还有许多辅助的电子管来控制回路，不过这些本文中都略去了.）这是用将十进制改变为一个所谓的“二进十进制”这样一个“混合”数制种来完成的.

从 0 到 9 的任何一个数都能够只用四个电子管来表示，设每个管子因它在自己这一组中的位置而相配一个数，并且设在同一时刻这一组中可以有一个以上的管子“开”着. 这些数值选取为 1，2，4 和 8. 于是

1 用 1 号管为开来表示.

2 用 2 号管为开来表示.

3 用 1 号和 2 号管均为开来表示.



电子管是 ENIAC 累加器的计算单位. 板上每个灯表示一个电子管. 共有 10 列每列 10 个管子. 右边和底下的亮着的灯都是辅助的.

4 用 4 号管为开来表示.

5 用 4 号和 1 号管均为开来表示.

6 用 4 号和 2 号管均为开来表示.

7 用 4 号, 2 号和 1 号管均为开来表示.

8 用 8 号管为开来表示.

9 用 8 号和 1 号管均为开来表示.

0 用所有管关闭来表示.

这个二进十进数位系统不仅应用于电子管，而且也应用于继电器库和穿孔纸带卷，以提供数字和指令的大规模存贮. 在与外部世界的输入和输出联络中，这台机器有一个自动装置用以在十进制与二进制之间进行翻译.

在许多情形有很好的理由坚持十进制，至少涉及机器的外部关系时. 一个非常实际的理由是：IBM 计算器和 ENIAC 在建造时，都需由穿了孔的标准的 IBM 卡来接受问题. IBM 的最新的

计算器,即前面说到的 604 型,应用了二进十进制,每个数位四个管子,与标准的穿孔卡片相联接,完全可按每秒 100 个的速度读和处理.

只要机器必须处理大量的"外界"的数值材料,十进制也是需要的. 这样就能把它继续用于任何"商业"型机器来处理会计问题,盘存清单,计算税收,或者用于任何"科学"型机器来处理统计材料. 最先进的设计之一的 UNIVAC 是伊克尔特毛赫利计算机公司为人口调查局建造的,也将在十进制下运行.

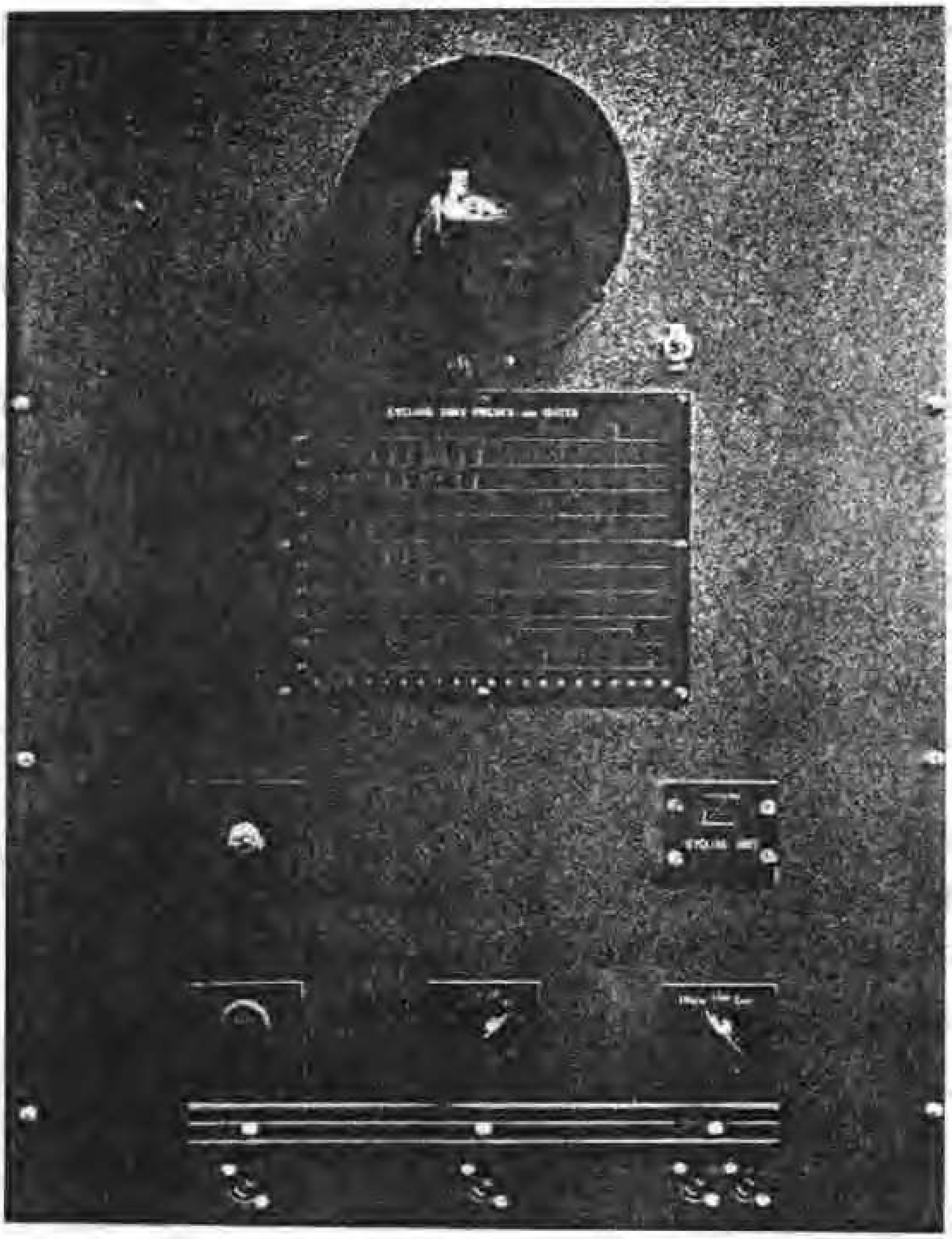
另一方面,伊克尔特毛赫利集团得到订单建造处理工程问题的计算机,首要目的是解方程,它被设计为二进制,因此得名为 BINAC——二进制自动计算机(binary automatic computer). 在普林斯顿为高等研究所建造的计算器,用于数学物理中的理论分析问题,气象预报和自然界的其他问题,也将在纯粹的二进制之下工作.

二进制数

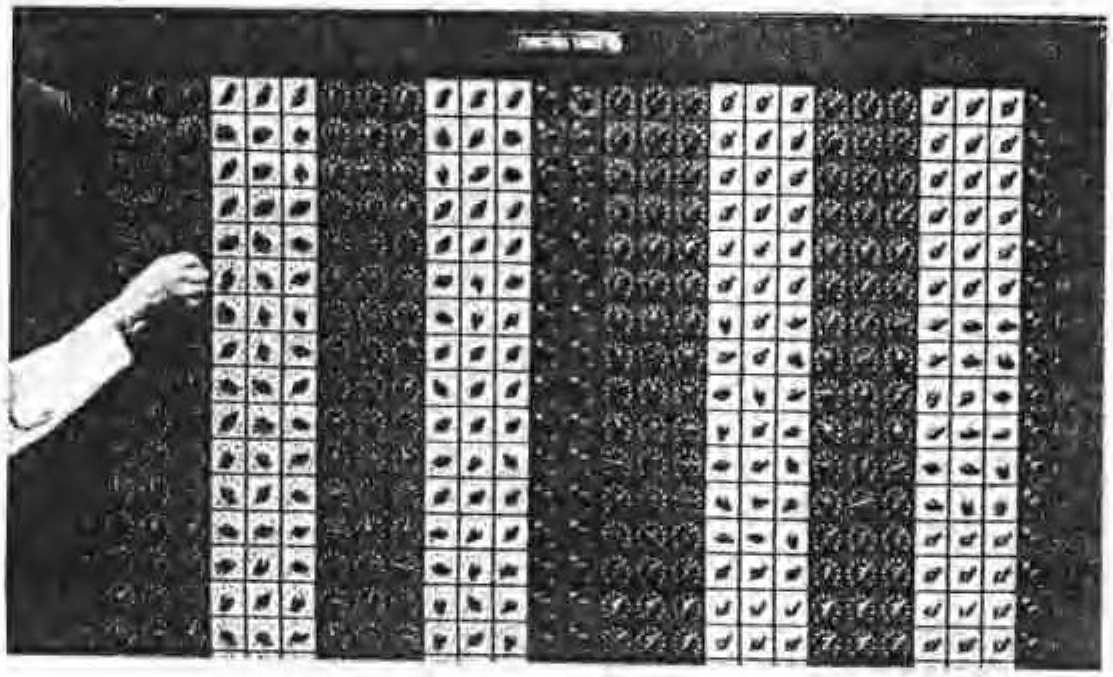
二进制数允许以百分之一百的效能应用"开关"型的存储. 只要我们没有特别的理由与十进制记号妥协,我们可以用我们的电子管表示 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,每一步加倍,一直做下去,只要我们愿意. 任何中间的数都总可以用管子的适当组合配置而得.

在这一点上我们发现我们根本不需要用十进制记号. 有另外一个记号更好地为这个目的服务. 数的二进制系统实际上只要求两个符号,通常记作 0 和 1. 我们先用它来与上面所列的双倍数作比较:

十进制记号	二进制记号
0	0
1	1
2	10
4	100
8	1 000
16	10 000
32	100 000
64	1 000 000
128	10 000 000
256	100 000 000



编码脉冲由循环部件馈入 ENIAC 机器. 脉冲的特征可以在上端的阴极射线管的表面上观察到. 管子上显示了一个四峰信号. 编码键位于中央.



函数表用作ENIAC的一个辅助装置. 可以把相互联系变量的数值设置在表上, 并在所处理的问题的适当的点把它们馈入机器.

一眼就可以看出一个明显的结论. 将一个数乘以 2 正好相当于增加一个零,或者在机器上往左边移一列. 因此乘法和加法一样容易.

现在我们来看其他的数是如何的. 我们只列出前面几个:

十进制	二进制
3	11
5	101
6	110
7	111
9	1 001

因此显然每个数可以表作两个记号 1 和 0 的某个组合. 1 或 0 的出现形成一个二进制的位. 二进制的位这个词组简化为一个新词"比特(bit)",这是一个相当简洁的用法,因为"bit"这个英文字就是一小片:一小片信息(a bit of imformation). 在二进制中我们需要 10 比特来表示十进制的一千,20 比特来表示一百万,30 比特来表示 10 亿,以及近似于 33 比特来表示一个 ENIAC 累加器的数 100 亿. 需要一个管子来表示一个比特. 因此 33 个管子完成的工作在 ENIAC 中需要 100 个而在二进十进制需要 40 个.

此外,二进制记号由于它是这种两择一的简单对比之上建立起来的,而最终则基于可换性和容易迁移,因此就繁荣起来了. 在上面的解释中用到的 1 和 0 可以不用任何编码而物理地翻译为各种类型的互换作用,空间的,电气的,磁性的,等等均可. 例如,1 可以表示为一个脉冲,而 0 可以表示为没有脉冲;1 可以表示为磁北极,而 0 可以表示为磁南极,等等.

任何这类表示都可以采用,只要它是相容的和互换的. 比如当一个磁化的带子通过一个线圈,出现或者不出现一个磁化点转化为出现或者不出现一个电信号,它可以进入一个电子管中. 如果有一个信号(表示 1),则该管子便从 0 位置转为 1 或者从 1 转为 0. 二进制系统的优美在于加一个数永远表示"存储"中条件简单地翻一个个——若原来是没有脉冲,则添上一个脉冲;或原来是 1 则抹掉它(1 变为 0).

逻辑和控制

下一步是看到二进制不仅可用于数,还可用于逻辑. 我们能够把 1 和 0 换成"是"和"非". 因此,例如一台二进制机器可以适用于讨论双重的否定,使"非""非"相乘为"是". 真空管可以很好地用来执行逻辑概念"与","或"以及"非". 为说明"与"的想法,可以设想一个四元素管有两个栅

极，它们作为"门"控制着从栅极到板极的电流. 若两者平常都带有一个很强的负电压，电流仅当两者都被一个进入的信号转变为正电压后电流才能流过. 每个栅极都进入了信号是电流从这个管子流出的一个"必要"条件；只有任何一个有了信号都不"充分". 在另一方面，可以这样安排外电路，使得两个信号只要有了一个就让管子导通；这个安排实现了"或"的想法，因为只要一个源或者另一个源便充分了.

这种电子门是高速计算器的交通和控制系统的心脏. 每一个门都有一两个或更多的锁，要求某些条件同时满足时它们才允许机器进入下一步骤.

电子管的速度是新计算器的速度的关键. 我们已经看到，可以三种方式来用电子管：第一，作为存储装置它能接受并保存数；第二，作为一个运算器；第三，作为一个门按照信号指令来控制电流通向机器的不同的部分. 真空管在可能的计算器的制造中还有第四个重要功能；在某种程度上像在无线电和电视中那样，它们被用来将那些已经失去锐度和强度的用旧了的信号放大，使之重新成形而与新的一样的好.

在四种功能中，效率最差的是本文开始时讲的存储功能. 这是因为为了存储一定量的数，无论用 10 个管子表示一个十进数位，或者用四个管子表示一个十进数位，或者用一个管子表示一个二进数位. 都要用到很长一段墙. 所以对于真正大规模的计算而言，机器需要一个比用电子管能达到的更为紧凑的和更大容量的存储器.

一个办法是让机器将部分答案打印出来然后又能在需要时反馈回去或馈入另一机器中. IBM 选择序列计算器适当地应用了这个方法. 当这台机器计算某个数学函数时，所得结果的数值表编码为洞打在一个厚纸卷上. 有点像老式的自动弹侗琴的厚纸卷. 这些厚纸卷再用一些圆柱和一些滑轮安排装配起来. 当这台机器以后要查阅这个表时，它就让这个卷起来的纸穿过它移动，以便"探查"一下适当的常数直到找到那合适的值. 使用类似的原理，这些机器能够有一个实际上无限大的使用穿孔卡的存储容量，但是这个办法的速度受到机器读卡的慢速度的限制，每分钟只能读 100 张卡片.

为获得存储的较高的紧密性和速度，设计师们已经放弃穿孔纸带而转向采用另外的办法. 其中有磁带，照相胶卷，带电荷的阴极射线管表面以及最引人注目的汞存储器，在其中数被存贮为以声速传播的动态形式的波中.

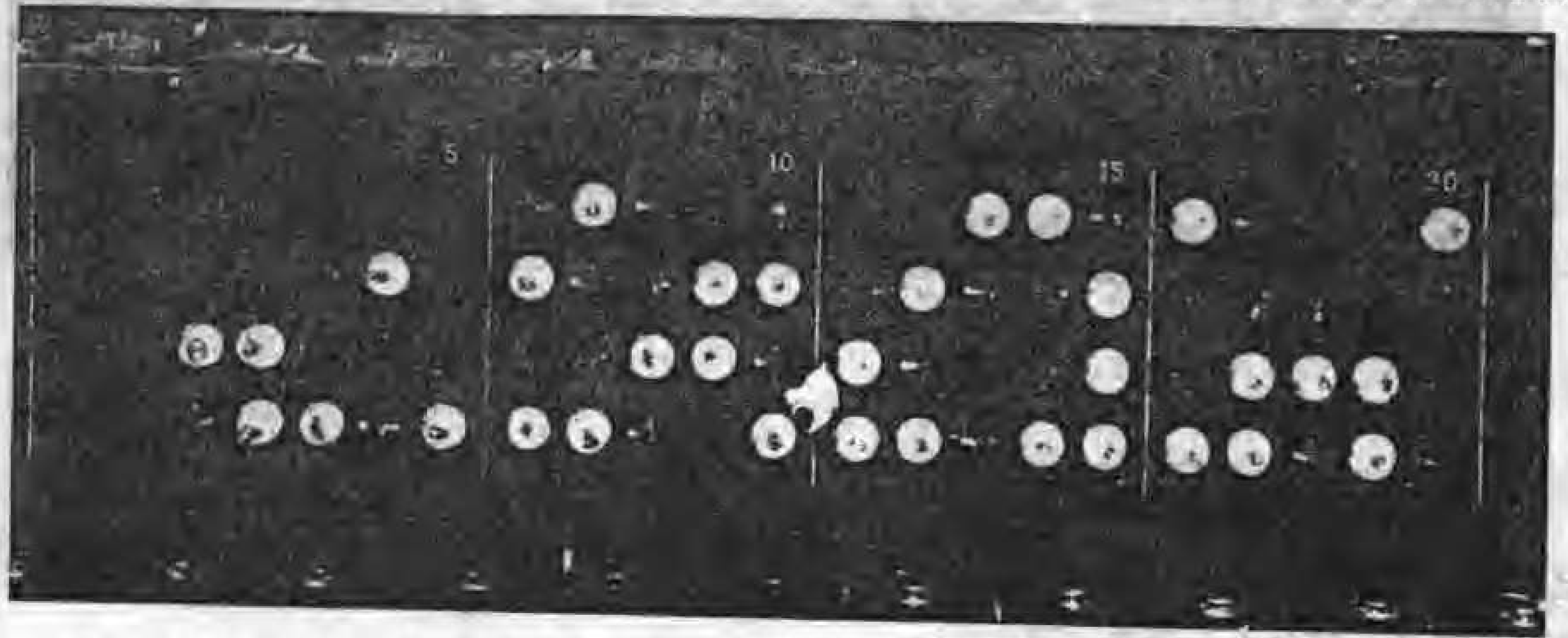
类似于现在用来记录无线电节目和口授机的声波的磁带，广泛用于目前正在建造的机器：EDVAC 和 UNIVAC 都将充分地应用它. 它的优点是紧凑：一段一英寸长八毫米宽磁带能够有 800 个不同的磁化点，可携带的信息同一整张 IBM 卡一样. 此外，正如磁带设备使用者所知，磁化可以高速度操作，可以同样快地读出，并且可以比黑板容易得多地抹去.

另一个正在试验的方法是用静电来存贮. 其原理始于阴极射线管，它形成雷达和电视的可视荧屏. 存储器可利用这种能显示图画的管子来贮存电荷模式. 这个想法是很诱人的，因为"读出"存储的数可以只用一个电子束来非常迅速地完成. 美国无线电公司(RCA)的工程师们已经为这个目的制造了一个管子称为选数管，配有一个装入的线路网来控制这个区域使电荷得以存入，并且这就是为在高等研究所建造的计算机而试验的元件之一. 在曼彻斯特大学的一台新的英国计算机用了一个正规的电视管，在其表面用点表示零而用破折号表示一. 美国标准局计划应用同样的装置.

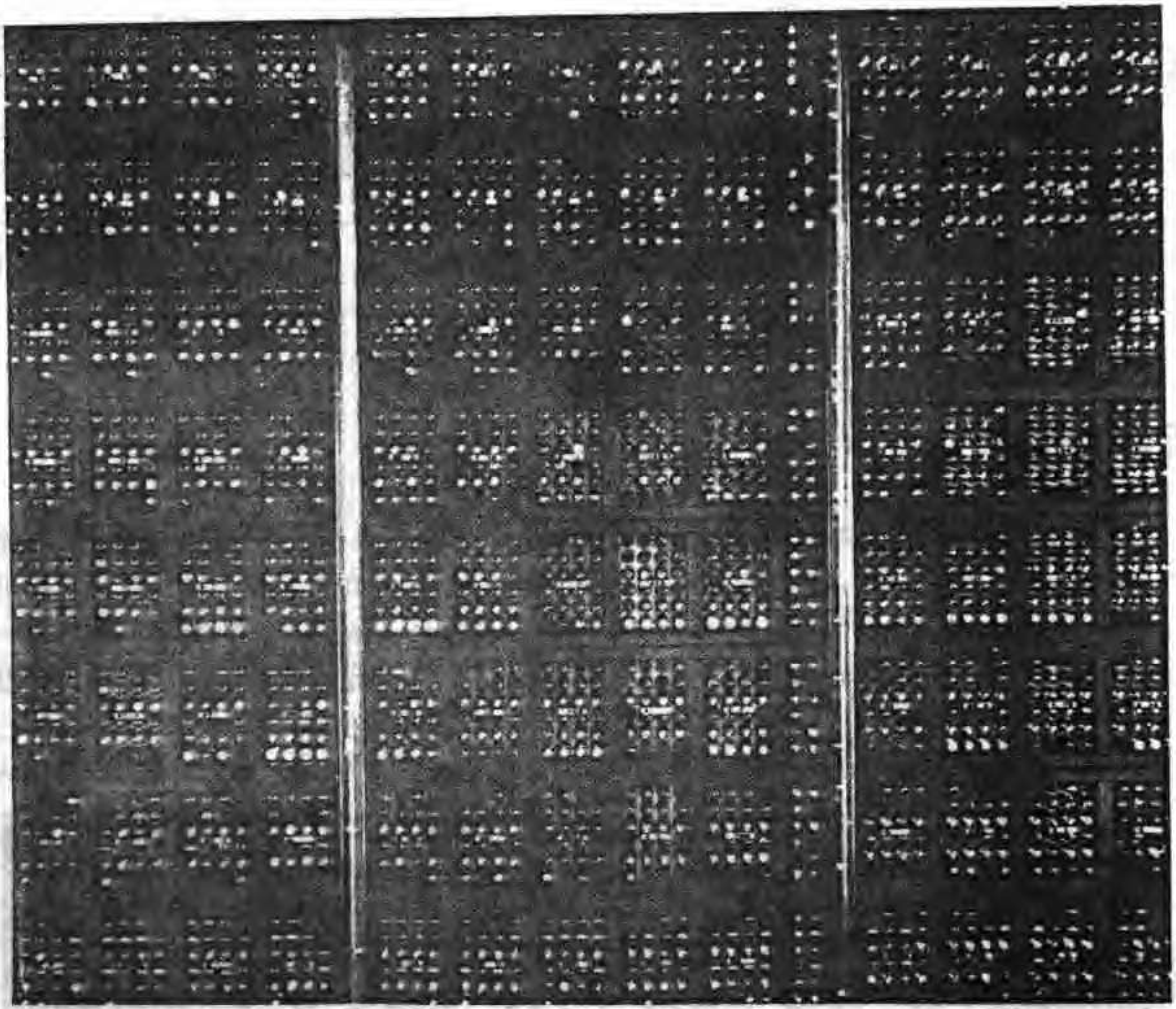
但是真正能代表现代计算机速度的趋势是通过使用汞列来达到运动贮存.

汞中的脉冲

汞存储出现于战时的雷达. 雷达的一个技术困难是这样一个事实：不能把一架敌机与固体背景很好地区别开来. 敌机可以用躲在一座山前面的办法，同躲在山后面一样从雷达眼睛里消失. 工程师们研究后得知，如果他们能够找到某种自动的办法，消除固定的回声而只显示从一个活动对象那里接收到的回声，就可以绕过这个困难了. 在战争快结束时最终用一个称为延迟线的装置实现了. 其想法是，使一个回声信号在装置中走得慢一点，使得当下一个回声到达时它可能有千分之一秒的滞后，而与下一个回声相遇. 如果两者配合适当，它们将互相抵消. 因此从固



IBM 的选择序列计算器的指示灯描述二进十进计算系统. 每列的四个灯表示 1,2,4,8. 这些可以加起来表示从 0 到 9 的任何数. 左列表示加或减. 19 个其他列的每一个是一个数位. 这个数是 +3.141 592 653 589 793 238，也就是 π.



选择序列计算器的电子存储器是一个阵列的电子管．每个插件板含有24个管子表示一个数位．24个管子中的4个用上面概述的系统指示一个数．余下的管子控制信号在计算器中通行的道路．还有十二个插件板是辅助控制单元．

定的地形反射的回声不会显示．而如果回声来自另外的地方，比如来自一架移动着的飞机，这两个回声都将显现在示波器的表面．

推迟一个信号的最好办法之一是一条"声学"线，信号在它里面会在液体汞中产生一个波纹，并以声速在汞中传播，这个信号在最远的那一端离开时，与它进入时相差了一个适当时间间隔．延迟的确切时间能够用改变汞的温度或者走过的道路的长度来调整．例如，摄氏65度时波

纹在汞中传播速度为每秒一英里. 在电子世界里,大多数事件以接近每秒 186 000 英里的光速而发生,与之相比,声速算是慢的.

在目前正由伊克尔特茅赫利完成的 BINAC 中,一个 18 英寸长的温度保持为摄氏 65 度的汞列,提供了 336 微秒的滞后. 因为在这台机器中的前后相继的脉冲间隔仅为四分之一微秒,这个滞后表示在任意给定的时刻这个 18 英寸长的汞列可贮存四倍的 336 或者 1 344 个二进制数位. 为实施管理之方便,把它们分成 32 个"字",每个字包含着 30 个二进制数位,一个脉冲空间用于加或减号,还有 11 个多余的不用的空间(或时间间隔)用来分隔前后相继的字.

汞管是这样一种"脑子",其中信息假设是从一个耳朵进,从另一个耳朵出. 一个电子信号到达延迟线引起一个石英晶体按照熟知的压电效应而膨胀. 这个晶体推动汞,产生一个波纹以比眼睛所能跟得上要快的速度跑过去. 在 1/3 000 秒以后它到达最远端,压迫另一晶体而产生一个新的电脉冲,经过一个放大器中再反馈到前端. 这个循环每秒反复3 000 次. 因此,数位一圈一圈地转,如果没有东西干涉便将永远这样下去. 不过,在需要的时刻,在放大器中开启一个电子门而发出信号到某另一个回路,例如电子加法器. 也可以把信号抹去,只要指令放大器当信号走过来时不去放大就行.

在写本文时最为普遍的计算机系统都是以汞波纹为基础,加上电子计算回路,用录音钢丝或磁带作为中间的和可抹去的存储,再用穿孔卡片和纸带作为更为永久的存储和积累的答案库,最后自动打印机以显示答案.

将来的应用

就实用而言,所有这些对于今天和明天意味着什么? 会影响商业,政府,军事,科学,以及数学本身到何种程度?

大力推广是很诱人的. 政府的各个部门都在努力争取尽先得到这种机器. 作者要感谢标准局的电子计算机科主任阿历山大(Samuel N. Alexander),他对于实际的前景作出了颇为冷静的评价.

首先,有相当多的代人公式的数字工作. 一个重要例子是从 1950 年人口调查的数据中提取更多的结果的任务,此外还有地图的校正. 许多国家可能精确地绘在地图上,但是两个相邻的国家似乎都在公共边界上有几英尺的差异;其校正需要大量的分别计算,陆军地图局和海岸与大地测量局两者都需要电子计算机的帮助.

其次,目前的精细的工程计算耗用着大量的人力,例如一满屋子人花费一年半以上的计算

来检查应力的估计以便从飞机的模型设计变为全尺寸飞机.这一类的事情,及水力学中的许多问题,超音速飞机的特性等等,今后都可以转移到计算机上.二战中使用的美国轰炸机没有一架不是在战前就开始设计的,其部分原因就是普通计算机速度的缓慢.使用新的计算机大大弥补这个滞后.

第三,许多应用必须做"程序处理".什么是最好的办法来合适地分配人力,基金,设备,从而获得最大的特定效果或者最小的成本?例如,军队需要安排出不同的菜谱以满足士兵需要的热量,维生素和矿物质.但是每一食品项目有不同质地,如易腐性,体积和价格.如何以最小的成本,最小的船运重量,或者最小的递送时间满足饮食的需要?通常,估计每种可能的组合的好处,数学工作量是太大了,以至仅有很少的几种组合被彻底地研究过.

第四,因为数学计算机本质上是逻辑机,它能够做出快速的决策,而现在只有靠头脑清醒和处于很大压力下的人来做.空运发展局正在考虑计算机应用于空港控制塔以使交通控制人员从许多基本的定型的决策中解脱出来.国家军事建设研究发展委员会成立了一个委员会考虑如何装备电子计算机来演练战争对局.

在目前世界形势下军事应用仍然是考虑计算机的应用时最为重要的.上次战争毫无疑问地刺激着这些机器的发展,而担心再次发生战争仍然是一大推动力.似乎电子计算机配合着雷达,将成为抵抗高速轰炸机,跟踪轰炸机并且在对抗的情况下制导反飞机导弹的主要防御武器.并且未来的远程攻击型导弹将很可能用无线电发回它们能够得到的位置信息,并且在基地的计算机中处理后,得出的解答再由无线电传给导弹进一步飞行的指示.

如果战争的阴云消散,清新的气氛会显示出电脑对科学进步以及商业和政府两方面的效能的贡献.它们甚至可能提供一个技术方法以帮助世界各国政府注重实际而对世界和平做出贡献.影响大公司和大的政府机构的"机构臃肿病"在很大程度上是由于很难使一小批人了解在一个很大的企业中正在做什么.订计划的麻烦在于计划者们不知道与他们的计划有关的所有事实;他们没有足够的时间和能力想像出这一个或另一个行动过程将会导出的所有后果.这种考虑已经带来了一种感觉,对于一个单独的无论是商业的还是政府的行政管理部门,应当有一个最优的规模,超过了它,操作起来就会比一个较小而更为统一的单位要笨重得多.电子计算机或者信息处理系统可以很好地将更高层的机构更优化.

虽然数学机器取代了其他类型的人类心智的劳力,但它们不会取代数学家.会需要更多的数学家,但是他们的工作的性质将会改变.如理论物理学家可以造出越来越一般的方程,用越来越少的符号来表示宇宙的各种基本的力,他们的抽象思考可以更远离实验和日常生活的数据.甚至爱因斯坦都不能摆脱这个困难.他处理统一场论的方法可能正确也可能错误,爱因斯坦自

己也不知道，他想得到的理论是一个推广，而相对论只是其一部分. 有一回他告诉作者，麻烦是“为了把一般理论翻译成能够用实验来检验的特例，需要可能好几代最聪明的头脑的巨大的劳动”. 可能新的像在高等研究所爱因斯坦的同事们正在建造的那一台计算机将有助于减轻这个劳动，并因此使宇宙奥秘的研究者，能检验他们自己的理论，以决定他们走的道路是否正确.

44.

计算机

斯坦尼斯洛·M·乌拉姆(Stanislaw M. Ulam),1964 年 9 月号

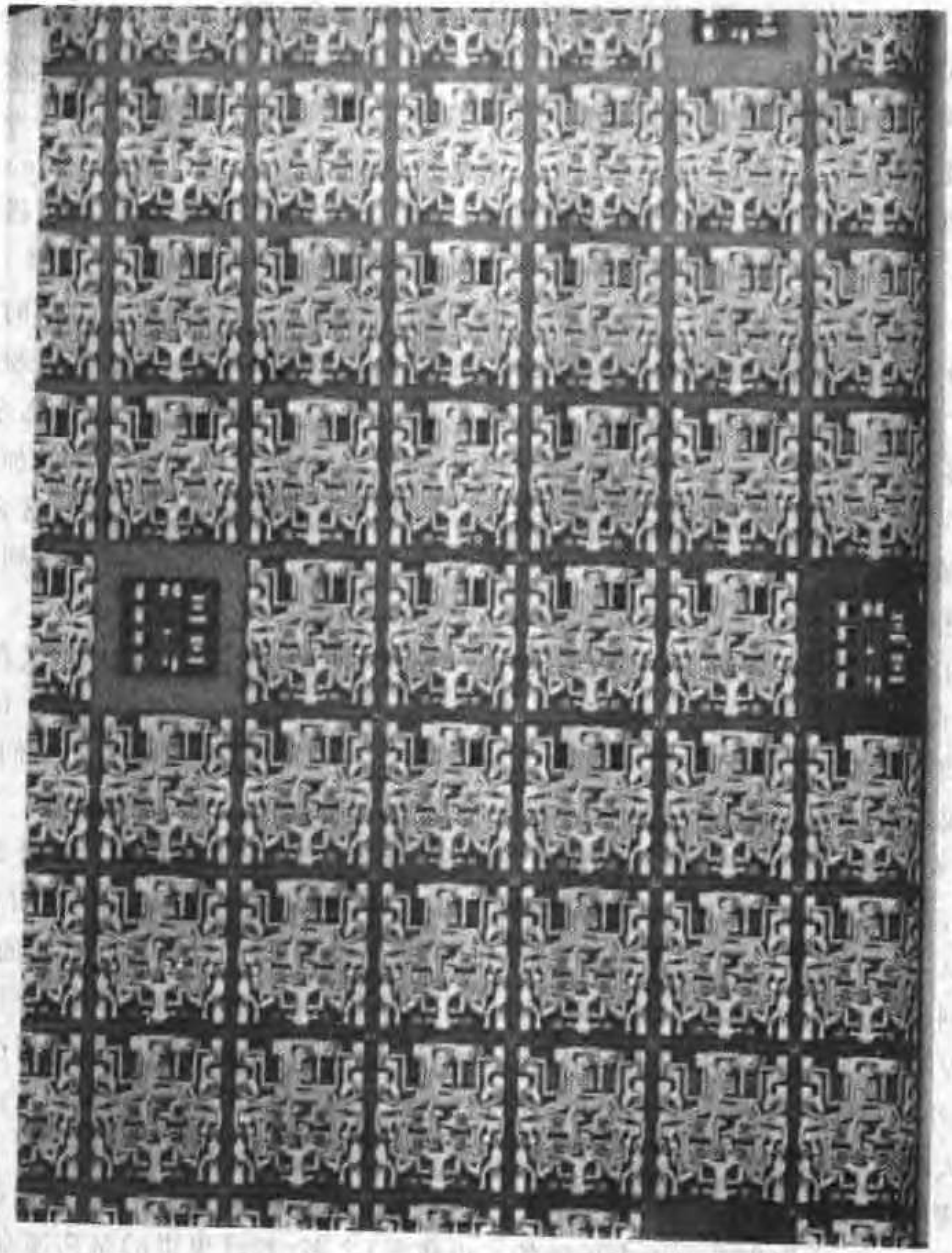
虽然对于许多人讲来电子计算机是数学在现代世界中重要性的象征,却很少有职业数学家对它十分熟悉.事实上还有一些人担心个人的科学探索会被推到后台,或被较少想像力的纯粹机械的习惯的研究所取代.我相信,这种担心是没有根据的.把计算机看成对符号进行操作和显示的方便的装置更好一些.甚至最爱抽象的思想家也会同意,把几个符号写在纸上这么简单的事,也有助于把它们集中浓缩起来.仅就这一方面——这可不是微不足道的方面——而言,新的电子机器就扩大了我们有效的记忆,并且对于用符号来作实验的手段提供了一种了不起的增补.在本文中我将指出计算机怎么能帮助数学研究.

用机械的或半自动的手段来作算术运算,这个想法已经很古老了.算盘的起源已不可考,古希腊人显然造出过某种计算机.帕斯卡(Blaise Pascal)在 17 世纪就造出过一种做算术运算的工作装置.数理逻辑的创始者之一,无穷小分析的共同发明者莱布尼兹,就曾对我们今天说的思维自动化提出过一个纲要.清楚地想出一个通用计算机,而且具有可变的编程方式和储存单元的,是英国人巴贝奇(Charles Babbage).他在 1833 年描述了一种机器,他称之为分析机,并终其一生耗费了自己大量财富去制造它*.

现代计算机技术作主要贡献人中有一位电机工程师艾克特(J. Presper Eckert, Jr.),一位物理学家毛利(John W. Mauchly)以及本世纪领头的数学家之一冯·诺依曼(John von Neumann). 1944

---

* 译注:见本书第二部分第 8 章“巴贝奇奇特的一生”一文.



计算机线路几乎变成微观的了. 虽然西屋公司的二进制集成电路(图中的小方块)比针尖还小,它却包含了6个晶体管,12个二极管,11个电阻和两个电容. 这种小元件目前主要是为了军事和空间应用. 一个半美元硬币大小的硅圆片上可以一次做出100多个这种元件. 图上四个与其余部分不相配的图案是在制造过程中用来校准和检验的. 在商用计算机上,比之当前常用的较大的线路,它可望能以更低的价格提供更高的速度和可靠性.

年艾克特和毛利全力关注于发展一种称为 ENIAC 的机器，ENIAC 是 Electronic Numerical Integrator and Computer（电子数值积分与计算器）的缩写. 它是为陆军军械部计算火力表设计的，到 1945 下半年 ENIAC 完工. 它的接线是为了完成特定的一系列计算；如果要作另一系列计算，就需要大量重新接线. 冯·诺依曼在 1944 年夏访问阿伯丁火炮试验场（Aberdeen Proving Ground）时，听说了 ENIAC 计划，为其思想所吸引，就着手发展一种计算机的逻辑设计，这个计算机能使用事先储存的可改变的程序；即不必改动计算机线路就能随意改变程序.

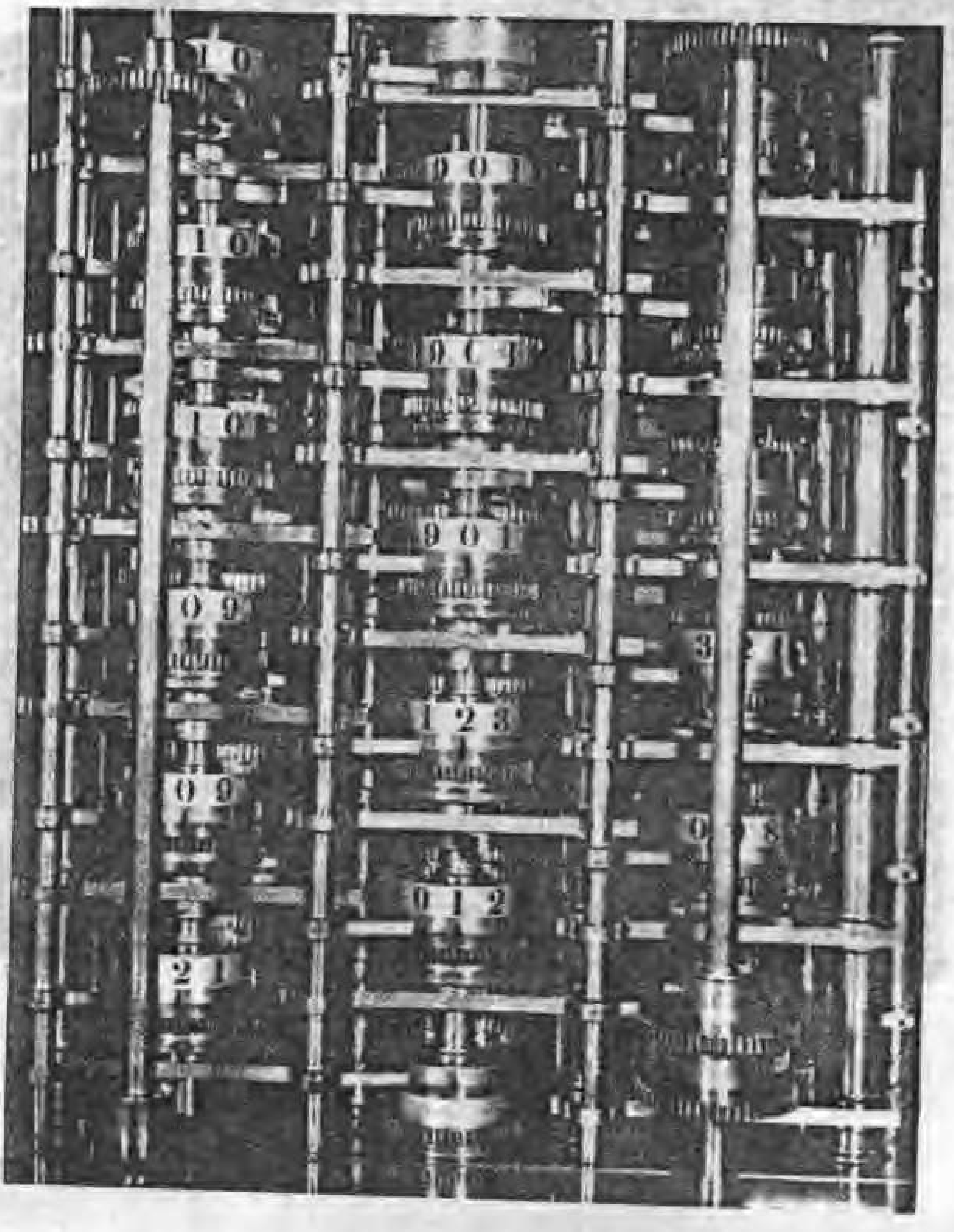
激起冯·诺依曼热情主要是他作为洛斯阿拉莫斯（Los Alamos）理论组顾问时面临的任务，这个组的任务是解决与原子弹计划有关的计算问题. 有一次在讨论一个这类问题以后，冯·诺依曼对我说："说不定这一次我们要作的基本的算术运算的总步数要比全人类迄今所做过的全部计算还要多."我对他说，全世界有成百万小学生，他们在几年时间中必得做的加法、乘法和除法的总量，肯定会超过我们的问题之所需. 不幸的是我们无法控制人的才能的这么巨大的储备为我们所用. 在 1944 年我们也没有电子计算机可用. 原子弹的计算必须要化简到这样的程度，使得这些问题能用纸和笔，再借助于老式的台式计算机来解决.

在我现时在洛斯阿拉莫斯科学实验室的办公室里，往下就可以看见大厅里有一个计算机 MANIAC Ⅱ（数学分析数值积分与计算机，Mathematical Analyzer, Numerical Integrator and Computer 的缩写），它是 MANIAC Ⅰ的改进型，后者是冯·诺依曼和他的助手们 1952 年在高等研究所完成的. MANIAC Ⅱ则在 1957 年投入运行，它能把两个 13 位十进数（二进位则为 43 位）的加法在 6 微秒（百万分之 6 秒）内完成. 在附近一幢单独的房子里还有一台更新的计算机 STRETCH，它是 IBM 制造的，它能处理二进位 48 位数，总的速度是 MANIAC Ⅱ的十倍.

MANIAC Ⅱ和 STRETCH 是过去二十年世界各地的几十台定制的计算机的例子. 第一个大型的商业制造的计算机 UNIVAC Ⅰ于 1951 年交付人口普查局使用；三年以后，通用电气公司成了 UNIVAC Ⅰ的第一个工业用户. 从第一台 UNIVAC 以来的 13 年中，有超过 16 000 台制造厂不同，大小不同的计算机由美国政府，工业企业和大学投入使用. 其中 250 台最大型的，速度和能力都大体能与 MANIAC Ⅱ相比.

与运算速度增加同时，存储量和存取储存的数与指令的速度也增加了. 最大的电子机器的存储量已达 100 000"字"（即几百万个单独的二进数字）之多. 我这里讲的是高速存储，其存取时间已短到 1 微秒. 这个时间还在稳步减少；速度再增加 100 倍在不远的将来也是可能的. "低速"存储，用作高速存储的附属品，通常将数字存在磁带上，其容量几乎是无限的. 存储装置与基本的电子线路的大小一直在不断减少，到现在甚至最复杂的计算机也能装在一个小房间里. 下一代计算机，使用微电子线路将要小 100 倍到 1 000 倍.

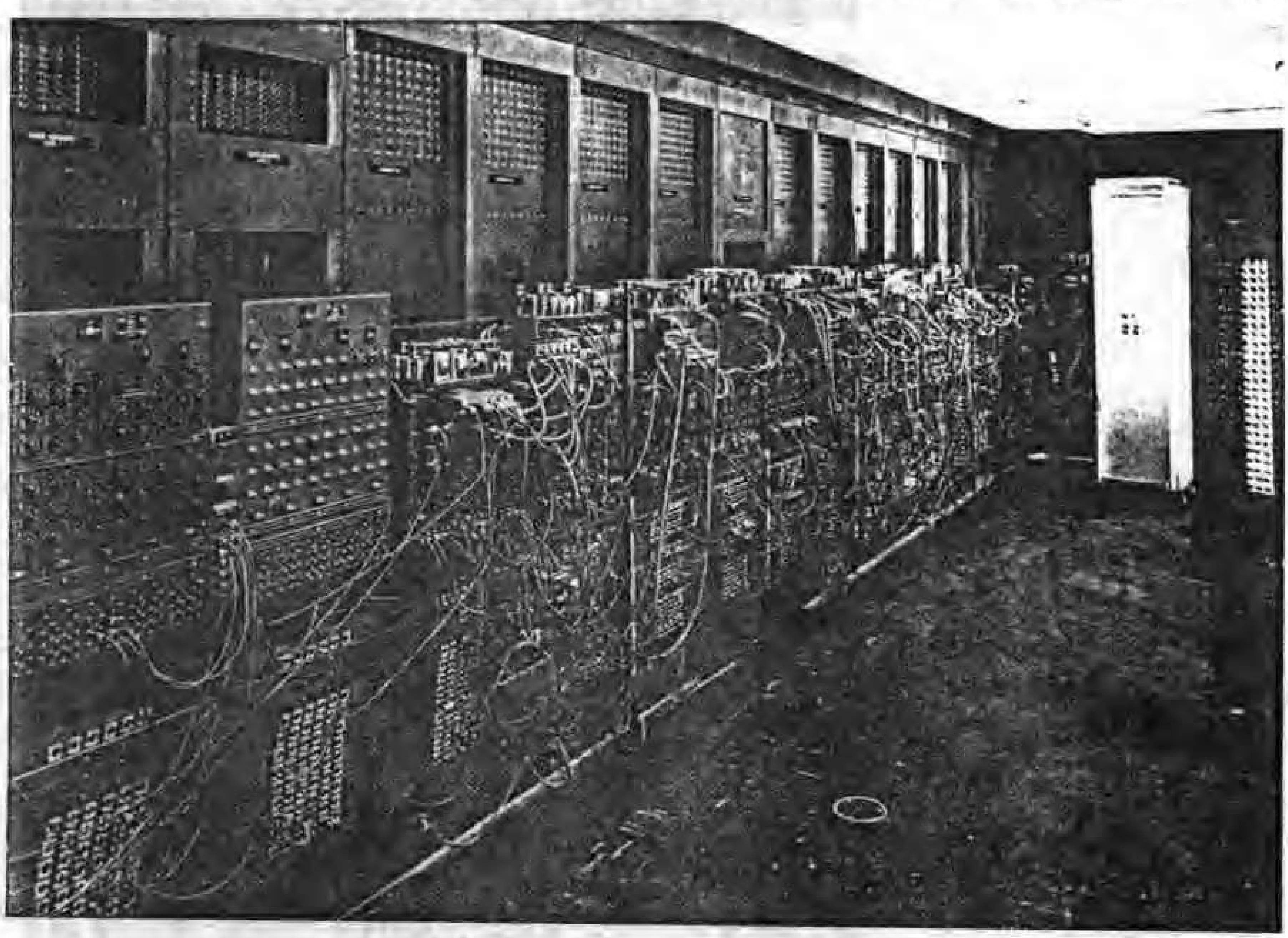
第一个机械计算机大概就是这个加法机了，它是法国哲学家和数学家帕斯卡于 1642 年设计的. 当有指针的轮子转动时，机器就能作加法. 里面的齿轮能自动地把数由一个轮子"进位"到下一个轮子. 用塑料做的类似的但比较简单的装置卖得很多.



"差分机"，第一个现代数学机器时常这样称呼，它是由英国数学家巴贝奇于 1820 年想出来的. 他造了一个小号的，而他设想的一个大机器一直没有完成. 它的一部分，例如图上这个单元，现在在南肯星顿科学博物馆里. 巴贝奇花了许多年去创造一个分析机，没有成功，这个分析机几乎会做现代计算机做的一切事.

很显然，许多问题如此困难，将要耗尽我们能想像到的，在下一个十年中能造出的任何机器的容量. 例如可压缩流体的流体动力学，如果研究的问题限于二维的，则用现有的机器，已能很好地进行研究，但是不能很满意地进行三维的研究. 在二维研究中可以想像流体约束在一个"箱子"中，"箱子"又可分为 10 000 个单元；单元用两个坐标表示，每个坐标则分成 100 份. 每个单元中存储了几个值，如密度和速度，而对相继选取的每个时间单元要求算出新值. 很显然，如果简单地把同一问题扩充到包括第三维，就要为一百万个单元提供存储，这超出了目前机器的容量. 有一项研究工作即天气预报，就这样受到限制，对于它，使用多单元的三维大气模型更好.

有时，当问题太大而不能用计算机解出其全部细节，可以用"蒙特卡罗"方法得出一族有代



第一台电子数值计算机，即电子数值积分与计算器(ENIAC)是在宾夕法尼亚大学为陆军军械部造的. 它完成于 1945 年秋，有 19 000 个电子管、1 500 个继电器以及几十万个电阻、电容和电感. 它几乎要消耗 200 千瓦电力. 在运行的前几年，总是为电子、电子管故障和其他困难所困. 要想改变程序就要改接成千线路. 在不断改进后，ENIAC 一直在阿伯丁的弹道研究中心使用到 1955 年.

表性的特殊解. 多年前我恰好想过怎样计算一种单人纸牌的一切局中有百分之多少可以满意地玩到最后一张牌. 当我得不到一个一般解法时,我突然想到这个问题可以用助探法考查一下,即是说这种考查至少能给出解法的思路. 这就需要实际地玩上 100 或 200 局,并且记录其结果. 这是计算机理想的工作,它就是蒙特卡罗方法的来源.

这个方法通常用于数学物理的问题,诸如由核反应堆的设计提出的问题. 在反应堆中会释放中子,中子会以不同的概率碰撞,散射,增殖,并吸收或逃逸. 这些概率视几何形状,燃料元素和其他成分的构成而定. 在复杂的几何形状中,无法直接算出一定能量范围,一定方向和速度的中子数. 反之,只好求助于采样程序,用计算机追踪各个粒子数量很大的可能的历史. 计算机并不考虑可能发生于一个粒子的一切可能的情况,因为可能发生的事会成为一个分支极为复杂的树,而只是在每一个分支点选取一个有适当概率(物理学家知道这些概率)的可能后果,并且考查一大类这种可能的事件链条. 收集了许多关于这种链条的统计数字以后,就可以对这个系统的性态有一个概念了. 链条的类可能必须取得相当大,但比之于一切可能的分支情况这样大得多的类,它还是小的. 对于许多很不相同的问题都应用了这种采样程序,而没有计算机这是不可能的.

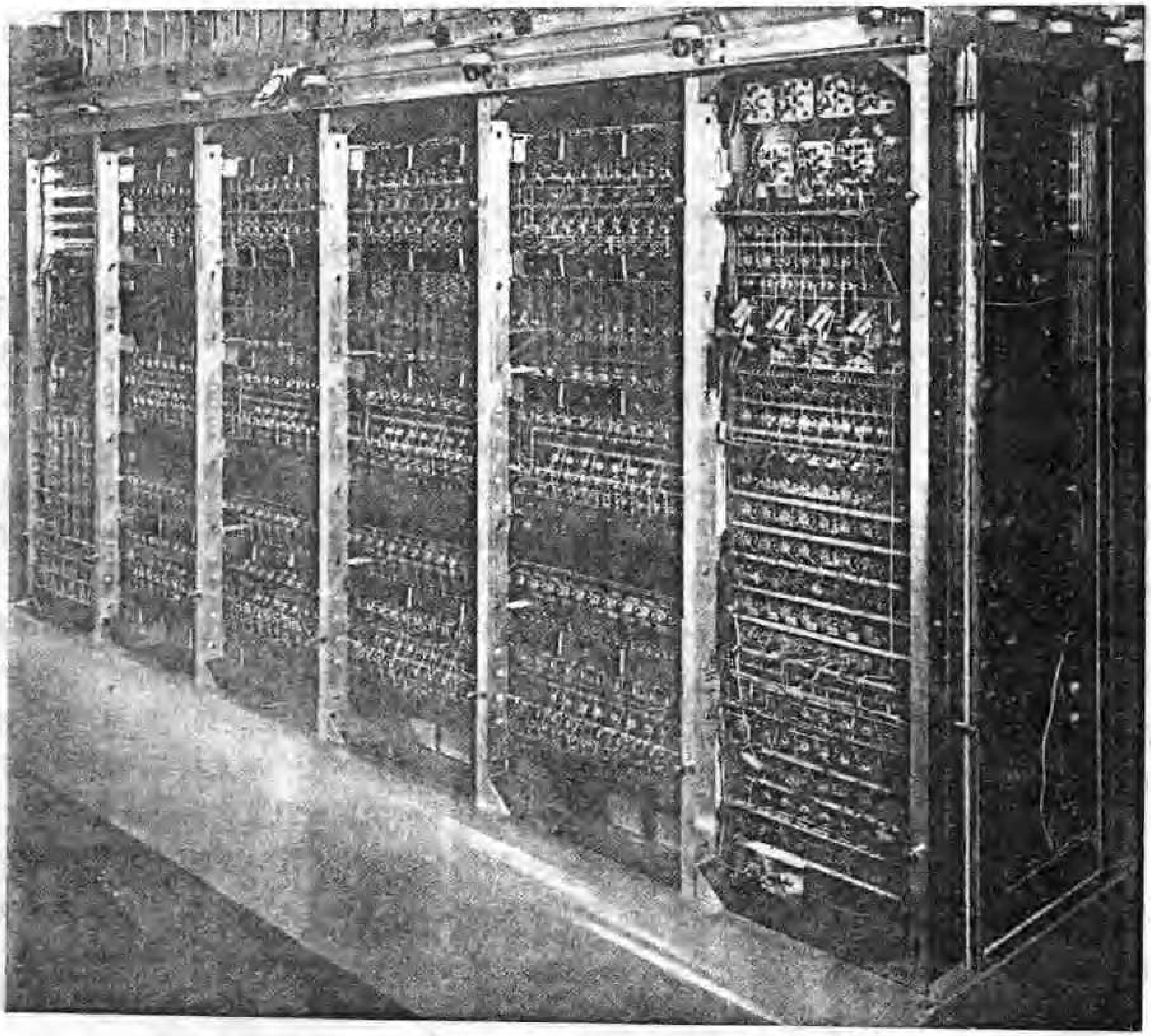
近年来,由于使用了计算机而可能解决的数学物理问题之多种多样,确实给人深刻的印象. 例如天文学杂志中就有越来越多的计算机结果,涉及诸如星体的历史,星团中星的运动,星际大气的复杂性态以及各种宇宙理论的检验. 很早就认识到,在涉及广义相对论的问题中,要得到特解在数学上是很难的,所以按各种不同的解法所作的预测要用观测或实验来检验. 现在,计算机使得可以在许多情况下得到这样的预测. 核物理中涉及到不同的场论时也有类似的情况.

我现在要讨论一些特殊的例子,来说明计算机怎样能做出对于数学家既有趣又有用的工作. 第一个例子是数论问题. 这门学科讨论通常的整数的性质,特别是与两个最基本的运算有关的性质:即加法与乘法.

和许多"纯粹"数学分支一样,目的在于发现并证明包含数的某个一般真理的定理. 要看到某一个关系在特殊情况下成立时常是容易的;任务在于证明它在一般情况下成立.

高斯,同时代的人称他为"数学王子",很喜欢用特例来做实验:对特例作辛勤的工作,这样获取灵感来寻找数论中一般为真的结论. 在被问到他是怎样发现数的某些很不平常的规律性时,他回答说:"Durch plan mässiges tattonieren"——通过系统的尝试. 杰出的印度数论家拉马努金(Sriaivasa Ramanujan)(见本书第 11 章拉马努金传)同样喜爱用例子做实验. 可以想像,计算机在这些人手上会激发起数论中多得多的发现.

数论中一个引人入胜的领域是研究素数,即只能被其本身与 1 整除的数. 希腊人证明了素数的个数是无限的,但是尽管做了几个世纪的工作,关于素数的一些最初等的问题也未解决.



MANIAC Ⅱ(数学分析数值积分与计算机). 1957 年建于洛斯阿拉莫斯科学实验室. STRETCH 是四年后由 IBM 制造,安装在洛斯阿拉莫斯,比 MANIAC Ⅱ快大约 10 倍. 这两种机器作者和他的同事们都广泛地使用来在数学中作实验.

例如,是否每个偶数都可以表示为两个素数之和? 这就是著名的哥德巴赫猜想. 例如 100=53+47,200=103+97. 已经证明了所有小于 2 000 000 的偶数都可以写成两个素数之和,但是一直没有证出对于所有偶数它都成立.

有一件有趣的事即有许多对彼此差为二的素数,例如 11 与 13,17 与 19,311 与 313. 虽然想

要证明这种"孪生素数"有无限多个，看来简单，但谁都没有证出来. 这两个未解决的问题说明，人的探索精神可以立即找到有极大简单性的数学命题，但要判定其为真为伪却是困难无比. 这些命题一直是对数学家的挑战.

得到一个证明不一定就能使数学家平息下来. 虽然很容易证明有无穷多素数存在，人总还想找一个公式把任意大的素数写出来. 一直没有找到这样的公式. 没有一个数学家现在就能按要求写出一个例如一千万位的素数，虽然它肯定存在.

最大的素数之一是不久前用计算机在瑞典找到的. 这就是 $2^{3\,217}-1$，它是 967 位数. 一个形状如 2^n-1 的数称为梅森(Marin Mersenne)数. 可能有无穷多个梅森数是素数，谁也不知道 *.

其他的可能是素数也可能不是的特别的数是费马数，即形如 $2^{2^n}+1$ 的数. 当 $n=0,1,2,3$ 时，相应的费马数是四个素数：3,5,17 和 257, 当 n 不大时，费马数就已经很大了. 例如 $n=13$ 时的费马数 $2^{8192}+1$ 就不知道是否素数. **

梅森数和费马数若用二进制表示其形状特别简单(见 564 页附表)，所以用计算机作试验特别简单. 费马数首位是 1，接下去都是 0，最后结尾仍是 1. 用二进制表示梅森数，其各位数均为 1. 用计算机来实验研究写成二进数的素数的出现是一件容易的事.

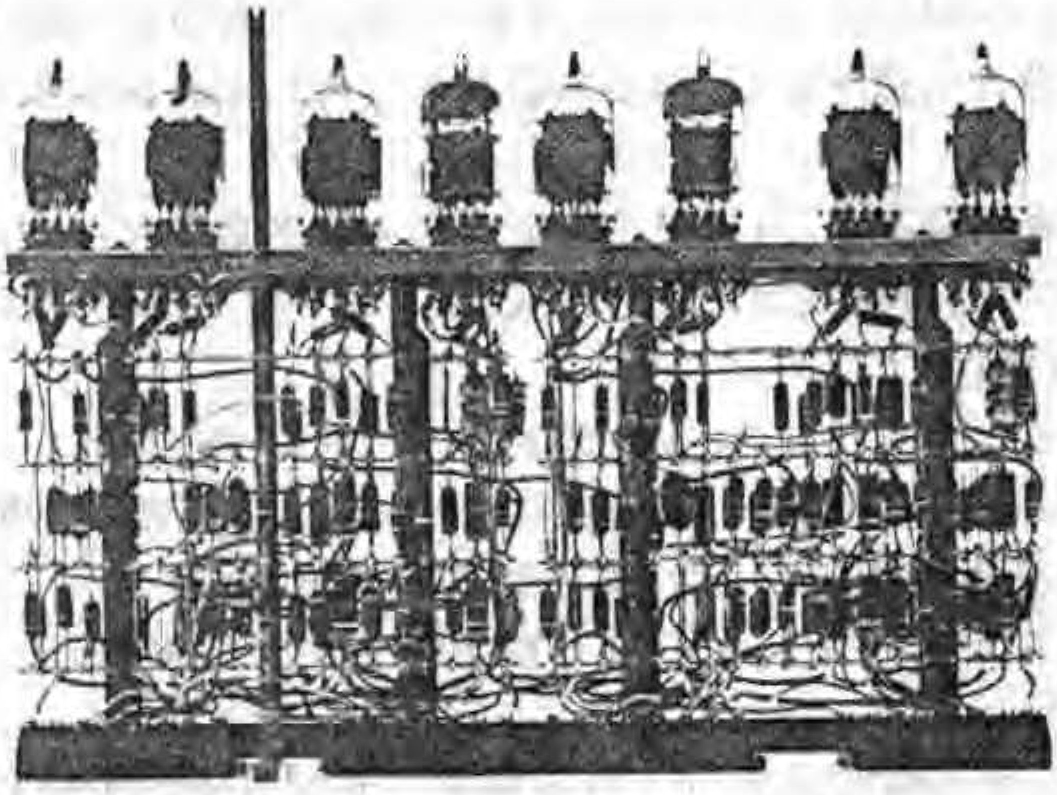
下面的命题很可能是真的：存在一个数 n 使得有无穷多个素数写成二进数时恰好有 n 个 1 (当然，界于这些 1 之间的 0 的个数不加限制). 虽然这个命题还不能用现有的数论方法解决，我怀疑，用计算机作的实验性工作会对含有不同个数的 1 的二进序列的性态有所启示. 下面的经验会有助于解释这种感觉.

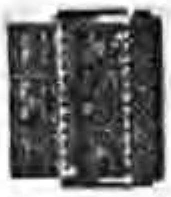
不多年前，我的同事威尔士(Mark B. Wells)和我计划作一个计算机程序来研究当一个素数用二进制表示时其中的 0 和 1 的分布的某些组合性质. 有一天威尔士说："当然不能设想素数的展开式中渐进地有相同个数的 0 与 1，因为能用 3 整除的数有偶数个 1. "这个命题是基于下面的论证. 可以先验地设想在用二进制表示的整数的大样本中 1 与 0 的个数是随机地渐近分布的，而对素数的大样本也应该是这样. 另一方面，如果在所有可以用 3 整除的数中必然含有偶数个 1，则在素数的大样本中，1 和 0 的分布不应是随机的.

---

* 译注：梅森数是 17 世纪法国修道士. 他在 1644 年提出 2^n-1 当 n 为什么数时为素数的问题. 本文中提出的 $2^{3\,217}-1$ 是里塞尔(Hans Riesel)于 1957 年发现的，他使用了一种名为 BESK 的计算机. 现在已找到的梅森素数有 404 个. 最近的一个是：$2^{24\,036\,583}-1$，共有 700 万位. 详见 www. mersenne. org/history. htm.

** 译注：$n=4$ 时 $2^{2^4}+1=2^{16}+1=65\,537$ 仍是素数. 但 $n=5$ 时，$2^{32}+1=641\times 6\,700\,417$，这是欧拉证明的. $n=13$ 时已知不是素数. 但其所有因子均不小于 2^{35}. 素因子个数不明.





元素的缩小意味着更大的可靠性与速度,还使得计算机系统在构造与运行上更为节约.上图的真空管组合用于IBM1946年开始制造的第一代计算机,于1955年制造的第一个晶体管化计算机使用了右上方所示那种线路.右下方是6个微小型线路所成的插件,每个线路含有几个晶体管和二极管,它将用于最新的IBM计算机.

回到办公室后,我试着去证明威尔士关于可以用3整除的数的命题但未成功.过了一会我注意到这个命题不真.第一个否证它的数是21,其二进表示中有3个1(见下页之图).

梅森数 (2^n-1)			费马数 ($2^{2^n}+1$)		
n	十进制	二进制	n	十进制	二进制
1	1	1	0	3	11
2	3	11	1	5	101
3	7	111	2	17	10001
4	15	1111	3	257	100000001
5	31	11111	4	65 537	10000000000000001

梅森数与费马数用二进制来写时有简单的外貌.虽然有许多梅森数(例如15)就不是素数,仍可能有无穷多个这种形状的素数.也可能有无穷多个费马素数,但对 n 仅为13的费马数就没有检验过.

3	11	27	11011
6	110	30	11110
9	1001	33	100001
12	1100	36	100100
15	1111	39	100111
18	10010	42	101010
21	10101	45	101101
24	11000	48	110000

可以用 3 整除的整数通常会在写为二进制时含有偶数个 1. 这个事实引导到在正文中说的一般定理之证明.

尽管如此,很大一部分能用 3 整除的数含有偶数个 1. 威尔士从看到这一点出发,证明了一个一般定理:在由 1 到 2^n 的可以用 3 整除的数中,含有偶数个 1 的占多数. 其数目与只含奇数个 1 的数之差可以准确地表示出来:即 $3^{(n-1)/2}$. 威尔士还对可用 5,7 和其他数整除的数发展了相应命题的证明,虽然他发现这些定理越来越难证明.

现在,数论中好些问题都已在计算机上实验研究过. 并非所有这些工作都是列表、特例和杂七杂八的奇事. 伯克利加州大学的莱默尔(D. H. Lehmer)就在数论中对计算机作了不同寻常的应用. 借助于计算机,他最近得到了几个一般的定理. 他所作的基本上就是把一般的命题化为验证许许多多特例. 特例为数太多,用手计算是不切实际甚至是不可能的. 然而,莱默尔和他的助手借助于计算机就能明显地确定所有的例外,从而发现对所有其他情况都成立的定理. 不幸的是,莱默尔有趣的工作从数学上讲是很难的,要描述它就会走得太远了.

要强调一点,莱默尔的定理并不完全是由机器证明的. 机器对于帮助他得到证明只是起了工具作用. 这与有一个程序,来引导机器作出一个数学命题的完全的数学证明,是很不一样的. 然而作一个这样的程序也非不可能. 计算机不仅能对数进行运作,对完成逻辑运算所需的符号,它也能处理. 这样,它能执行相应于基本的"布尔"运算的简单命令. 它们基本上就是"与","或"与"非"的亚里士多德表达式. 在一系列指令之下,计算机可以按指定的次序执行这些命令,探索种种可能性所成的深渊,在各种可能的选择中,找出那些在任何时刻都满足以前计算的选择.

用这样的技术就可以为计算机编出程序来证明欧氏几何的初等定理. 这方面有些工作,特别是在 IBM 研究中心所作的工作是很成功的. 另一些程序使计算机能证明射影几何的简单事实. 我毫不怀疑这些工作只是开始,计算机在处理数学的"有效"部分上将来会起的作用要大得多.

现在我将从研究整数转到组合分析，讨论计算机在这个领域中的一些应用. 很简要地说，组合分析讨论的就是由一个有限族的"点"所定义的排列或模式的性质. 高中代数中讲的排列组合问题就是熟悉的例子. 一个典型情况是，从 n 个点所成的有限集开始，并假设其中任意两个元，或者更一般地，假设其中任意 k 个元，有某些已给的、指定的关系. 可能想要列举出按指定方式相关联的一切可能的构造的数目，也可能想要知道等价的构造的数目. 有时可以把变某个集合为其自身的变换当作已给的对象，而这些变换形成一个有限集. 最广义地讲，组合分析讨论的就是关系与模式，它们的分类与变形. 在这一领域中计算机也是极其有用的. 下面是一些例子.

1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
		3,4	3,5	3,6	3,7
			4,5	4,6	4,7
				5,6	5,7
					6,7

1,2,3	1,3	1,4,5	1,5	1,6,7	1,7
	2,3	2,4,6	2,5,7	2,6	2,7
		3,4,7	3,5,6	3,6	3,7
			4,5	4,6	4,7
				5,6	5,7
					6,7

Steiner 问题就是以下所述：设有 n 种物体，可否用它们作成一些三元组，使得每一对物体均在某个三元组中出现一次且仅一次？只有当 $n=6k+1$ 或 $6k+3$ 而 k 为整数时这个问题才能解决. 上面给出了 $k=1$ 而 $n=7$ 的一个解答. 左边的表是七个物体所可能组成的对子. 右边的表给出了七个三元组(黑框)，这七个三元组就已包括了所有的对子，但只一次、这些三元组中的 21 个数字可以重新组合为其他三元组.

考虑一个著名问题：在棋盘上放 8 个"后"，使得每一个都吃不了另一个. 对于通常的 8×8 的棋盘，只有 12 个基本不同的解法. 数学家则想知道怎样解决在 $n\times n$ 的棋盘上放 n 个"后"的问题. 这种列举的问题通常都是很难的，但用计算机来讨论可以帮助求解.

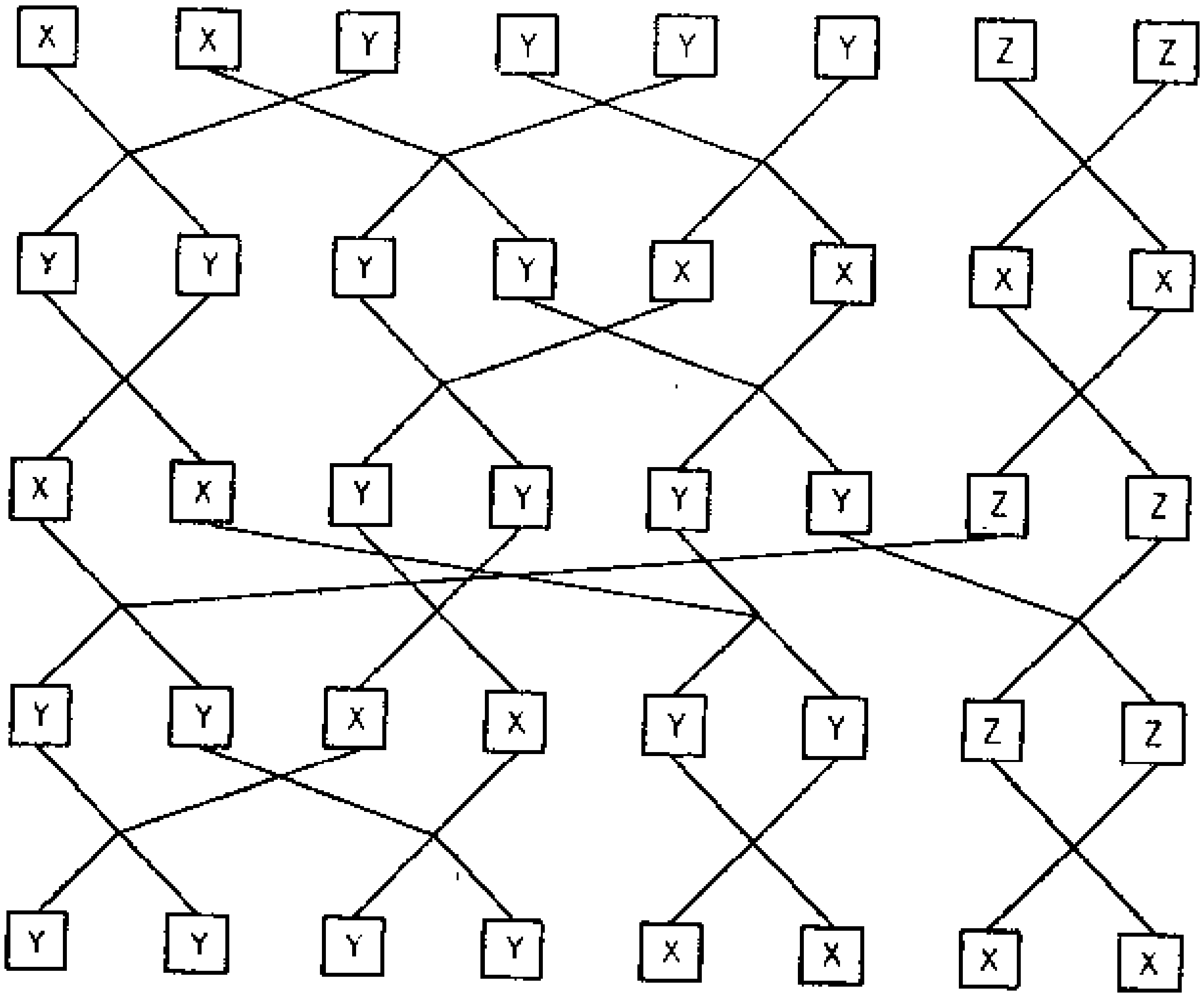
下面的问题是 19 世纪瑞士数学家斯坦纳(Jakob Steiner)首先提出的：给出 n 种物体*，如何用它们组成一些三元组，使得每一个由 2 种不同物体所成的 $n(n-1)/2$ 个对子，每一个均出现在一个且只一个三元组中？以 $n=5$ 为例，由 5 种物体最多可以构成 10 种对子，但是稍作一些实验就知道，没有办法都放在三元组中而不出现重复. 这个问题只有当 $n=6k+1$ 或 $6k+3$ 而 k

---

* 译注：原文未分清是 n 个物体还是 n 种物体. 如果理解为 n 个物体，则容易理解为将它们分成若干个三元组，这时 n 必须为 3 的倍数，而并未见此假定. 现按文中之具体例子译为 n 种物体，而且文字有相应修改.

是一个正整数时才可解. 在 566 页的右图上给出了 $k=1$(这时 $n=7$)时的解. 解答中有七个三元组. 这个问题有多少种解法? 当 k 是一个大数时,计算机又是很有用的.

最短路径问题,时常又称为推销员问题,是组合学中另一个为人熟知的问题. 已给平面或空间中 n 个点的位置,问题就是把它们联结起来且使总的路程最短. 这问题的另一个说法是:在点所成的网络中找一条路径(不一定碰到每个点)使得通过它所需的时间最短(见"控制理论"(Control Theory)一文,《科学的美国人》(Scientific American),1964 年 9 月号). 这个问题与前两个的区别在于,它们需要找一个构造最短路径的方法. 严格地说,它们是"元组合学"问题. 这个词的意思是:问题的确切表述需要对于什么叫做"构造的办法"有一个定义. 这样的定义是可能的,所以确切的表述也可以做到. 若这 n 个点分布在高维空间中,没有计算机就简直没有办法来攻这个问题.



家谱"树"提出许多有趣的组合问题. 在这里的简单例子中有三个不同肤色的个人成为配偶. 严格说来,x,y 和 z 表示每一代中各种肤色所占的比例. 但我们也用它们表示肤色类型. 每一次配偶都产生一对子女,其肤色按一定的规则由其父母的肤色唯一决定. (例如 2 个 y 或 2 个 z 产生 2 个 x.) 设初始的群体有好几百人,可以提出下面的问题:给出第 5 代的一个个体则例如在第一代他会有多少不同的祖先? 第 n 代一个个体的祖先中,x,y,z 之比例如何?

可以取家谱学中一个问题作为组合学中的最后一个例子. 为简单起见，设一个群体由许多随意婚配的个体构成，每一对配偶过了一段时间后又生出一对子女. 设这个过程继续了好多代，而每一代中的所有父母又都在同一时间生育子女. 马上就会出现许多有趣的组合性质的问题.

例如，在这个过程的第 15 代给定一个个体，那么例如在第 9 代他可能有多少不同的祖先? 因为这是往上数 6 代，不同祖先的最大数目是 2^6，但这是假设了任两个祖先均没有血缘关系. 与人类家谱情况一样，血缘关系的存在有一定概率，所以实际数目小于 2^6. 得到不同的较小数目的概率是多少?

设原来的群体中有两类(即每个个体均有两种特征的某一个)；在许多代的过程中，这两类如何混合? 换言之，考虑第 n 代的一个个体，想要知道在他的祖先中两类各占多少比例.

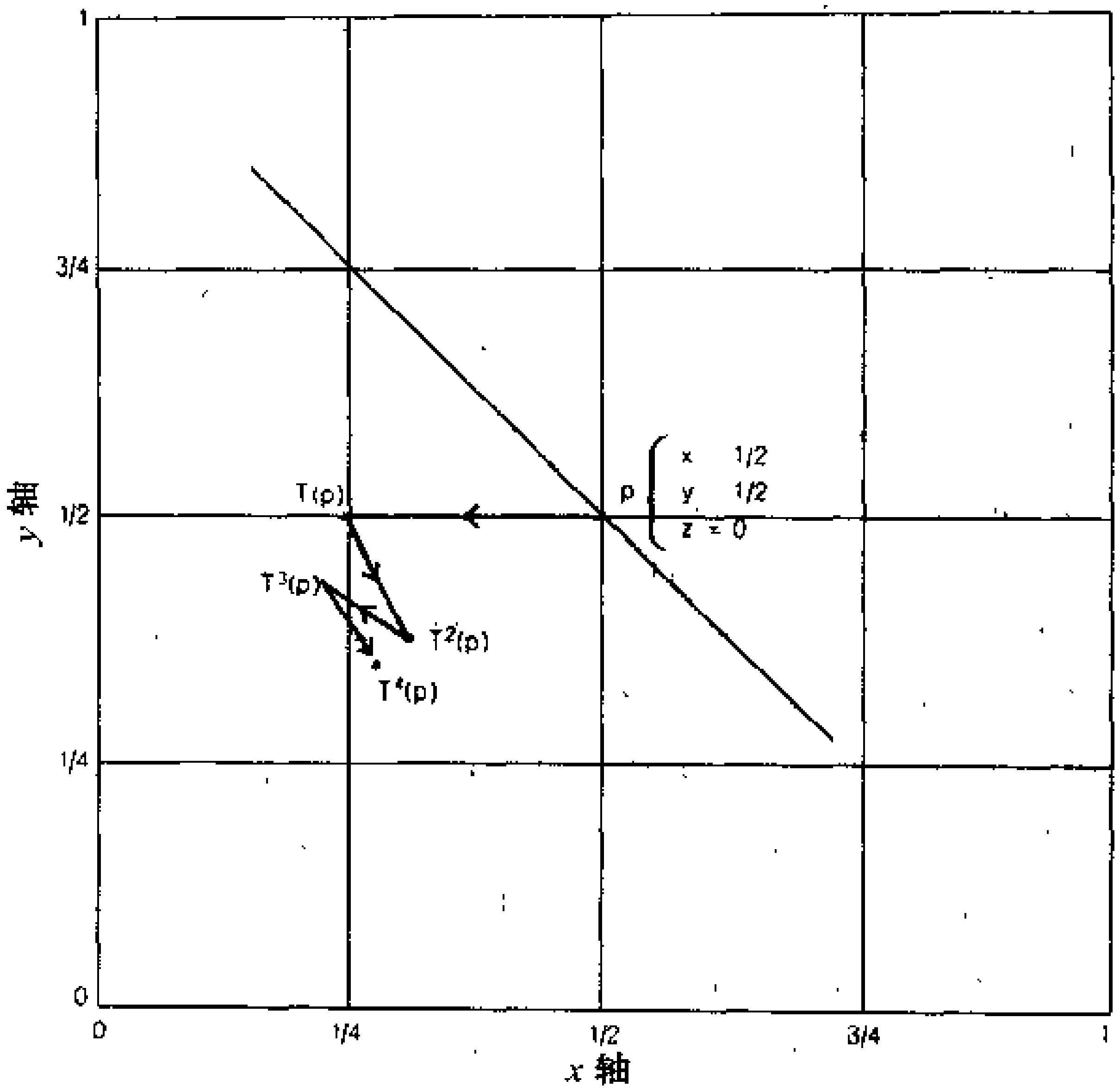
现在作一个比较现实的假设. 考虑前面的过程，但是去掉一个限制，即所有子女都是他们的父母在同一个年龄同一个时间生出. 代替它，假设新一代的出生按一定的概率分布在一个有限的时间段里. 当这个过程继续了一段时间以后，最近出生的个体，可以说是辈分不同. 在人类群体中确实发生这样的情况，因为母亲平均地比父亲年轻. 所以，在母亲链上向上倒推例如 10 代，其总年数比在父亲链上倒推 10 代年数较少. 所以若从年代 0 开始许多年后，要计算每一个个体家谱史上平均的代数就成了一个很复杂的组合问题. 这个问题和许多类似问题，要用分析方法处理就很难. 然而，用计算机来模拟这个过程，就可以得到一些数据，对此有启发.

最后一个我想与计算机联系着讨论的数学领域是广阔的但极少探讨过的非线性这一领域. 单变量的线性函数的形状是 $x'=ax+b$，其中 a,b 是常数. 这种形状的函数和变换在数学上是最简单的. 它们广泛地出现在自然科学和技术中. 举例来说，量子力学使用了线性数学. 虽然有迹象表明，未来关于核和亚核现象的理解需要非线性理论. 在许多物理理论中，如流体力学，方程从一开始就是非线性的.

最简单的非线性函数是二次函数，在单变量时，这种函数形如 $y=ax^2+bx+c$，a,b,c 是常数. 我们对这一类非线性函数和变换了解之少，可能使非数学这一行的读者吃惊. 关于它们的性质的一些最简单的问题也没有得到回答.

举一个例，数学家想更多地知道非线性函数经过迭代后的性质. 所谓迭代很简单就是对某个起始值反复施以这个函数(或变换). 例如用取 x 之平方根这一函数表示一个点，迭代一次即取此平方根的平方根；往下的每一次迭代都是再取一次平方根.

由两个各含两变量的两个函数构成一个变换，它可以定义平面上一个点；迭代后得到一串点，或称为此变换的“像”(见 569 页插图). 由一个点经一非线性函数的迭代，得到像的一个序列，而找出其性质一般是困难的. 现有的分析技巧还不足以揭示哪怕是很简单的变换的这类性质.



$$x'=y^2+z^2,\quad y'=2xy-2xz,\quad z'=x^2-2yz$$

初值点 P	一次迭代 $T(P)$	二次迭代 $T^2(P)$	三次迭代 $T^3(P)$	四次迭代 $T^4(P)$
$x=1/2$	$x'=1/4$	$x''=5/16$	$x'''=61/256=.238$	$x''''=.295$
$y=1/2$	$y'=2/4$	$y''=6/16$	$y'''=110/256=.430$	$y''''=.363$
$z=0$	$z'=1/4$	$z''=5/16$	$z'''=85/256=.332$	$z''''=.342$
和 1	1	1	1=1.000	1.000

迭代过程就是对一个初始值或初始点反复施以同一个函数(或变换). 图中有三个含三变量的方程定义了平面上一个点. 迭代就生成了相继的点,或称为"像". 因为三个坐标加起来为 1,所以只需描出两个变量(例如 x 和 y). 一次迭代 $T(P)$ 就是把 x,y,z 的初始值 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ 代入三个方程. 把得出的新值 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 再代入这三个方程得出二次迭代 $T^2(P)$,仿此以往. 计算机能很快地算出并显示出一个点的成千次迭代,于是可以研究它们的性态(见 571 页之图).

这里，用计算机作的经验性的工作又是很有帮助的，特别是若计算机有视觉显示，能把多次迭代的点在荧屏上表现出来就更有帮助. 洛斯阿拉莫斯的 MANIAC Ⅱ就有这样的装置，使我们一眼就可以看到成百次迭代的结果.

在研究这些显示时，数学家想要看的是，这一串迭代像是否收敛于一个单个的位置，即“不动点”(见本书第 21 章“不动点定理”). 通常，像并不收敛，而是跳来跳去，如果一个像接一个像地看，它们是毫无规律地在跳. 但是如果好几百个像一齐看，有时可以看到它们收敛于一曲线，其形状可以是完全想不到极为奇特的，见 571 页的四个图形. 这些经验的图形已经启发我的助手和我作出一些一般的猜测，找到了非线性变换的一些性质.

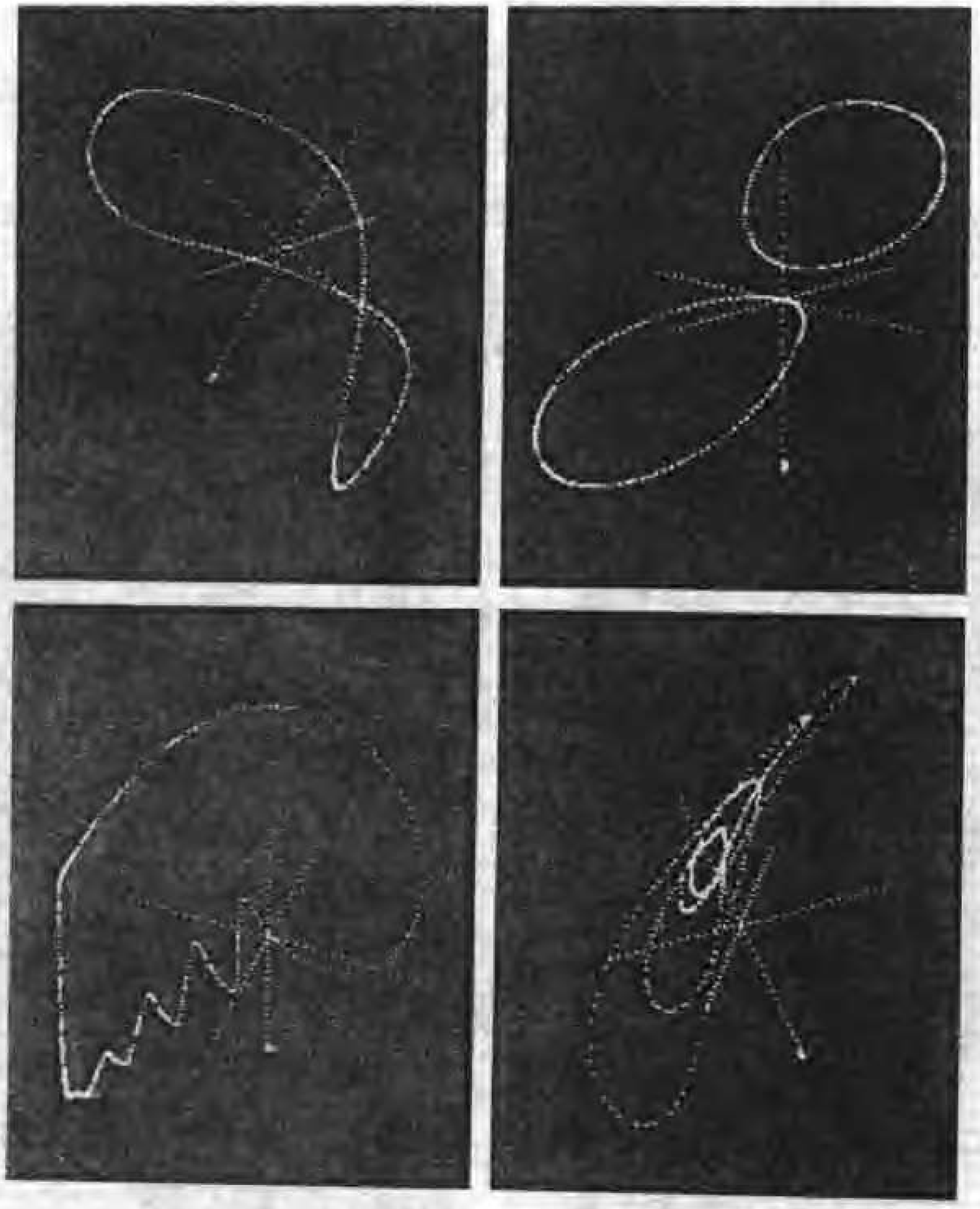
要使电子计算机成为比今天更有价值的工具，最明显需要的是什么? 一个重要的要求是掌握更广泛的逻辑运算的能力. 我已经说过，最简单的逻辑运算，即布尔运算，从一开始就已安装到电子计算机里去了. 要想包括更多的现代数学，计算机就需要有一个“全称量词”和一个“存在量词”. 全称量词是用来表示在数学论文中经常见到的命题：“对于一切 x，必有如何如何. ”需要存在量词是为了表达另一种常见的命题：“存在一个 x，使得什么什么为真. ”如果能把这两个量词加到布尔演算上去，就能把绝大部分传统数学和相当一部分现代数学由计算机来检验. 不幸的是，还没有一个好的计算机程序能操作“对于一切”和“存在一个”这两个概念.

不必怀疑，计算机的运行速度和存储容量都会继续增长. 还会有更有基本性的进展. 现今的计算机都按线性顺序操作：它们是依次一件一件事地作. 更多地以动物神经系统为模型来设计计算机还是一个挑战. 动物神经系统是同时进行多种运算的. 确实，已经有计划造一种机器，它能在不同地址同时作许多算术运算.

一个多轨道机器对于蒙特卡洛方法会大有价值. 这个机器的任务是计算一些虚拟的粒子的单个的历史，而在许多问题中，这些粒子的命运是彼此无关的. 这就意味着，可以对它们进行并行的而不是串行的计算. 此外，也没有必要把计算进行到现在的高速计算机能算到的那么多位小数位数；4 或 5 位有效数字的精确度通常也就够了. 所以，如果有一个计算机能同时计算好几百个粒子的历史，虽然只有适度的精确度，却是很有价值的. 有很多场合，这样设计的计算机会是很有效的.

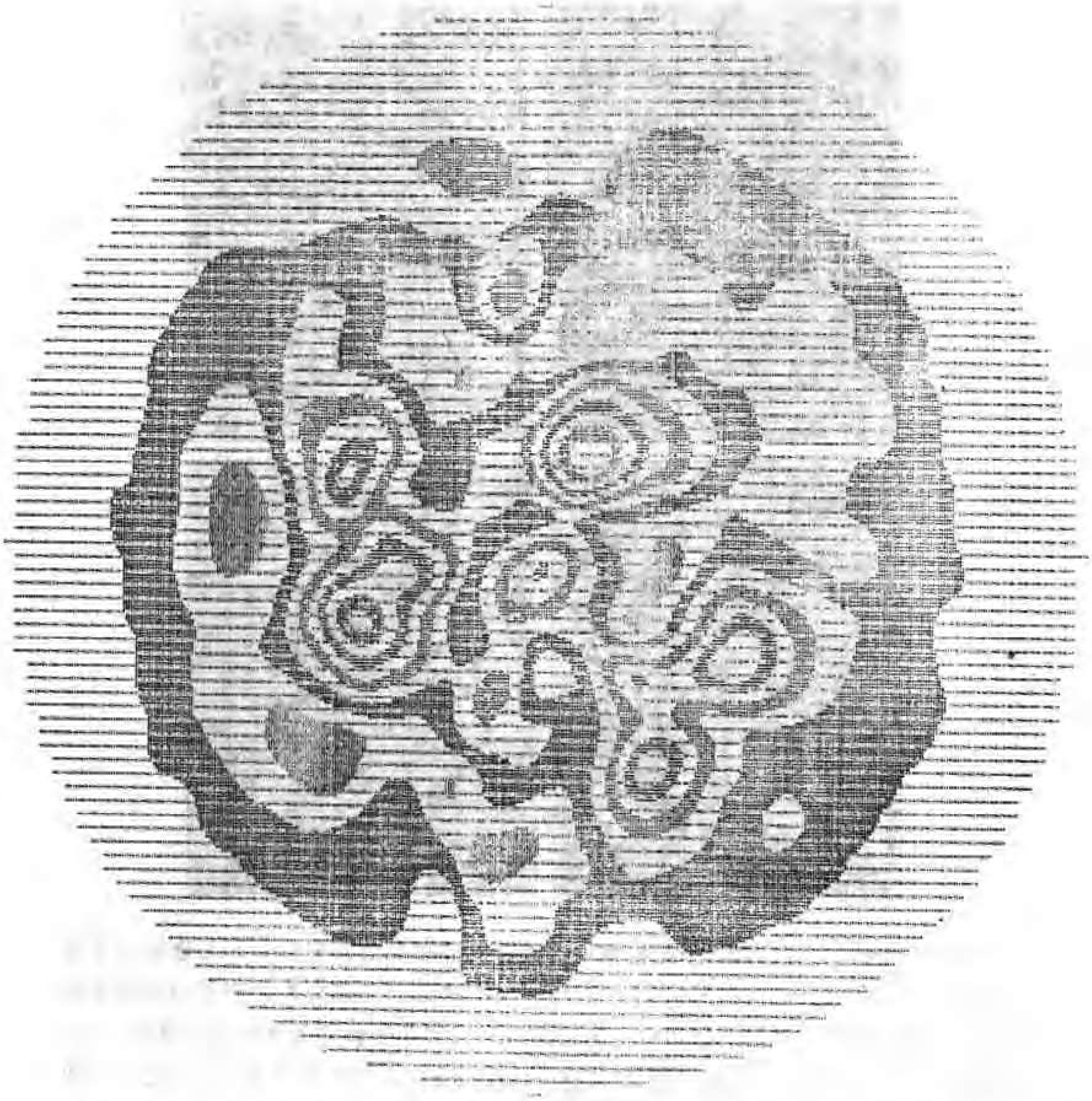
很希望有这方面的进展：使计算机与操作人员之间的交流更加容易. 现在，要想在已经得到部分结果时就改变计算的进程是很困难的. 如果进人机器能够更灵活，如果能在问题进展过程中，就能看得见地来研究它，许多数学家就会比今天更信服用计算机来做实验.

可以想像专门适用于自动计算机的计算方法. 由于机器的速度，将能够可以说是摸得着地来探讨高于三维的空间中的几何图形，人们就能通过实践获得新的直觉. 这当然会刺激研究拓



非线性变换的迭代，由洛斯阿拉莫斯的高速计算机完成且显示在示波器的荧光屏上. 这项研究是斯坦因(P.R. Stein)和作者完成的，其目的是研究某些形状相对简单的非线性变换的渐近性质，或"极限集". 这是由四个各含四变量的函数所成的迭代，所以应该描在三维空间里；直的虚线是坐标轴(见569页上的二维描点的图). 上左是一个扭曲的空间曲线. 上右是两个平面曲线. 下面两个图更加复杂.

扑学和新数学对象的组合学的数学家. 这些对象可能就是通常的整数，但其数值之大、个数之多，都会超过目前用于实验的整数. 也将能发展一些数学表达式，其中存在量词的个数将比现在的形式数学定义中用的多得多. 在未来的计算机上玩新游戏，会考虑按我们目前的经验很难看得见的空间中的新对象及其运动，因为我们目前的经验基本上限于三维空间.



天气模式的仿真，这是整个北半球的仿真，是由美国气象局大气环流研究实验室在 STRETCH 计算机上作的. 研究者为了建立与检验大气动态的新理论，对于打算用以描述大气现象的方程编制了计算机程序. 然后输入实测数据，计算机由此算出几天或几星期的天气模式变化的模型. 把这些模型与相应时期的实际观测结果相比较. 图上有阴影的"轮廓线"表示一项研究所得的海平面大气压的仿真. 这个图案是由排得很密的数字和字母拼成的，并直接由计算机打印出来.

一个老哲学问题仍待解决:数学主要是人类大脑的自由创造呢,或者是:定义、公理和问题的选择很大程度上是受到外部物理世界的启示呢?(我把大脑的解剖学结构也归于物理世界了.)由于电子机器的工作,在未来10年左右,很可能对此问题有所启示.研究人的神经系统的工作与计算机组织的工作之相似性,会对此给出新的洞察.数学会在生物科学中会有新的应用,研究有生命的物质会提出新的数学问题.

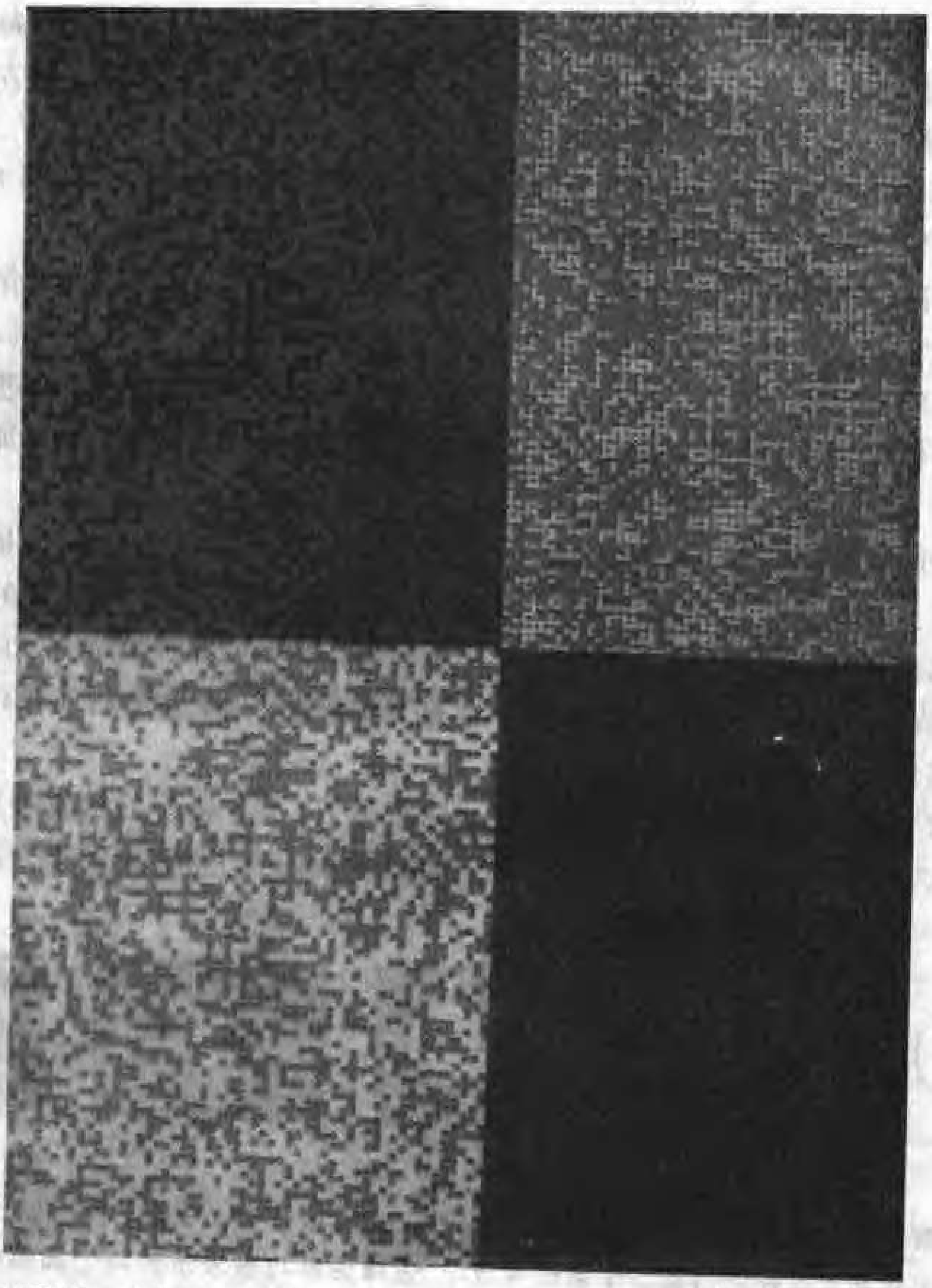
45.

计算机的逻辑和存储

戴维·C·伊文思(David C. Evans),1966 年 9 月号

电子数字计算机由两个基本类型的元件组成:逻辑元件(常被称为开关元件)和存储元件.在几乎所有现代计算机中,这些元件都是二进制的,这就是说,这些逻辑元件有两个二选一的通道,而存储元件有两个状态.从而由这种元件处理的所有信息都要用二进制方式编码.简言之,信息被表示为二进制,贮存于二进制存储元件中,并用二进制开关元件处理.

为建造一台数字计算机,必须有存储元件和一组功能齐全的逻辑元件.一组逻辑元件如果能够履行任何一项逻辑功能的一个逻辑电路都能由这一组元件综合而成,就说它是功能齐全的.我们来检验这样的一个功能齐全的组,包含着三种不同类型的电路分别称为与,或和非.这些电路能够用从左输入信号从右输出信号来描写(见 577 页之上图).因为逻辑元件都是二进制的,每个输入和输出也都是二进制变量,可取值 0 或 1.在一个电子电路中逻辑值为 0 对应于一个特定的电压或者电流,而逻辑值为 1 则对应于另一个电压或者电流.对于每一个符号电路我们能够构作一个"真值表",在其中列出所有可能的输入状态和对应的输出状态.每一个真值表反过来能够表示一个布尔命题(以 19 世纪的逻辑学家布尔(George Boole)命名),它表示该回路的输出为输入的一个函数.真值表和布尔命题都画在第 576 页和 577 页的图中.在与电路的情形,输出变量 C 取值 1 当且仅当输入变量 A 和 B 同时有值 1.在布尔命题中运算与则标作一个点;它读作"C 等于 A 与 B".在或电路中,C 取值 1 当至少一个输入变量取值 1.其布尔命题读作"C 等于 A 或 B".非电路以输入的逻辑余作为其输出.它的布尔命题读作"B 等于非 A".所描述的与和或电路只有两个输入变量.有更多的输入变量的电路也常使用.



薄膜存储器由一个矩形的贮存元件的阵列组成，元件只有百万分之四英寸厚，安置在薄玻璃片基质上．当电流通过印刷在玻璃上的导线（直条带）时，矩形被定向为对应于 0 或 1 的两个磁性状态之一．这些薄膜能在几十亿分之一秒之内开关．如果薄膜表面被平面极化灯照明并且通过一个适当地校正了的极化滤光镜拍照，则其状态可以看得见．磁性薄膜在反射光的极化平面上引起少许旋转．这里深色矩形是在 1 的状态；浅色的矩形是在 0 的状态．照片中把一个薄膜存储器的直径放大了 100 倍，并由柏洛斯公司冲洗了用于它的最新的计算机．

还有一些其他的功能齐全的逻辑元件组. 其中两组特别使人有兴趣，因为每个只含有一个元件，其一称为与非(意为“不是与”)，另一称为或非(意为“不是或”). 第577页左下图画出了一个双输入与非电路的符号表示以及其真值表. 虽然一个实际的与非电路被设计为一个整体，显然它可以用一个与电路和一个非电路来实现. 读者能很容易地从与非电路设计出与，或以及非电路来，以向自己证明与非电路也是功能齐全的.

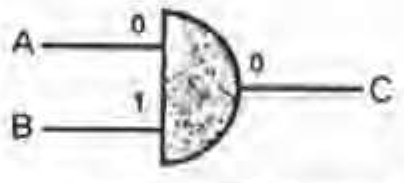
用与和非电路，不难构作一个译码电路，它能将二进制数翻译为十进制数. 第579页上图展示如此的一个电路和它的真值表. 每一个十进制数都由一个四位二进制码(A_0，A_1，A_2，A_3)表示. 在图中这个译码电路中，输入了信号A_0，A_1，A_2，A_3以后就产生出头四个十进制数0，1，2，3. 每个用数标注的输出处的信号是0，除非输入码是标注输出的数的二进制码1，那时输出信号是1.

在计算机中贮存信息的电路可以分作两类：寄存器和存储器电路. 寄存器是由逻辑电路组合起来就可以建立计算机的算术、控制和其他信息处理的部件. 寄存器中贮存的信息表示计算机系统的处理部件的瞬时的状态. 术语“存储器”通常专指计算机的那些部件，它们能够贮存一般的信息，诸如程序的指令，馈入程序的信息以及计算的结果. 在本文的后面将讨论为这种贮存目的设计的存储装置.

寄存器通常是用称为触发器的一比特贮存电路做成. 一个典型的触发器电路，称为置位复位触发器，有四个终端(见579页下图). 用它贮存的变量的名字来给这样一个触发器命名是方

文氏图解利用圆来把各种逻辑概念和关系图式化. 圆表示一个命题，它可能正确或者错误；它们被放在表示所有可能的命题的宇宙或者域中. 逻辑关系与被表示为两个圆部分重叠之阴影区域. 这个区域 *C* 是“正确”当且仅当这两个圆 *A* 和 *B* 都正确；它是“错误”如果 *A* 或者 *B*，或者 *A*，*B* 二者都错误. 逻辑关系或(“可兼容的或”)被表示为打了阴影的两个圆内的全部区域. 这个区域 *C* 是正确当 *A* 或者 *B* 或者两个都正确. 非表示为一个圆 *A* 被外围 *B* 所包围，而 *B* 为非 *A*. 在文氏图解下面的等式都是布尔命题. 在与命题中的黑点读作“与”. 在或命题中的加号读作“或”. 在非命题中的$\overline{A}$表示“非 *A*”. 与非和或非分别表示“不是与”和“不是或”，它们的文氏图解用阴影表示得很清楚. 这种图解是以19世纪的英国逻辑学家文(John Venn)的姓氏命名的.

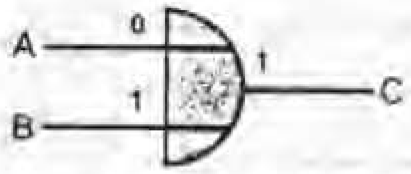
与



$C=A\cdot B$

A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	1	1
1	0	0

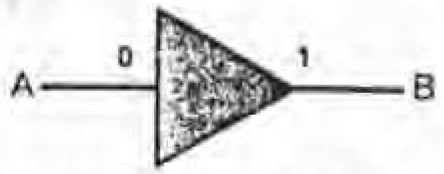
或



$C=A+B$

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	1	1
1	0	1

非

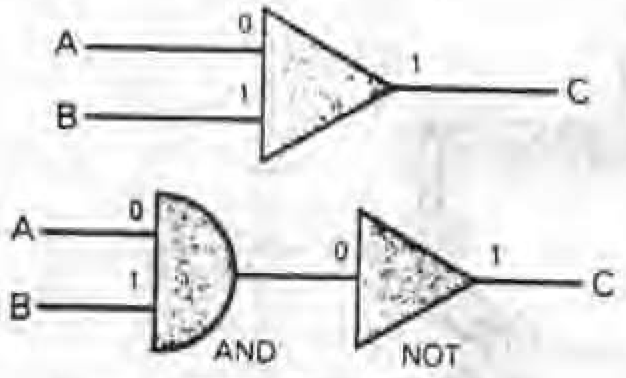


$B=\overline{A}$

A	B
0	1
1	0

与，或和非组成一组功能齐全的二进制逻辑元件．图上方的三个符号表示能够实行这些逻辑功能的电路．输入信号 0 或者 1 从电路左边进入；输出从右边离去．在每个电路之下是其"真值表"，在其中列出了所有可能的输入状态和对应的输出状态．

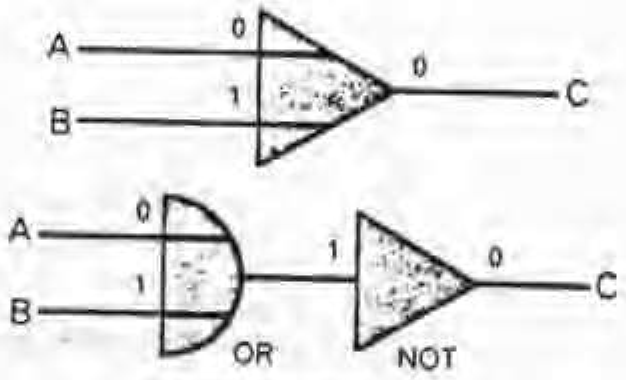
与非



$C=\overline{A\cdot B}$

A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	1	0
1	0	1

或非



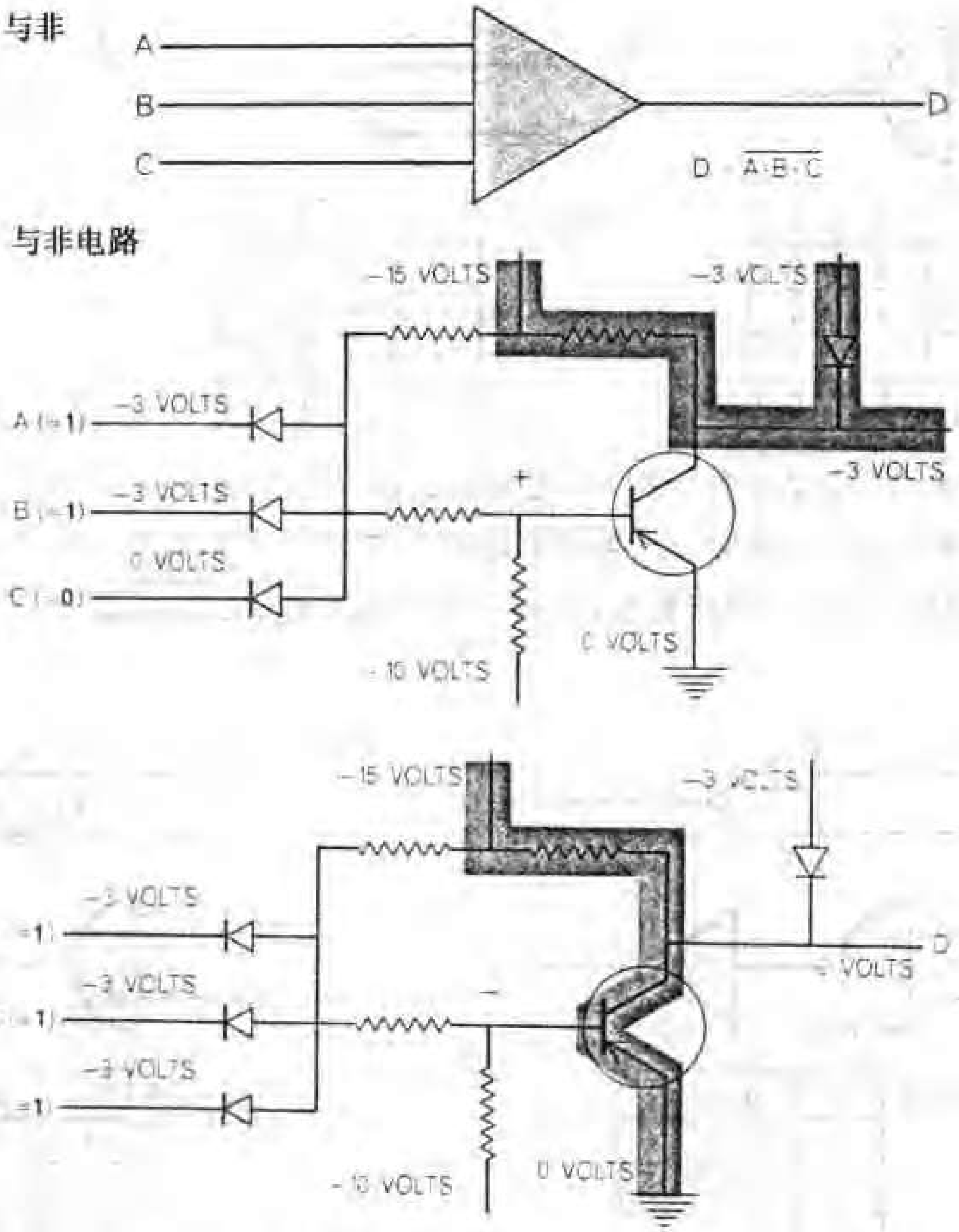
$C=\overline{A+B}$

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	1	0
1	0	0

与非电路，只包含一个逻辑元件，是功能齐全的．它能够做与，或以及非电路集合起来能完成的任何一件事情．上方用符号画的两输入的与非电路等价于将与和非组合起来的电路．与非的真值表的输出同与的真值表的输出相反．

或非电路也是功能齐全的，上方用符号画的两输入或非电路等价于紧下方的或和非组合起来的电路．或非的真值表与或的真值表相反．能够充当与非或者或非的电路的具体电子实现在第 578 页示出．

便的；因此贮存了变量 A 的触发器将称为 A．如果端 S 和 R 的输入都是 0，此触发器会是处于两种状态之一．如果 A 值为 1，它是处于置位状态；如果 A 值为 0，它是处于复位状态．送一个 1 信号到 S 端就能把它拨到置位状态，若送一个 1 信号到 R 端就回到复位状态．同时将两个 1 分别

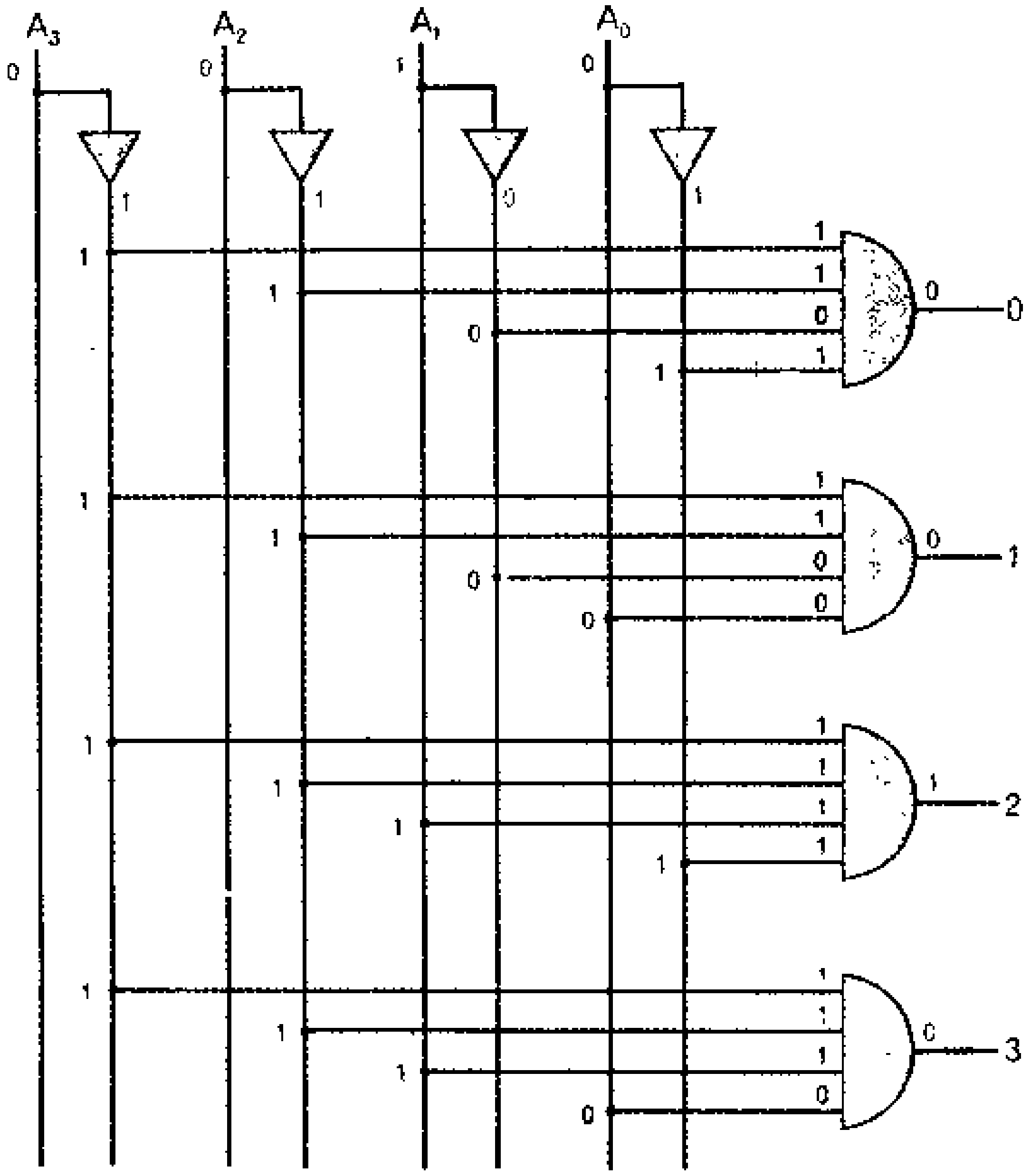


与非电路的电子体现包含四个二极管(三角形),四个电阻(锯齿形)和一个三极管(圆形).这个三输入与非电路的符号及其布尔命题画在上方.在电路中深色表示依据小电流的流动(浅颜色)而接通的大电流的流动,以产生输出 0 或 1,而小电流由输入电压所控制.图上画出了两个不同的输入:1,1,0 和 1,1,1 的电流.将电压的选取反转,此处呈示的与非电路就可以起或非电路的作用.这种电路有多种办法来设计.

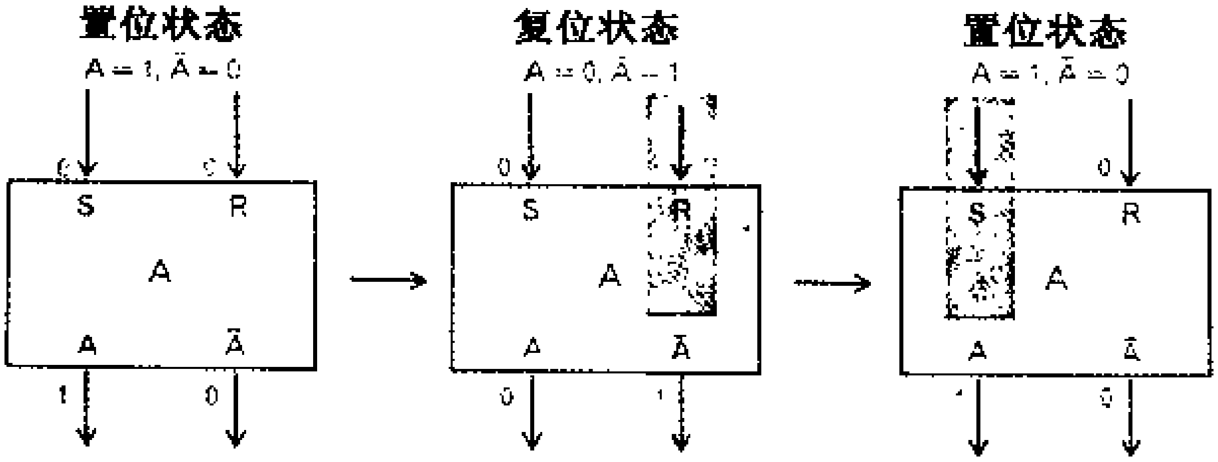
送到 S 和 R 端将不会得到预期的结果.于是这个触发器能够看作是只记住了最近一次的输入的状态.

用于一般贮存的存储器可以用逻辑电路和触发器来做,不过由于实际的理由,并不这样做.因为像这样做出来的存储器会很大而且很贵,并且会需要很多电力;此外,如果电力断掉则所存的信息将会失去.

十进制	二进制			
	A_3	A_2	A_1	A_0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1



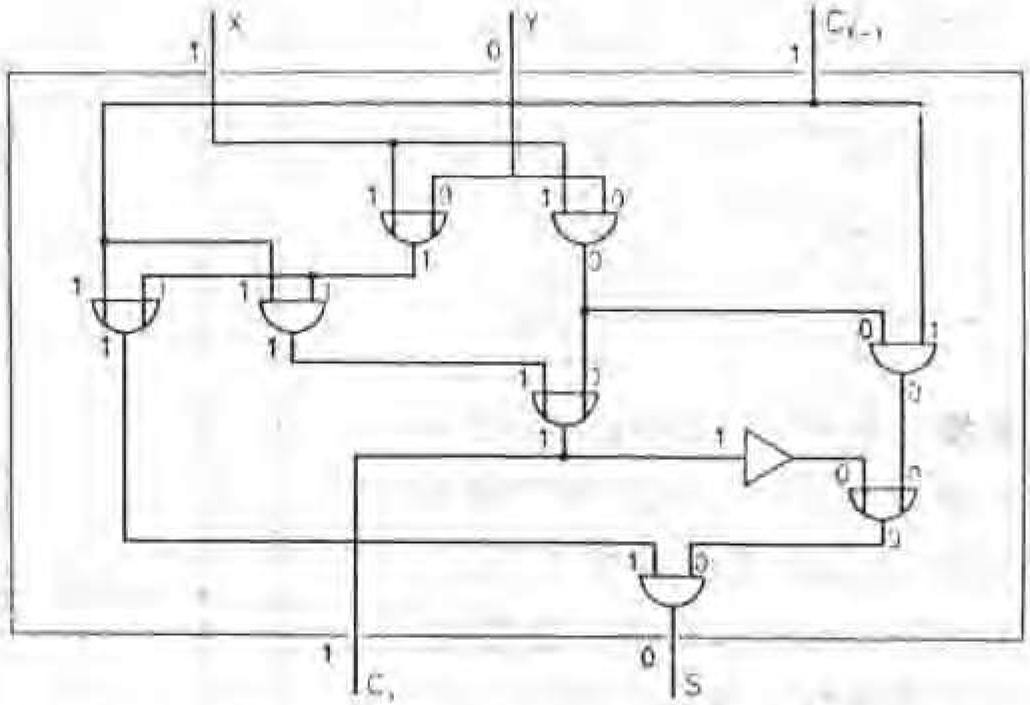
转换二进制为十进制数可用这种电路完成，它由四个非电路和四个与电路组成. 上边的真值表展示了从 0 到 9 的十进制数的等价的二进制数. 为表明二进制数译码的原则，图上只给出译码为十进制数 3 的电路. 每个标注了数的输出的信号都是 0，除非所有输入均为 1. 例中从上面数起第三个与电路，标注的数为 2，就输出 0. 从而二进制数 0010 译码得十进制数 2.



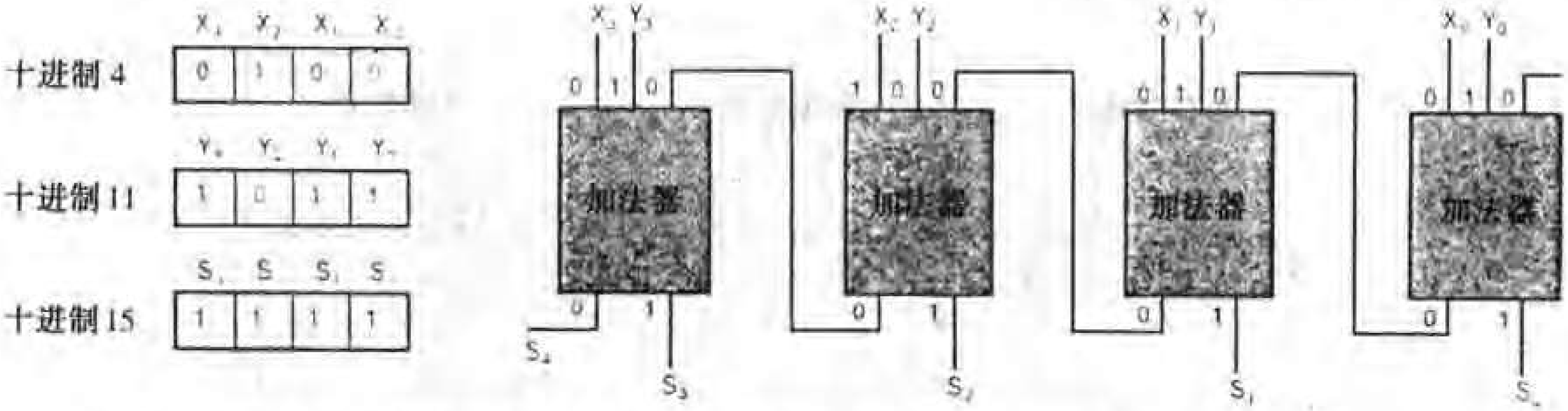
典型的一比特贮存单元被表作一个"置位复位触发器". 此处画出的一个命名为 A，因为它贮存变量 A，一个触发器只能"记忆"最近一次输入的状态. 如果 A 值为 1，它是处于置位状态；如果 A 值为 0，它是处于复位状态. 把 1 作用于 S 端得置位状态；作用一个 1 于 R 端得复位状态. 触发器提供计算机中暂时的存储功能.

我们现在来考虑如何通过组合逻辑电路和寄存器来进行初等算术运算. 第 579 页上图包括一个真值表描写了一位二进制加法.

C_{i-1}	X	Y	C_i	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



二进制加法器电路(右)能够把两个一位二进制数加起来. 它由与,或和非逻辑元件制成. 因为加法器通常是由若干个并行起来的(见下图),它必须也能够接收由紧靠右边的一个加法器产生的一个称为输入进位数码 C_{i-1}. 它的真值表(左)展示了对于三个输入的所有组合的"进位输出"C_i 以及和 S. 在例中的输入为 1,0 和 1. 这是一个组合电路.

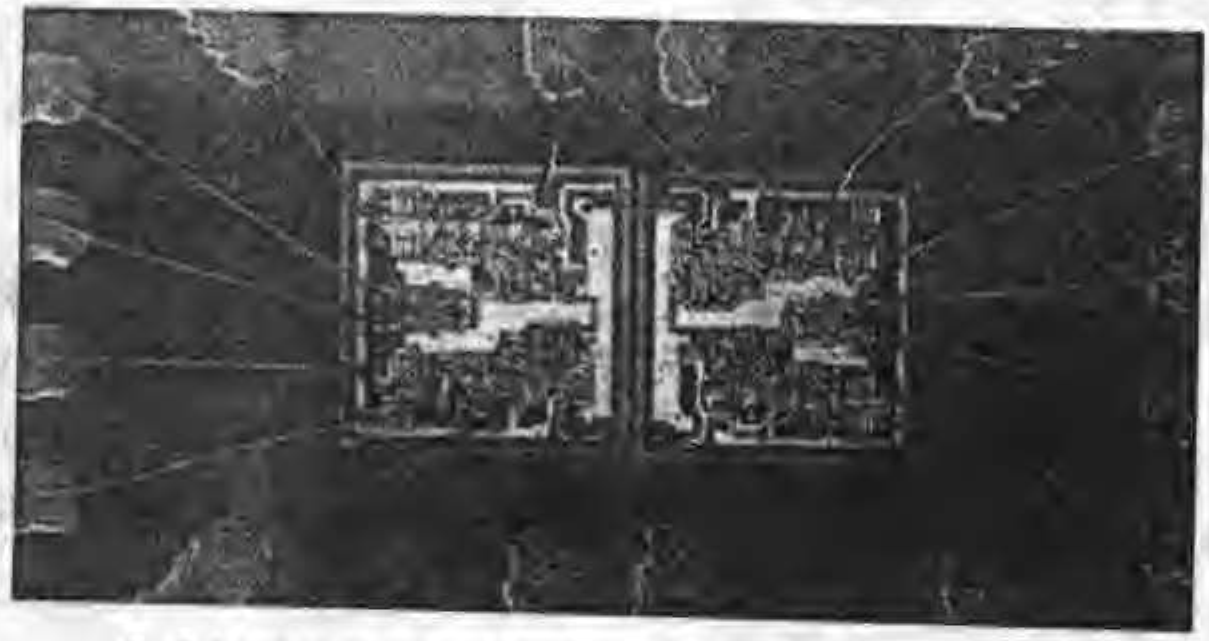


四位并行加法器由四个本页上图中所展示的一位二进制加法器组成. 在一个计算机中,需要用寄存器(未展示)来提供输入信号和贮存输出信号. 在这里图解的例子中,把二进制数 0100(十进制 4)与 1011(十进制 11)相加. 其和为二进制数 1111(十进制 15).

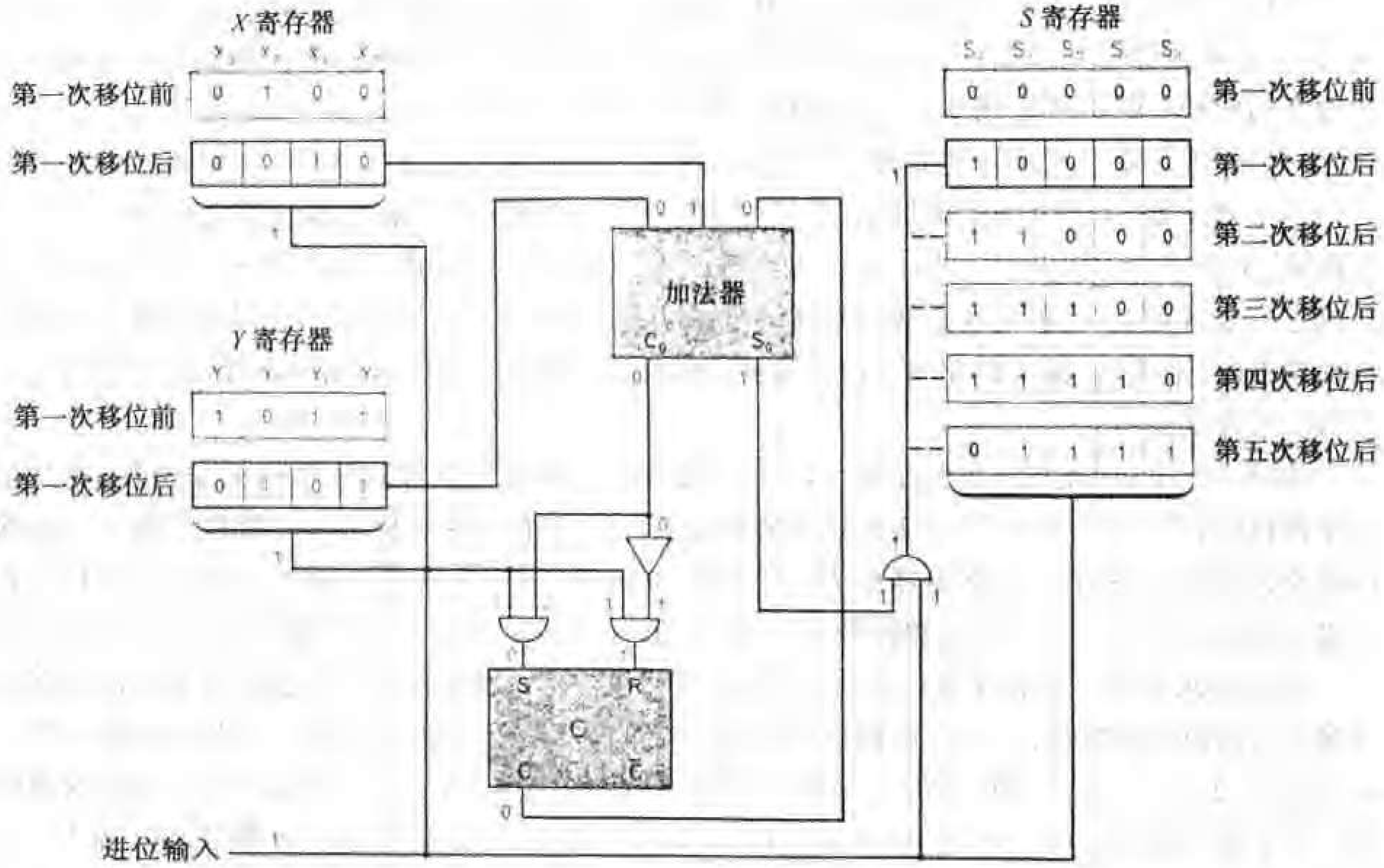
这个加法器的输入是二进制数 X 和 Y,同时还有"输入进位"C_{i-1}. 输出是和数 S 及"进位输出"C_i. 图上也阐明了应用与,或以及非等逻辑元件的二进制加法器是如何实现的. 一个如同这个二进制加法器的逻辑电路,只包含开关元件而无存储电路,被称为一个组合电路.

在运用二进制算术的计算机中，为了所得结果有所想要的精确性，算术单元可能必须处理多达 60 位或者更多位的数.（一台计算机能够处理 60 位的数，被称为有 60 位精确性.）这样长的数能够用两种一般的办法相加. 一个办法是对每一位用一个加法器；另一个办法是用一个单独的"序列的"加法器并且顺序地处理各个数位. 若对每一位用一个加法器时，这种装置就被称为一个并行加法器. 第 580 页下图展示了一个四位并行加法器. 这个加法器的输入是两个四位二进制数：$X_3X_2X_1X_0$ 和 $Y_3Y_2Y_1Y_0$. 这个加法器产生了五位二进制和 $S_4S_3S_2S_1S_0$. 这个四位加法器也是一个组合电路. 进入这个并行加法器的输入 X 和 Y 可以由两个四位寄存器（每个由四个触发器组成）来提供. 输入都在同一时刻生成，其和可以被贮存在一个五位寄存器中，它的每一位均已预先复位为 0.

要做一个序列加法器，我们需要一个方法来将输入的各个位按顺序送达该加法器，并且按顺序将和的各个位贮存起来. 为实现这些要求需要一个有能力将信息从一个级移位到下一级的特殊的寄存器；这样的一个寄存器称为一个移位寄存器. 一个序列二进制加法器的三个移位寄存器从称为移位(SHIFT)的终端得到一个输入（见第 582 页下图）. 正常情况下，移位信号之值为 0，但若要求把那三个寄存器移位时，该移位信号在一个短时间内被给为值 1，使得这些寄存器将它们的内容向右移位一位. 如同在并行加法器的情形一样，这个序列加法器可以把一组二进制数（例如 $X_3X_2X_1X_0$）加到另一组（例如 $Y_3Y_2Y_1Y_0$）上去. 在第一个移位命令时，该序列加法器贮存了头一对数位（X_0 和 Y_0）的和；在第二个移位命令时，它贮存了第二对数位（X_1 和 Y_1）的和，等等. 在每次移位时都要通过加法的进位输出.



真正的四位并行加法器能由连接两个单块集成电路而制成，每一块边长只有 0.06 英寸. 这个由德克萨斯仪器公司(TI)制造的加法器包含着等价于 166 个离散的组件.



四位序列加法器仅用一个如呈示在580页下方的加法器，再加上三个移位寄存器和一个触发器来作各位加法的进位输出. 每个寄存器有一个来自称为移位(SHIFT)的终端的输入. 当移位信号来时每个寄存器将其内容往右移位一位. 从 X 和 Y 寄存器移位出来的数位同时与来自 C 触发器的进位输入进入加法器. 要把两个四位二进制数加起来，需要五个移位信号.

对于序列的和并行的加法器，寄存器都是需要的. 对于序列加法器、寄存器必须是移位寄存器，但只需要一个一位二进制加法器. 对于并行加法器，正好每一位即每一对 X 和 Y 输入需要一个二进制加法器. 并行加法器只是一个大的组合电路. 序列加法器包含二进制加法器，一个触发器(在此称为 C 触发器)和相配的电路. 它不是一个组合电路，因为它的输出(S)不仅是直接输入(X 和 Y)的函数；它还是 C 触发器中贮存的值所表示的内部状态的一个函数. 若一电路之输出不仅是直接输入的一个函数，而且也是其内部状态所表示的历史的函数，这种电路就称为序贯电路. 这种电路对于计算机的设计是基本的. 例如，乘法通常用一个反复运行加法器电路的序贯电路来实现.

计算机的发展中的很长的时期，限制它们的设计和成本的因素是存储器. 计算机的速度受到贮存和提取信息所需要的时间之限制. 计算机的成本由其存储器的信息贮存量所决定. 结果是，付出了很大的努力来发展和改进存储装置.

我前面描述过的，典型的存储器是由同样尺寸的寄存器的一个阵列组成的，其特性是字长，贮存量和存取时间. 在一个存储器中每个寄存器称为一个字；它的大小用比特表示，典型情况是在 12 到 72 比特的范围内. 一个存储器的全部贮存容量可以表作比特数，但是更常用的是表作字数，它依赖于各种因素. 后面将会讲到，其贮存容量约在 100 字到十亿字之间. 贮存（写）和提取（读）信息中一个确定的字所需要的时间称为存取时间，它可从一微秒的几分之一到几秒钟甚或几分钟.

在一个存储器中访问一个特别的字是用一个寻址方案来完成的. 有两类寻址方案："构造寻址"和"内容寻址". 第一种是较普遍的，每个字用一个数给定，就用这个数来识别存储器，这个数称为它的地址. 访问一个存储器的一个特定的字只需指定，这个地址则是一个二进制的数. 采用内容寻址，访问是决定于被搜寻的字的内容. 例如，内容寻址存储器的每一个字可以包含一个人的名字和有关他的某些信息（例如他的银行存款余额或者他的机票定座情况）. 访问那个信息时就向存储器提供那个人的姓名. 该存储器的内部逻辑将把那个包含着指定姓名的字找出并递送这个姓名以及相关的信息作为输出. 因为大多数存储器是构造寻址的，我们不再考虑内容寻址了.

在各种存储器的设计中，成本，容量和访问时间之间有很大的折衷余地（见 586 页上表）. 大多数存储器采用三种存取方法之一：随机的，周期的或者序贯的. 在随机存取存储器中，访问时间与字存入或取出的顺序无关. 随机访问时间很短的存储器是最理想的，但是每比特的贮存容量的成本也是最昂贵的. 随机访问存储器应用磁芯装置最为广泛. 提供周期访问的存储装置的一个例子是磁鼓，在其中信息被记录在一个圆柱体的表面，它以常速率旋转. 顺序地存入的字当它们经过读出位置时能够被迅速地读出. 最大的访问时间是鼓的转一圈的时间，而随机提取一字平均访问时间是鼓的半转的时间. 最普通的序贯存储器是磁带，当既不需随机也不需周期访问时便采用它. 开动一个典型的含有 5 千万个比特信息的 2 400 英尺长的磁带通过一个磁头需要几分钟时间.

因为计算机中的主要存储媒介是各种各样的磁性材料，我将要比较充分地描述磁性存储器. 在一个典型计算机中高速随机访问存储器通常由一个大约一百万个微小的磁芯或磁环的三维阵列构成，每个磁芯或磁环可贮存一个比特的信息. 磁芯穿在细导线网络上，导线可以改变磁心的极性；极性决定了一个特定的磁芯贮存一个 1 或者一个 0. 这些磁芯是用铁氧体制作，这是一种铁磁性的陶瓷材料. 已经设计出高度自动化的方法来把磁芯成型，煅烧，测试和组装成为存储阵列. 早期的磁芯存储器磁芯的外径大约十二分之一英寸，并且价值大约每一比特贮存容量 1 美元. 这些存储器的一个循环时间（从一个访问循环的开始到下一个循环的开始的最小时间）是

在10到20微秒之间.

随着工艺的发展,磁芯的尺寸减少了,循环时间也减少了,但最大容量增加了.在大多数现代计算机中磁芯的直径是二十分之一英寸;循环时间在0.75微秒到两微秒之间.最快的磁芯存储器的磁芯的直径小于五十分之一英寸,并且循环时间少于500毫微秒(半微秒).

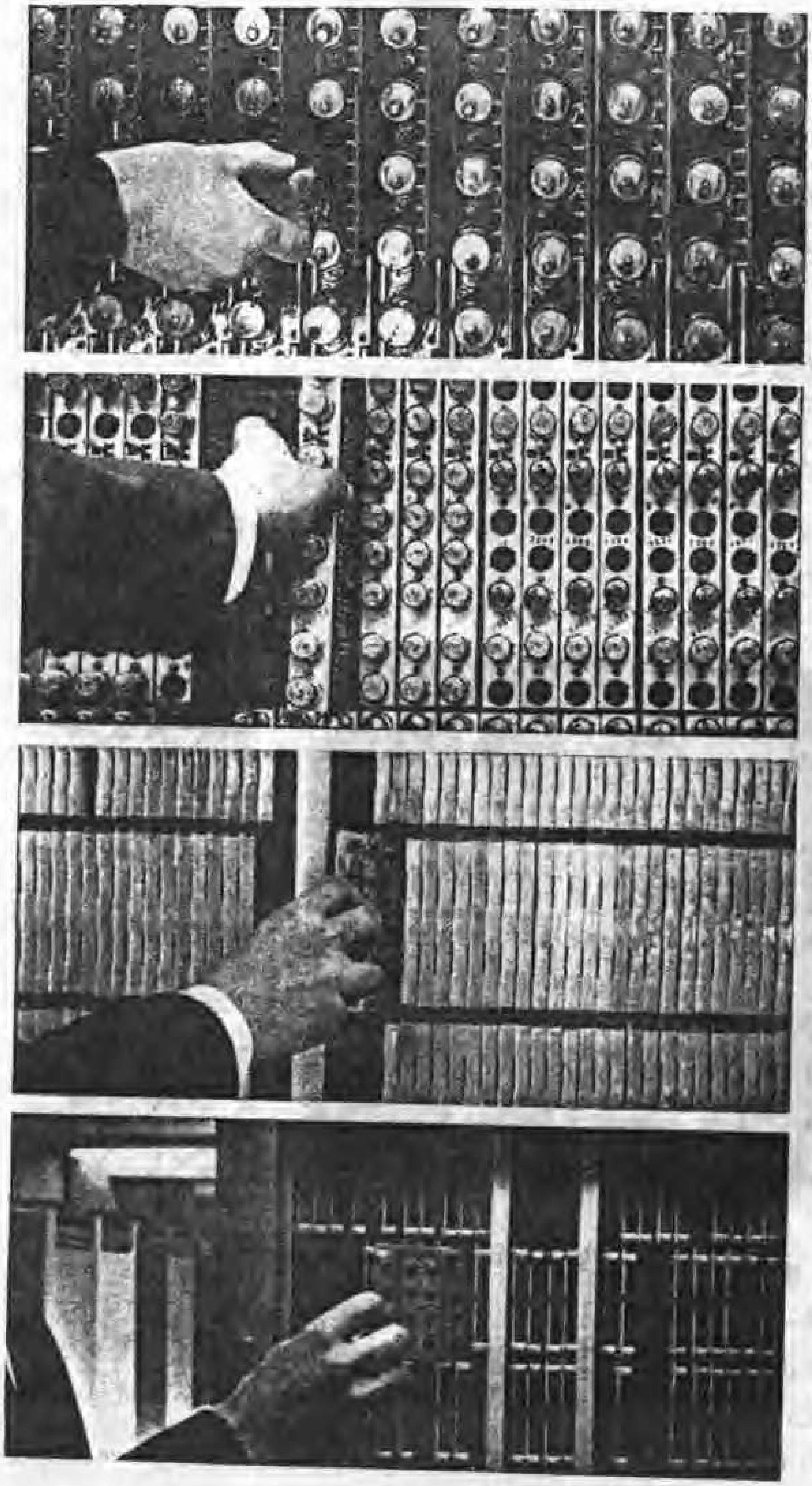
对于随机访问磁性存储器的材料最重要的要求是它需具有特别的磁性特征,使得在一个由这种材料制成的大元件的阵列中,每一个单独的元件可以稳定地按两个方向之一磁化.在1950年代早期就发现某些薄的金属膜有这种特征(见575页之图).自从这个发现以来计算机的设计师们的长期梦想是开发一种实用的大容量的存储器,它可以直接用大量材料构作而不用一个一个比特地对个别离散的部件加工测试然后再组装.设想了薄膜存储器的多种几何外形,包括平膜和缠在导线上或玻璃杆上的膜.有一些薄膜存储器已在使用,更多的将在将来被使用.可以预料在几年之后随机访问存储器的成本将急剧下降.

另一个广泛应用的存储器技术中,则是把磁性材料的薄膜被覆在某种曲面上,如一个塑料带或卡片,或者一个金属的鼓或圆盘上.这个磁性曲面可以相对于磁头移动,从而能够在该磁性薄膜上产生或探测磁化模式;这些模式当然是用编码表示的二进制位1和0.这个用作磁记录的薄膜通常用研磨得很细的氧化铁并利用少量有机黏剂涂敷于表面上而成.对于磁鼓和磁盘,其磁性材料通常由一种镍钴合金的金属膜组成.

大约千分之一英寸厚,半英寸宽并有2 400英尺长的一卷磁带可将大量信息保存多年.磁带系统已经发展到一个很高的阶段:磁带可以每秒100多英寸的速度通过磁头,并且可在数微秒之内起动或停止.通常横跨磁带之宽度可写下六或八个位;通常在每英寸长磁带上可写800个六位或八位组.在信息处理系统中,现在的趋势是使用磁带以作保存或用它将数据从一个地方搬到另一个地方.具有较短随机访问时间的磁记录装置起到了活档案贮存功能的作用.

具有几亿字容量和几秒甚至更少的访问时间的存储装置正在开始投入使用.这些装置应用了一批磁卡或磁带由各种灵巧的机构操纵(见590页之图).

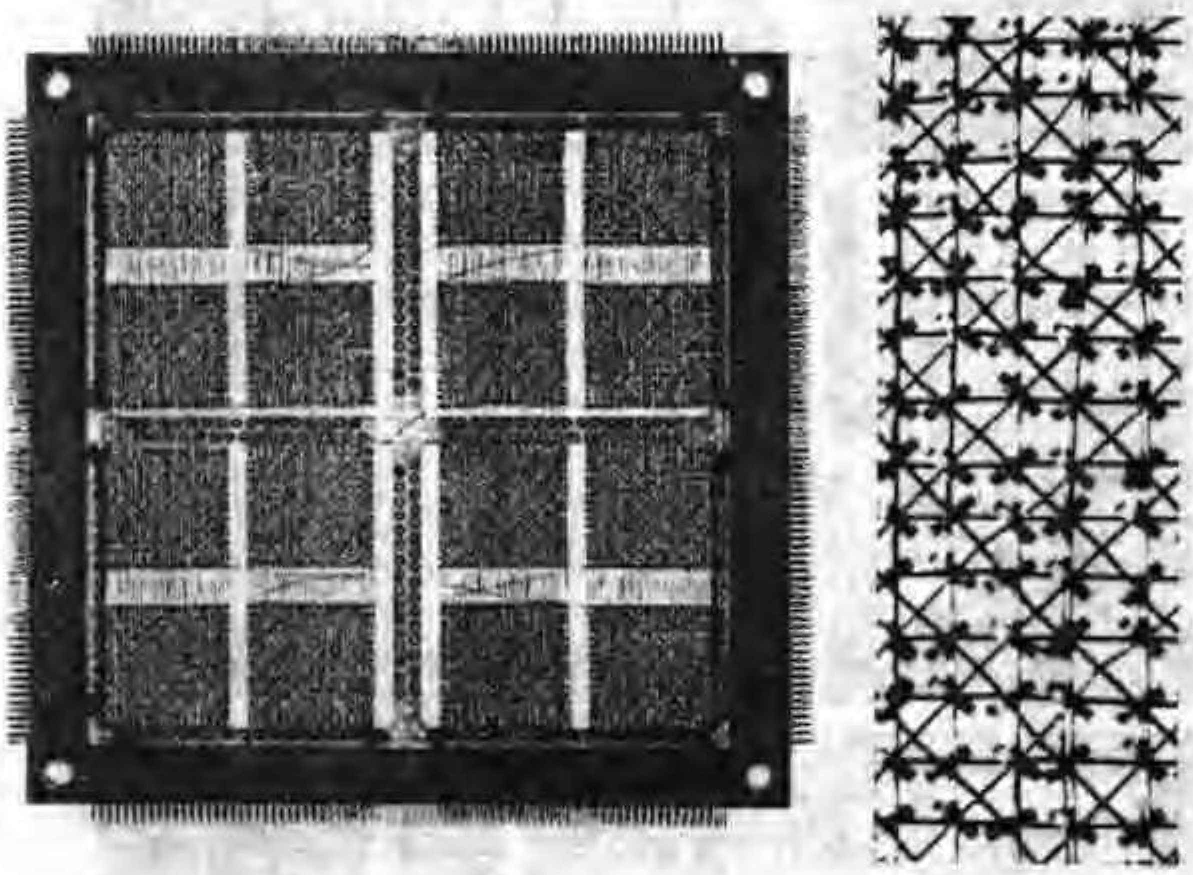
在应用高速旋转的磁鼓和磁盘的存储系统中,读和写信息的磁头在曲面上相隔只有不到千分之一英寸.曲面的速度是大约每秒1 000或者2 000英寸.在早期的磁鼓系统中为保持磁头与记录表面的间隔遇到严重的机械的和热的问题.最近几年由于应用了飞行磁头,它们用在跟随着磁鼓或磁盘旋转的空气的附面层上"飞行"的办法使其运行和可靠性得到很大的改善.一台现代的磁鼓存储器有262 000字的容量并且每分钟旋转7 200转;其随机访问时间约为四毫秒而信息转移速度为每秒1 120万比特.



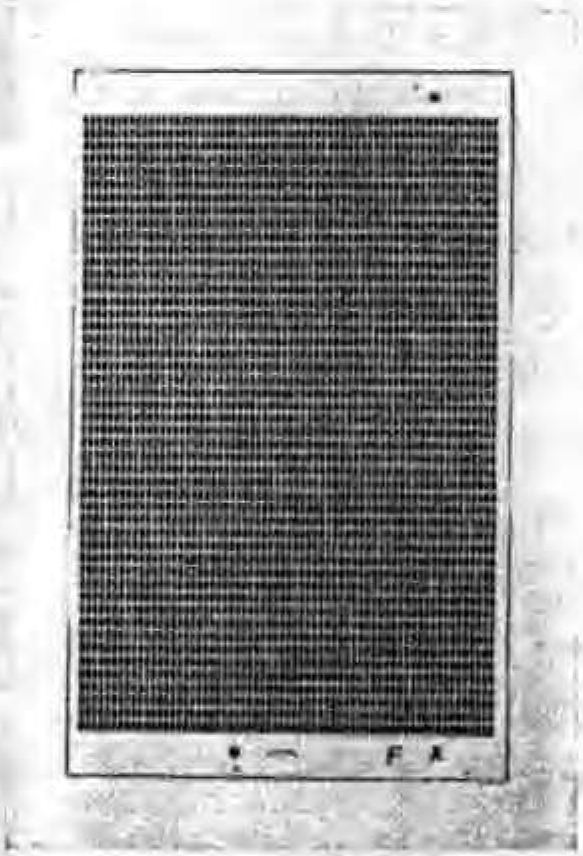
电路的演化反映在这些相片中，它们呈示了四代计算机的中央处理单元. UNIVAC Ⅰ（上一图），第一台大型商业电子计算机，使用真空管逻辑电路. 第一台机器于 1951 年交付人口调查局. IBM704 型（上二图）是一个使用得很广泛的大型的真空管和磁芯存储器计算机. 第一台 704 于 1955 年末安装. IBM 于 1963 年推出了第一台 7040（上三图），这是一台典型的应用离散部件的晶体管化的计算机. 斯拜克特拉（Spectra）70/45（下），最近由美国无线电（RCA）公司交付，代表最新的一代. 它用了类似于 581 页上图所显示的单片集成电路.

存储器类型	随机访问时间(微秒)	信息传输率(每秒比特)	容量(比特)	成本(美元/比特)
积成电路	10^{-2}—10^{-1}	10^{9}—10^{10}	10^{3}—10^{4}	10
典型磁心或薄膜	1	10^{8}	10^{6}	10^{-1}
大慢磁芯	10	10^{7}	10^{7}	10^{-2}
磁鼓	10^{4}	10^{7}	10^{7}	10^{-3}
磁带卷或卡片	10^{6}	10^{5}	10^{9}	10^{-4}
照相	10^{7}	10^{6}	10^{12}	10^{-6}

存储系统的比较:在访问时间和容量方面之比大约可达 10 亿比 1,按每比特成本达到约一千万比 1. 信息传输速度相差不大:从最快的存储器到最慢的大约 10 000 比 1. 集成电路存储器(类似于逻辑电路)和照相存储器(用于数字贮存)刚刚出现.



磁芯存储器已经多年来成为计算机中的标准快速存储器. 左图是一个典型的磁芯存储器平面图,约为实际大小的三分之二;此平面图的一部分按直径放大 10 倍于右. 这个实例是由法布里特克(Fabri-Tek)公司制造的,包含 16 384 个铁氧体磁芯,每个直径为五十分之一英寸.



薄膜存储器由巴洛斯(Burroughs)公司制造,它运转起来比磁芯存储器更快,此图是实际大小. 575 页上是它的放大图.

磁性信息贮存遇到了其他的存储技术在两方面的竞争：比较小的信息贮存必须用最短可能的时间完成，而特别大的信息贮存必须在几秒内完成. 第一个任务，今天通常用磁芯和薄膜来实现，人们现在能够用生产单块集成电路的同样技术来制造存储器（参见“微电子学”，希廷格(Willian C. Hittinger)和斯帕克斯(Morgan Sparks)著；《科学美国人》，1965 年 11 月号）. 这种电路有点像触发器，可以用细小的晶体管和电阻制成；几十个这种元件能够装配在不到十分之一平方英寸的面积里（见 590 页下左图）. 一个这种存储器可以贮存 100 个字并且随机访问时间为 100 毫微秒. 虽然现在这种存储器的成本为每比特几美元，到 1970 年时其成本将降到每比特几美分. 集成电路存储器有其缺点，即每一个元件连续不断地消耗功率（不像磁性元件），而不论它是否在执行读（或写）的任务.

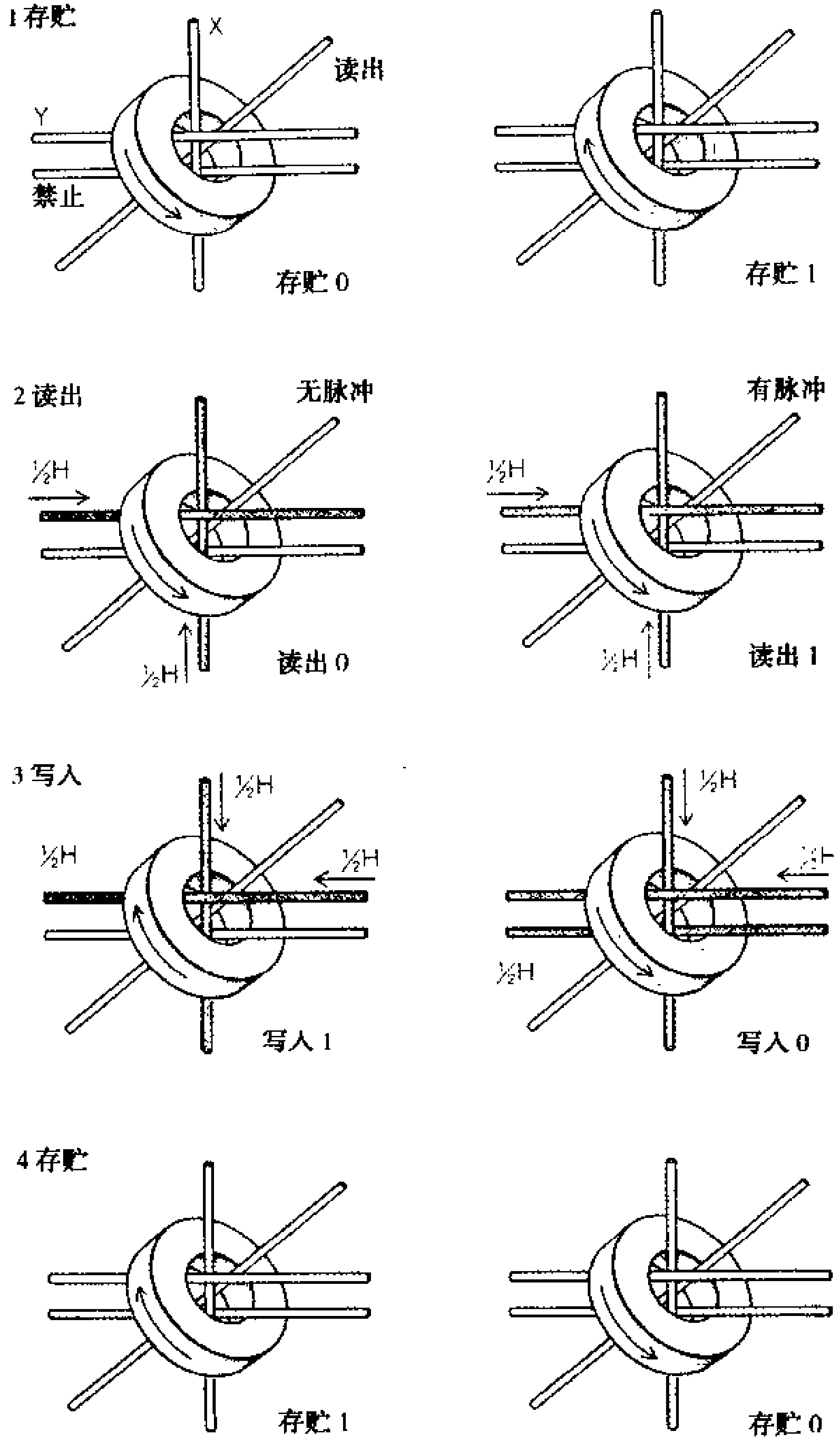
对于很高容量的贮存和中等快的访问时间，磁性装置正受到高分辨率摄影术的挑战. 在这些系统中，比特被记录为密集在透明卡片或者摄影胶片的短条带上的点子. 大约在下一年中将会有好几个这种系统投人工作；每一个都有 10^{11} 到 10^{12} 比特容量，而最大访问时间不过几秒.

为了把很快的平均访问时间与大贮存容量以及最低的用户成本结合起来，计算机的设计师们最近引进了“虚拟存储器”概念. 这样一个存储器，模仿一个大的快速随机访问的存储器，但是它把信息分成若干等级(hierarchy)，且带有一个控制机构，此控制机构把信息在各个等级层之间移动，而设计了一个策略，使访问时间达到最小.

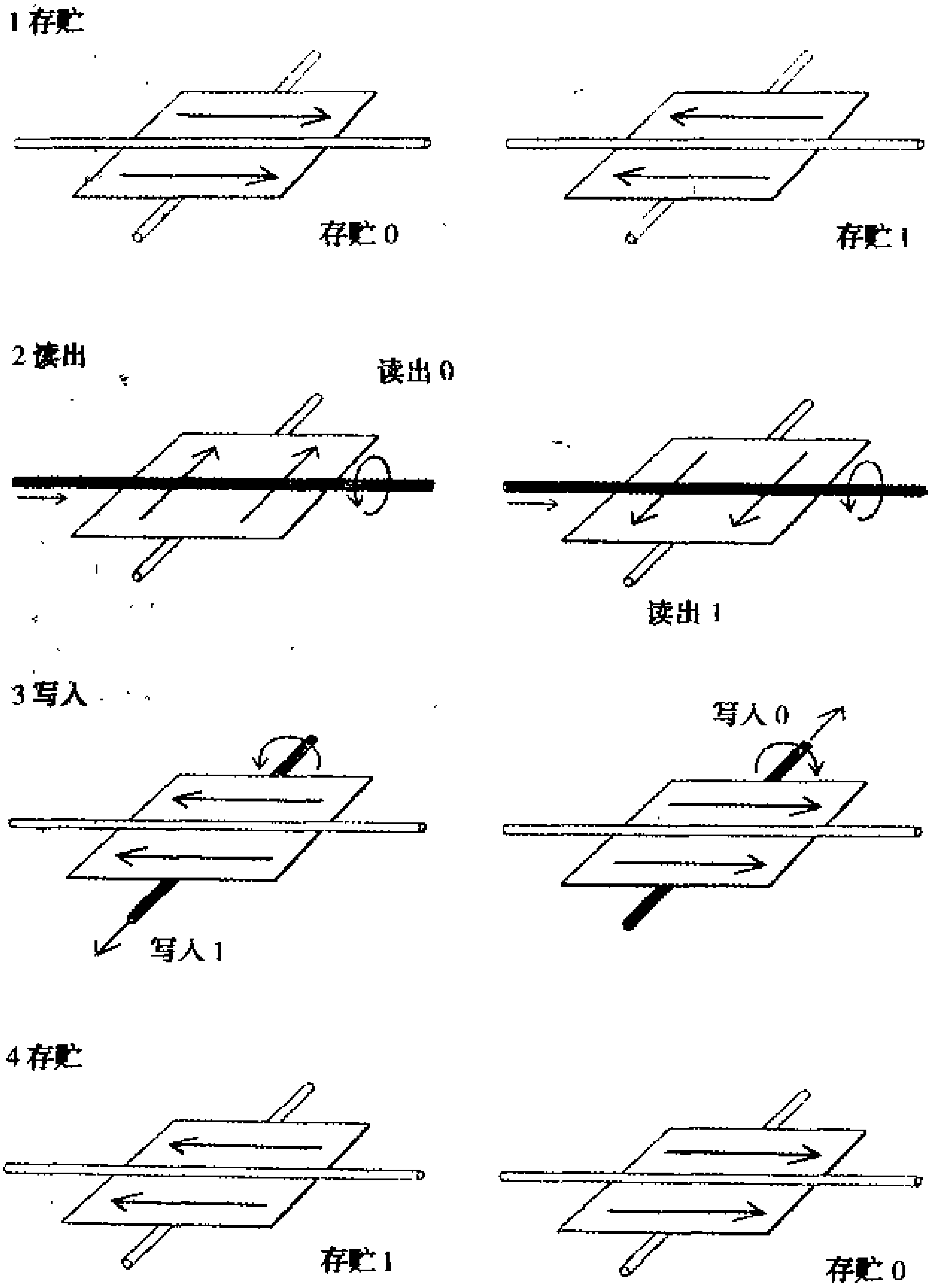
一个很大的现代计算机的逻辑和主存储包含着近五十万个晶体管和更多的电阻以及其他的电气元件，还有一千万个磁芯. 这样大的一个机器，甚至在较小的，零件数只有其十分之一或百分之一的机器里，装配，连接以及可靠性方面都提出了非常严重的设计问题.

在早期的电子计算机中主动的电路元件是真空管. 这些计算机曾遇到三个大问题. 第一，管子坏损率是如此之高以至在大型计算机不工作的时间所占的比例几近不可接受的程度. 第二，由真空管消耗的功率是如此之大以致充分的冷却是非常的困难. 第三，其部件是如此之大，使信号必须走的距离限制了计算机的速度，以至今天看来这种计算机是很慢的.

1948 年发明了点接触晶体管. 它很小并且耗电少，但是它的性能很不稳定，因此不能在大型计算机中取代真空管. 几年以后，结合式晶体管开发出来了，但它太慢. 在 1957 年发明了平面硅晶体管. 这便提供了高速晶体管，它们可靠并且使得现在的高速计算机的设计成为可能. 平面技术的进一步发展导致单块集成电路，在其中几十个部件被制成和连接起来而置于一块单独的硅的小“芯片”上. 改变一下这个技术就生产出了集成电路存储器.

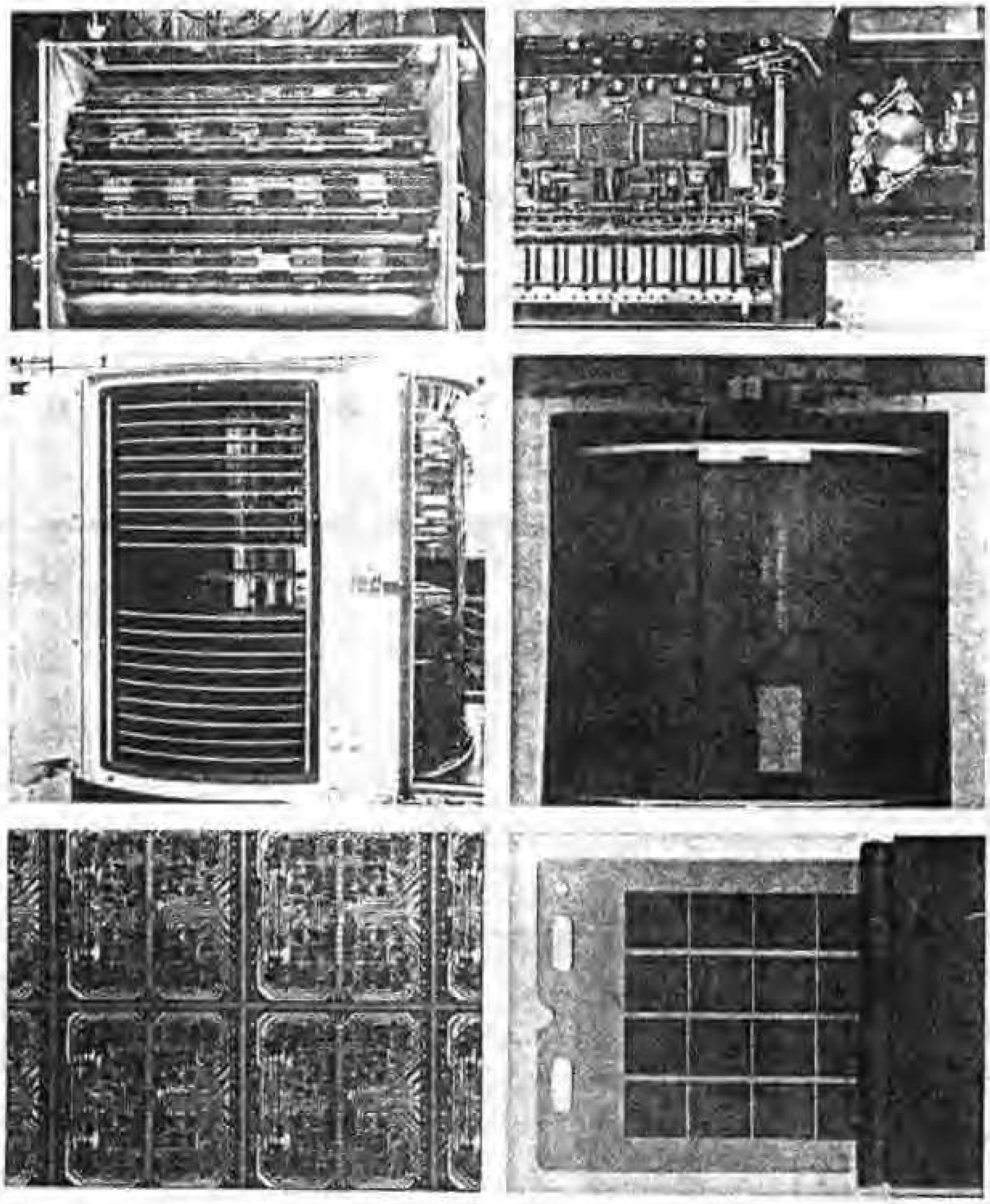


磁芯存储器的运转是将磁芯磁化或极化方向在两个位置之间转换来实现的. 这两个位置相差 180°. 选其中一个位置表示 0, 另一个表示 1. 信号的"读"和"写"由两条导线(X 轴和 Y 轴)来承担, 每条导线只承载改变磁芯极化方向所需电流之一半 $\left(\frac{1}{2}H\right)$. 在读循环中电流方向的选取使得脉冲把一个贮存了 1 的磁心的极性反转, 结果在"读出"导线上产生了一个表 1 的电压脉冲. 从贮存了 0 的磁芯无脉冲发出. 在写循环中在 X 和 Y 两根导线中的电流均反转. 这便反转了磁芯的极性并写入了 1 除非一个相反的电流正好同时通过一个"禁止"导线, 这时磁芯极性仍保持为 0 位置. 一个典型的存储器含有一百万个磁芯.



薄膜存储器的运转不同于磁芯存储器.一个区别是:读出的是一个0还是1,取决于读出导线中电压脉冲的极性而不是电压的有无.还有,在薄膜存储器中读出和写入是采用电流通过不同的导线来完成.最后,导出一个读出脉冲的磁化方向的改变只有90度的旋转而不是180度.

集成逻辑电路才刚刚开始应用于大规模计算机,就对困扰着真空管计算机的上述三个问题作出了很大贡献,而用离散的晶体管只能部分解决.在一块小硅片上的一个集成电路能有好多个前面描述过的逻辑电路的逻辑容量.它与等价的晶体管电路比较体积小得多而且耗电省得多.它的小体积使高速系统成为可能,因为电路之间的连接短了.可靠性也增加了,因为连接本身是可靠的.事实上,整个一个集成电路的可靠性预期接近于一个单个的晶体管的可靠性.最新



各种不同的存储器系统基于磁性，电子电路和摄影术. 由斯皮里—兰德(Sperry Rand)公司为UNIVAC制造的磁鼓存储器(上左)可以在17毫秒内访问786 432个36比特字或四百七十万个字母数字字符中的任何一个. 由RCA建造的"随机访问计算机装置"(上右)将信息贮存于2 048个软塑卡片中. 基本单元可保存三亿四千万个字母数字字符；平均访问时间为385毫秒. 由控制数据公司制造的磁盘存储器(中左)可以在34至110毫秒内访问一亿三千一百九十万个六比特字符中的任何一个. 由IBM提供的"数据单元"系统(中右)将数据贮存于2 000条磁薄膜窄带中. 它可以在175至600毫秒内访问八亿比特的信息. 集成电路存储器(左下)可在大约0.01微秒内访问16比特信息. 这个例子由莫托罗拉半导体产品公司制造. IBM已经设计出一个新的照相数字存储器(右下)可以快速访问含有一万亿比特的存储档案. 一个1 3/8英寸乘2 3/4英寸的单片薄膜能贮存好几百万比特的信息；IBM尚未完全透露其确切数目.

的集成电路的信号滞后仅有几个毫微秒，并且正在开发更快的电路. 不过，一个计算机的部件加上它们的连接的物理尺寸仍然是计算机复杂程度的基本限制：一个电信号沿着导线走，只能有每毫微秒大约八英寸的速度(光速的三分之一).

计算机技术的发展常使预测其前景的人迷惑. 例如，薄膜存储器已是若隐若现有十多年之久，然而铁氧体磁芯仍然是随机访问存储器的主要元素. 无论如何，你可以试图基于目前的形势做出某种预测. 现在似乎看得很清楚，集成电路技术将会很快地生产出低成本的极为复杂的电路. 这些电路将包括高速存储电路和逻辑电路. 已经可以购买到在十分之一英寸见方的单晶硅片上的 100 比特的寄存器. 我个人的看法是：计算机的设计者们受到很大的压力去发展合适的概念以利用部件的快速进步.

由于用集成电路建造的计算机会比现在的计算机便宜得多，人们可以期望在信息处理和信息传输方面的比较成本有重要的变化. 这反过来将影响数据传输设备成长的速度. 低成本的计算机也会改变决定用人工去干还是交给机器去干何者更便宜的成本因素.

46.

计算机在科学中的应用

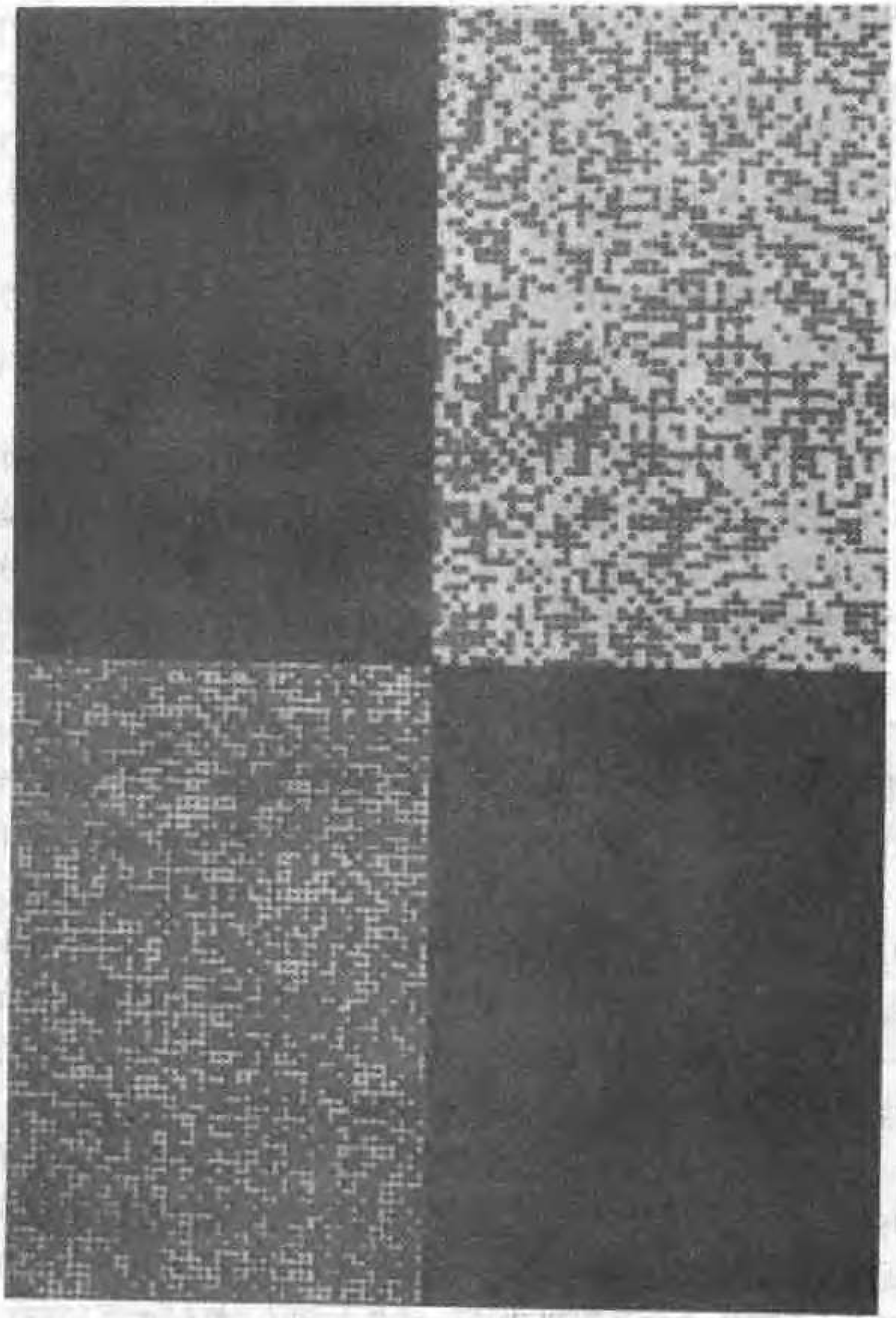
安东尼·G·厄廷格(Anthony G. Oettinger),1966年9月号

在科学应用中计算机被分派扮演了两个截然不同的但又互相补充的角色:既作为一个工具同时作为一个操作者.计算机在这两个角色中的部分成就能够归之于纯粹经济的因素.做计算的实际成本要比做实验低,从而计算机已经在许多领域以大规模的计算取代了以前仅能实行实验和较为直接的测量.

计算机作为一个工具的角色在两个角色之中是清晰和肯定的.然而,另一个角色是作为科学理论发展的一个积极的参加者,计算机能对科学做出最深刻的影响.一门用数学语言表示出来的物理学理论当用计算机程序写出来时,通常就能动态地研究它了;你能探究其内部结构,与实验数据作比较并且解释其含意要比当它在静态时要容易得多.在那些不以数学为主要的表现形式的学科中,计算机的程序语言越来越充当着科学语言的作用.当讨论了计算机作为实验研究中这个较为人知的工具角色以后,我将回到理论的动态表示这个题目.

科学进展的标志是从观察的现象的普通的感知经验到有理论支持的直觉,两方而起了一系列越来越快的分离.关于折断一根火柴杆和一根铁棒所需的力,每个人都至少能作出定性的比较.然而比较使一个氢原子电离所需之力与束缚氢核之力则是很间接的了,因为从现象到观测到解释这个链条是很长的.计算机由于能重建感官的经验和使直觉变得尖锐,将完全改变实验分析的形象.

计算机作为一个研究的工具的角色,能由考虑在 X 射线晶体学的领域从粗糙的观测到直观地易懂的表示之链条而立刻懂得.确定蛋白质的巨大分子的结构是现代科学的最引人注目的成



这里的黑白点的对称图案是由计算机为一个视觉实验作的. 该图案有绕着中心点的四重对称性,类似于在万花筒中产生的图案. 在实际实验中包含图案的透明幻灯片放映出各种颜色以看出在不同的彩色组合下,能多么好地保持对称性的感觉. 在这种实验中色彩被调整到有相同的主观亮度;这很难用墨水来做,在本图中也没有打算这样做. 这个实验是贝尔实验室朱勒兹(Bela Julesz)领导的模式和视觉研究的一个部分.

就之一.这项工作的最精彩的部分在《科学美国人》的许多论文中报导过,最值得注意的有肯得鲁(John C. Kendrew)的"一个蛋白质分子的三维结构"(单行本#21),和皮鲁兹(M. F. Perutz)的"血红朊分子"(单行本# 196).对于蛋白质分子的可视模型的准备所花费的劳动,操心和费用足以证明在这个领域中强烈需要直观的帮助.分析晶体学数据所需的计算的能力是如此巨大,所以对高速计算机的需求是毫无疑问的了.

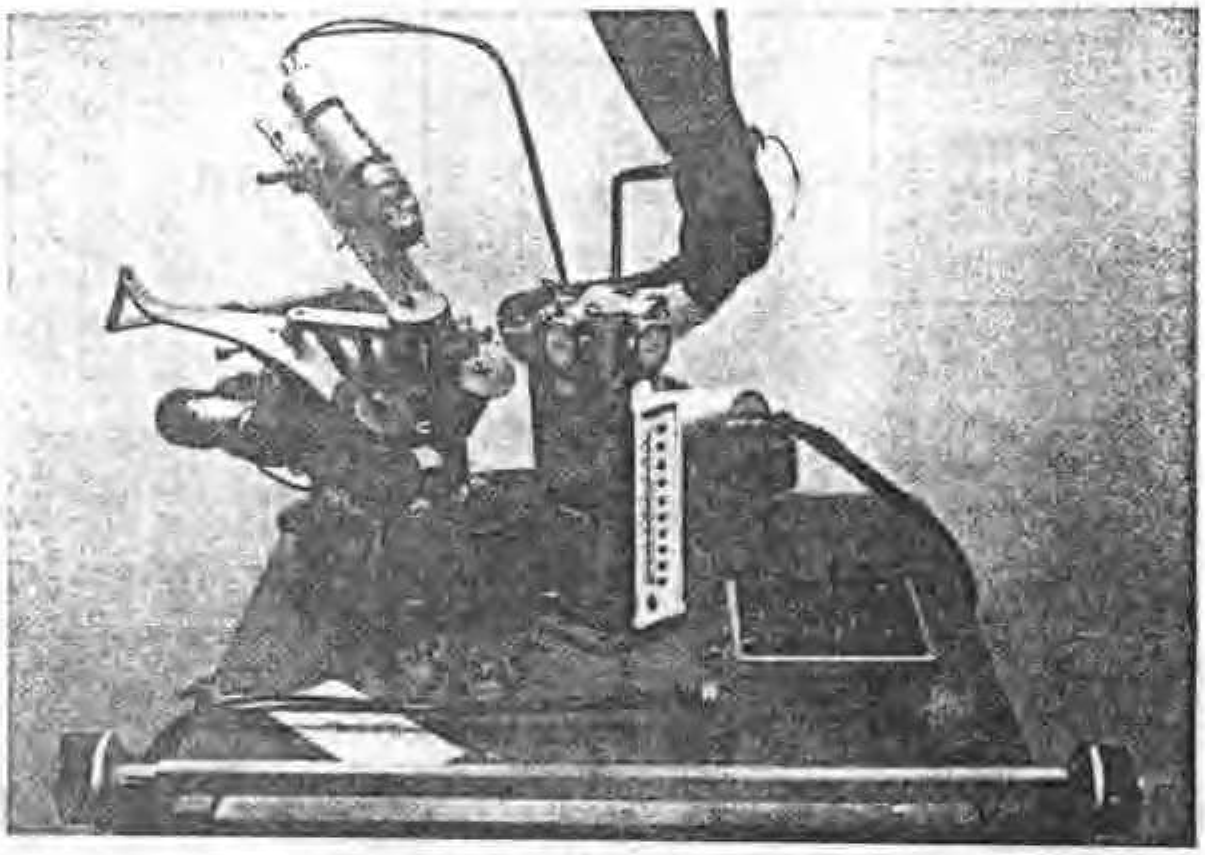
最近在 X 射线晶体学方面的实验的范围和清晰度正比于计算机能力而增加.虽然计算机看来对于这个领域的进展是必需的,然而,只有它们还绝不够.在确定蛋白质分子结构的成功的故事中,包含着理论的洞察,实验的技术和计算的能力的交互作用.

在这一类研究中,一个旋转的蛋白质晶体被一束 X 射线轰击;被晶体衍射的射线记录在照相底版上,在那儿它们在黑的背景上产生出由亮点构成的特征图案.衍射图案中的点子的相对位置和强度之测量数据是计算的原始材料,由此可得在分子中电子的三维分布的坐标的一个表.然后用电子密度数据来画出密度曲线图,它被解释成所研究的特定的蛋白质分子的一个三维模型.

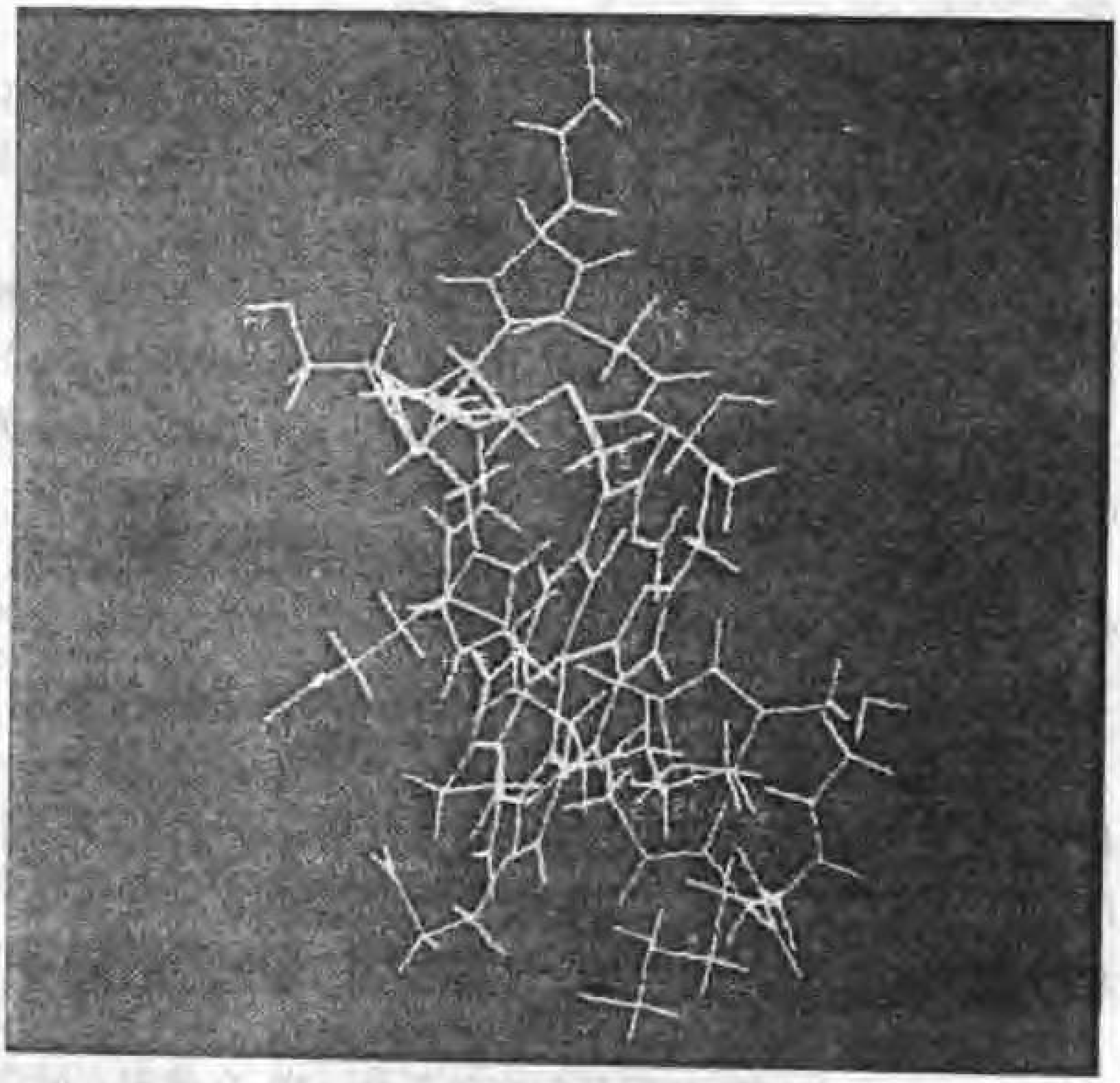
这个链条的许多环节现在是自动进行的.例如,照片的艰苦的手工测量不再必要了.在哈佛大学,小里普斯康姆(William N. Lipscomb, Jr.)的实验室里,装入一个晶体,令其自动地旋转而按要求转过一系列的方向,同时一个光电倍增管测量衍射 X 射线的强度(见 595 页上图).机器将位置和强度的信息转变为数字形式并且将它记录在穿孔卡片上作为计算机之输入.

在这个链条的另一端,麻省理工学院(MIT)的勒温萨尔(Cyrus Levinthal)和哈佛的朗瑞奇(Robert Langridge)使用了 M. I. T. 的 Project MAC 的分时计算机和显示设备来发展一套极好的程序,它们接受一个三维区域计算的电子密度并将其转变为示波器上的一个分子结构的图像(见 595 页下图).绘制和构作电子图,这是一项非常耗时的任务,现在已不再需要了.一旦一个分子的图已经对于一个标准方向计算出来,方向可以随意改变,只要用到简单的控制开启特殊的电路来变换图的坐标,然后显示它就行了.微小的移动给人以极好的深刻洞察而无需花费立体体视镜.那个分子能够转得使得可以从各个角度来看它,或者能用一个平面去切它使得能看它的截面(参见勒温萨尔的"分子的计算机建模";科学美国人,单行本#1043).

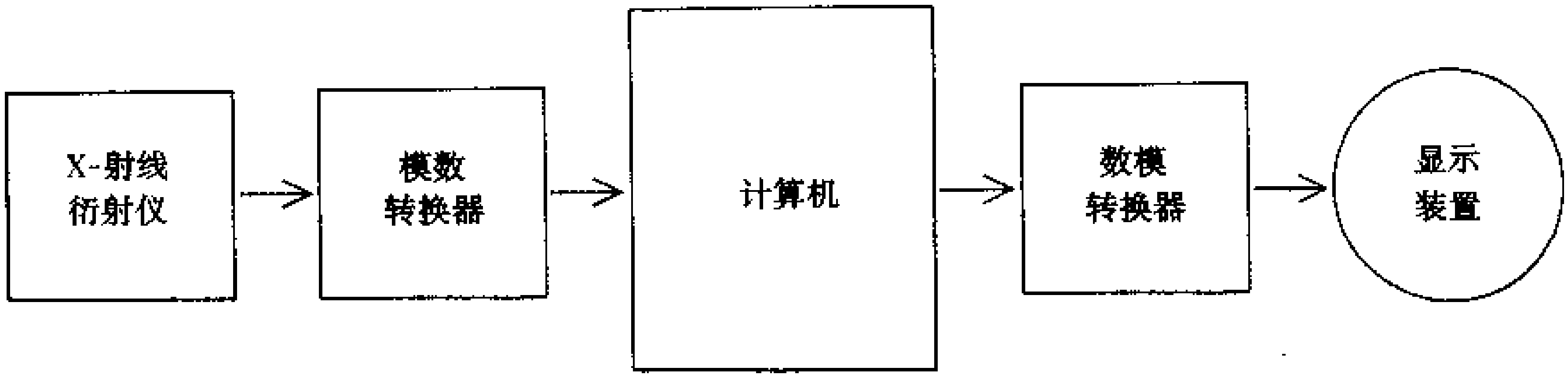
下一个步骤是将这两个环节连接起来.一个新的同轴电缆网络很快会将里普斯康姆的原始数据直接发送到哈佛计算中心的计算机中.把计算好的电子密度进一步传输到 MIT 的系统中没有技术上的障碍,那儿能够准备分子显示,然后再送回,以便在实验场所的一个屏幕上直接观看.一旦分时计算的效用从它目前的实验阶段显现出来而推广到遍及各科研机构和各地区,这种做法将会普及开来(参见法诺(Fano)和柯尔巴托(Corbató)的"计算机上的分时",《科学美国人》,



哈佛大学的小里普斯康姆的实验室的 X 射线衍射仪器使得有关晶体结构的 X 射线衍射相片的很费力的人工测量成为不必要的了. 一束 X 射线(从中心处的小匣发出)射向一个安置好的晶体(例如蛋白质),晶体被自动地旋转而转过一系列的方向,同时一个照相放大管(上左)测量衍射射线的强度. 然后把有关衍射的射线的位置和强度从模拟的转变为数值的形式并且被记录在穿孔卡片上以作为计算机之输入.



蛋白质分子模型被显示在麻省理工学院(MIT)勒温萨尔的实验室中的一台示波器上. 分子的电子密度由分析 X 射线衍射相片而确定. 一个计算机程序将电子密度的测量转变为示波器上的分子结构一个片断的一个映象. 一旦该分子在某一个标准方向上的图像已经被计算出来,就可以按意愿用简单的控制来改变方向.



在上一页中展示的两个设备的联接是在 X 射线晶体学领域中迈向一台"透明"计算机的下一步骤.新的同轴电缆网络很快将利普斯康姆的原始数据直接送到哈佛计算中心的计算机.计算好的电子密度将进一步顺利地传输到 MIT 的系统中,那里能够准备好分子显示然后送回实验场所的一台屏幕供直接观看.因此如同现在通过一台显微镜来直接看细胞一样,可以"通过"一台计算机来"看"蛋白质分子.

1966 年 9 月号).容易想像一位研究生通过一台计算机来"观察"一个蛋白质分子正如同今天他通过一台显微镜来观察一个细胞一样容易.

透明计算机这个隐喻描写了现代"软件"工程学的主要目标之一,它是信息工程学的一个分支,涉及开发复杂的程序(软件)以便将一大堆笨重的仪器(硬件)转化成一个很有效能的工具,并像笔和纸一样容易使用.正如任何人都能证明,如果一个人为了一个常规的计算服务而等待了一两天甚至更久,而他的工作仅仅由于发现一个点错位置的逗号被打了回来,造成这项工作无论如何不能完成,他立刻明白,这里少的恰好是瞬时的透明性.虽然如此,本文附了一些参考文献,讲的是关于如何使计算机语言更易于亲近且富有表现力,使与计算机的交流更容易,好像计算机就在手边一样.看看这些文章,就知道人们已经花了多大力量来追求一种透明计算机了.

少数批评者反对透明性原则,因为他们害怕其第一个结果就是导致智力萎缩.更为可能的结果则是当对分子本身的兴趣超过了对于决定分子结构过程的兴趣,这时,人们就会简单地接受仪器,而对智力的挑战将出现在另外的地方.到了 1960 年代,在一台计算机的显示屏上看一个蛋白质晶体,比之通过显微镜的目镜来观察一只草履虫并不显得低人一等,缺少浪漫情调,科学水平不高.现在谁也不会在需要观察一张显微镜涂片时再去重复惠更斯(Christian Huygens)的工作.不管怎么说,计算机现在基本上是如此能适应人的要求,人认为应该由人的直觉和判断来指导硬算,现在,除非是因为笨拙的设计和差劲的工程才会打断你使用计算机的过程.

当然,重要的是任何人都要充分了解他的工具才能很好地去用它,关于这一点,计算机正如其他的普通工具一样.如同任何好的工具一样,在使用它时应该尊重它.应用"数据简化"对庞大

的一堆没有充分的试验设计的数据，就使用"数据简化"技术，这只能怪主人愚蠢，而怪不了计算机这个仆人. 计算机使用者关于它有一个缩写词：GIGO，意思是"垃圾进，垃圾出（garbage in, garbage out）".

X 射线晶体学是使用类似的仪器的诸多例子中发展得最好的. 由哈佛和麻省理工学院共同运作的剑桥电子加速器的四个实验站最近与哈佛计算中心的一台分时计算机连机，作为第一步的联结. 每个实验站在一台小计算机上将仪器读出的数据从模拟形式改变为数字形式，将它们写为合适的格式并且传输到远距离的计算机中. 那里大多数数据被贮存起来以备以后详细计算之用；少量的数据被加以检验核对并指令每个小的局部计算机把信息显示出来以便告知实验者，他的实验进行得是否正常. 迄今，常规的批处理过程的延迟有时甚至导致长时期的实验毫无用处，因为不能及时觉察并恰当的调整，直到全部计算都作废并被迫返工.

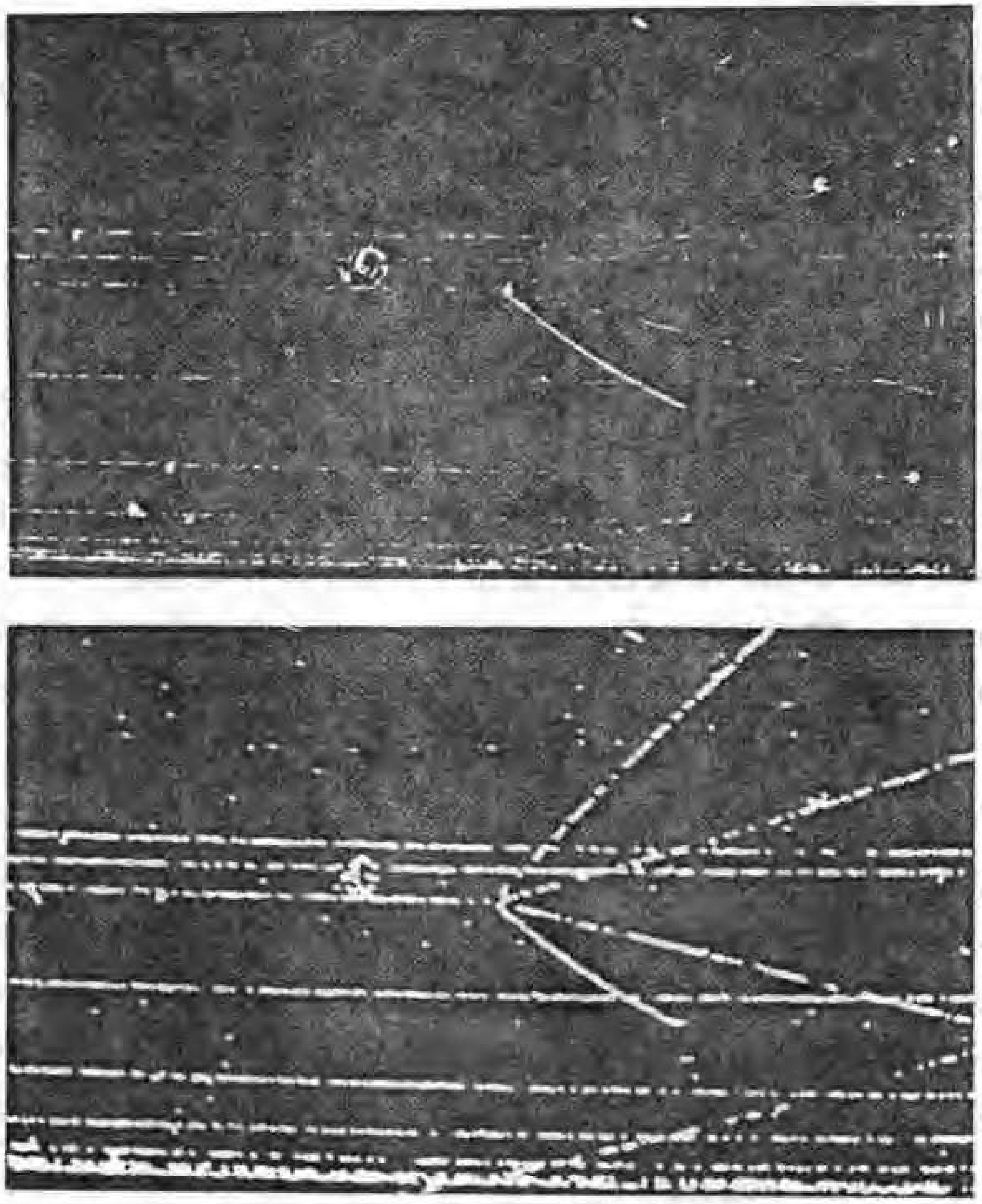
这类实验被描写为一个"开环"实验，因为计算机对于实验的设置不起控制作用. 最近正在开发的闭环系统则是其实验直接由计算机控制. 它们的原型可以在工业控制系统中看到，其中较为常规的，被人了解较好的装置，从电梯制造到石油精炼厂都用得上，都是受自动控制的.

"读出"粒子踪迹的照片的问题是高能物理学家们一直关心的事情. 这里原始数据不像 X 射线衍射图的那样清爽，并且摄影术也不能轻易回避. 将气泡室中照片里的追踪过程自动化以探测重要事件，提出了很困难的且尚未解决的图像识别问题. 但是现在使用计算机至少已经减少了一点扫描照片的沉闷（见 598 页中之插图）. 人机关系的类似的形式也产生于应用放射性同位素技术对脑瘤的研究中. 那里图像识别的问题较为简单，因为那是某些类型的染色体的分析，已经有了很大程度的自动化了（参见勒得利（Robert S. Ledley）和拉多（Frank H. Ruddle）的"用计算机做染色体分析"，《科学美国人》，单行本 # 1040）.

现在让我们从计算机作为工具的作用转到计算机作为操作者的作用，并且讨论理论的动态表示这一课题. 为了清楚地理解诸如"模型"，"模拟"以及其他等等在文中一再重现的词，必需离题讲几句，以便把一个模型或一个理论的结构方面和功能方面分开.

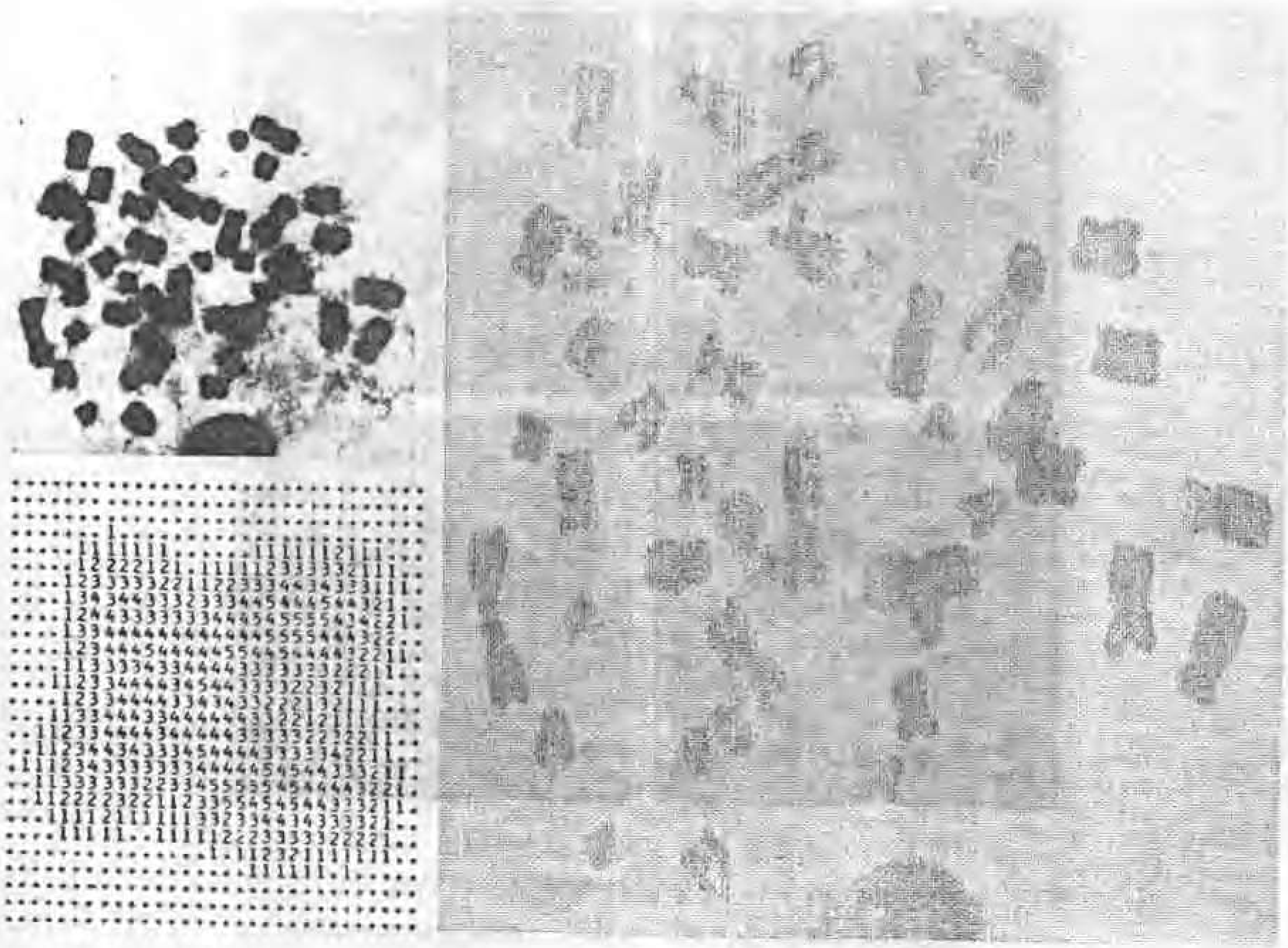
一个机器人是人的一个功能模型. 它会走，它会说，但是没人会愚蠢到认为它是一个人，或者仅仅因为它行动起来像人就说它能解释什么是人. 说"人脑像一台计算机"或者"神经细胞的网络像计算机的门的网络，这些门或开或闭"，这些说法很粗浅地，然而在不同的水平上，表示了曾经一度流行的结构理论. 今天这句话都没人相信了. 第一句无人相信是因为谁在脑子中也没有找到看上去像计算机的结构，或者其作用像人造的计算机的任何部件的东西. 第二句话是因为神经细胞网络被发现是比计算机网络远为复杂很多.

一个功能模型就像电气工程师的行话说的"黑匣子". 有些东西进去，同时也有些东西出来，



一个典型的粒子作用的气泡室照片(上图),由加州大学劳伦斯放射实验室制作. 照相底片由一个称为"飞点数字仪"的装置加以扫描,而数字化信息被直接送入一台计算机,它生产出一份原始相片(下图). 扫描过程不需要操作者. 机器由磁带上之指令指挥去寻找重要事件. 其他的计算机程序进一步分析数据以提供记录于相片中的作用的一个描述.

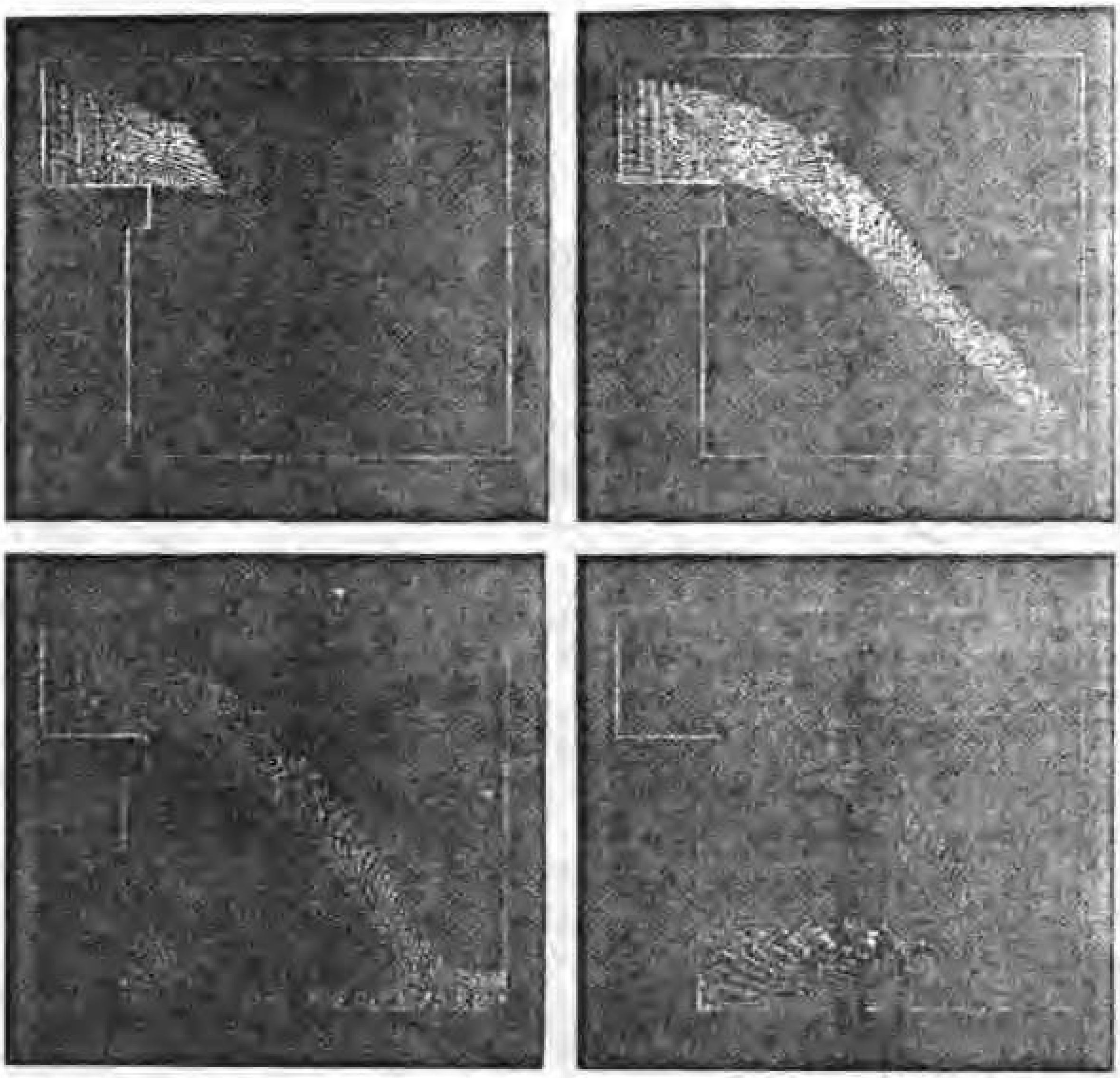
而内部是什么则是不知道的,或者仅只知道它以某种方式把输入和输出联结起来. 结构模型强调匣子里面的内容. 可以用一条曲线描写通过一个半导体二极管的电流,作为加在两端上的电压的函数,则是这个二级管的功能模型,这对电子线路的设计者非常有用. 这种曲线通常是这样得到的,对许多装置测量出实际电流和电压再用光滑曲线作拟合. 一个对应的结构模型则要通过半导体的电荷载流子的迁移、接触的几何性质以及其他来阐明这条曲线的特征形状. 一个好



用计算机做染色体分析使得有可能自动检验大量细胞以寻找染色体异常.上左图是一份人类染色体的显微照片.计算机用一些小小的数字作为点子印出了显微照片的一个图像如右.左下图是一个单独的染色体的放大.打印输出由国立生物医学研究基金会的一台称为 FIDAC 的扫描装置和一台 IBM 7094 计算机完成.

的结构模型典型地有比功能模型更大的预报能力.在二级管这个情形,它将预测当接口的几何性质或者半导体中的杂质改变时电压电流特性的变化.

如果这个黑匣子打开了,灵感,运气和经验的检验能将一个功能模型转变为一个结构模型.物理学多有这种成功的例子.卢克莱修斯(Lucretius)和道尔顿(John Dalton)的原子论都是纯粹功能性的.现代的原子论则是结构性的,并且原子及其成分是可观测的.燃素说理论虽然在功能上成功到某种程度,但由于它的成分与现实之间缺乏对应而被废弃.虽然物质行为的热力学描写主要是功能性的,而统计力学的描写主要则是结构性的,这两个途径的相容性使得两者相互加强.



模拟瀑布泻过悬崖边棱并且溅入小池中，这个计算机实验由香农(John P. Shannon)*在洛斯阿拉莫斯科学实验室完成，它是借助于数值模型对流体的动力学行为作的一般研究中的一部分.

现代的计算机是一个非常多才多艺而又方便的黑匣子，它能担任许多各式各样的功能的和结构的角色. 在物理科学中其叙述通常都是用数学预先写好了的，计算机只是通过它的程序把这种叙述搞活了，而这是数学赋于它的作用. 牛顿把天体力学写成手稿，而他用到的微分方程则是一种速记. 勒弗利埃(Urbain Le Verrier)和亚当斯(John Couch Adams)则根据大量的天文观测作了详细的计算来丰富了这个手稿. 盖勒(Johann Galle)和查利斯(James Challis)则将他们的望远镜指向了计算说的应该指向的方向，从而发现了行星海王星. 用现代的行话说，勒弗利埃和亚当斯分别在牛顿的模型上对海王星进行了模拟，对实验与模拟的结果加以比较使人们更加相信这个模型. 今天计算机日复一日地在休斯敦、享茨维利和肯尼迪角扮演着卫星和轨道. 不过，决不会把勒弗利埃和亚当斯或者一台计算机与天体及其轨道混为一谈. 但是我们将会看到，在

* 译注：不要与通讯学的鼻祖香农混为一人. 后者是 Claude E. Shannon.

与语言学和心理学的模型打交道时时常会遇到这种会是相当常见的.

蛋白质分子结构的确定提供了一个精彩的例子说明计算机如何得出一个理论所蕴涵的内容. 为一个蛋白质分子找到一个可能的结构只走完了理解这个分子的部分道路. 例如,会出现这样的问题,如为什么一个蛋白质分子,它基本上只是一串氨基酸单元,会折叠成肯德鲁(Kendrew)所观测到的缠结在一起的三维图像. 解释它时所援引的基本物理假设是:这一串分子的链条,像水流下山坡一样,会折叠起来以达到一个最低的能量水平. 为得出这个假设的内涵,给了一个蛋白质链的一个初始的空间构形,你可以设法计算链的所有结构对子之间的相互作用. 其次,关于所有可能的构形取对应于这些相互作用的能量的极小值. 然后再显示所得的分子图形. 不幸的是这很不容易做到的,因为没有合用的简单公式来描写这种相互作用,并且在现在的技术下,谁也不能只用适当的工作量就把它写下来和算出来. 唯一可能的办法是用聪明的作法对能量做次数很大但仍然是有限次的取样. 一台不要人管的计算机搜索一组取样找它的最小值,这样,计算机将会很快地找到某个局部极小值,但不是整体的最小值——就像一个人掉进了一座大山上的一个凹地而不能越过围绕他的山脊所以看不到更深的山谷一样.

采用新的"在线"分时系统,图形显示技术和更为方便的程序语言,能够实现人机之间更密切相互作用,这使得勒温萨尔和他的合作者们能够用他们的直观和理论洞察来猜测到有希望的最终构形. 这样一来,计算机就容易完成关于最终构形的能量水平计算的细节,并在其邻近寻找整体最小值. 作为操作者的人从他的直观的有利地位指导着机器越过周围的小山而进入深谷,人和机器各自完成最适合于他或它的工作.

更为令人兴奋的是一旦理论上知道了这些相互作用的细节,就能够计算出该分子的 X 射线衍射图样,再与原始的观测记录加以比较,则当转到另外的方向时所遇到的含糊而留下的有关结构上的疑点也可以去掉了. 做完了这一循环的工作,不仅可以实现分子结构的计算,而且也得到了足以提供分子相互作用细节的理论建构.

在这个例子中计算机根据基于物理和化学的理论提供的手稿清晰地模拟出这个分子. 计算机呈示出的这个分子的结构足够详细,这时,如果隐喻地把计算机就看成分子,似乎还是可信的. 但当我们进入原子结构的细节时,这个隐喻便失去了力量,而解释原子行为的子模型此时仅仅是功能性的.

在上述例子中所展示的理论与实验之对抗,其引人注目、直截了当和清晰明白决非孤立的现象. 类似的技术正出现在化学中(参见邦克尔(Don L. Bunker)的"化学中的计算机实验";《科学美国人》,1964 年 7 月号),在流体力学中(参见哈尔罗(Francis H. Harlow)和福罗姆(Jacob E. Fromm)的"流体力学中的计算机实验";《科学美国人》,1965 年 3 月号)以及其他科学分支也

是如此.值得注意的是正如邦克尔已经指出的,用这种方式应用计算机,决不是把科学家降低为一个被动的旁观者,而是加强了实验科学对人的创造性的需求,特别当硬算的工作量大到甚至最快的计算机也无能为力时,更是如此.人的判断和直觉必须被注入于每一阶段以引导计算机去搜索一个解答.要想获取科学上的好名声,辛勤的常规工作用处将越来越少,因为这种"牛马活"能够简化成为一个计算机程序.留下来需科学家贡献的就是创造性的想像力.在这个意义下科学家们正如其他人一样,会遭受到技术性失业.

在"较软的"正在上升的科学诸如心理学和语言学中,有关将来计算机既作为工具又作为操作者的前景所引起的兴奋和思考甚至较物理科学更为强烈,虽然有分量的成就至今仍很少.

从现代计算机诞生之日起就引起了关于"巨脑"的神话的产生,这既是由于这样的明显事实即它们能计算,又是由于有关它们能力的活跃的猜想,例如说它会将一种语言翻译成另一种,它会下象棋,会谱乐曲,会证明定理等等.而这些活动历来都被看成人所特有的而不为其他物种并且特别不为机器所具有.这特别有力地引起了这个神话.这个神话(例如,在《纽约客》(New Yorker)杂志的漫画中表示出的)现在已经作为人所熟知的有关计算机的想像而扎下了深根.

这个神话部分地来自有关功能模型的性质的一种全然的误解.在1950年代初,当时关于计算机能否思维的猜测正是最时髦的,英国数学家图灵(A. M. Turing)提出下面的实验作为检验.设想一个实验者用电传打字机与两个房间(或黑匣子)通讯,一间房里有一个人,而另一间房里有一台计算机.如果在与每一个房间都交换了一个适当的序列的信息后,该实验者不能说出哪间房里是人而哪间房里是那台机器,该机器就可以说是会思维的.由于情况是对称的,人们可以同样地下结论说人会干计算机的事.不论是哪种说法,如此的一个实验充其量证明了在这两个黑匣子之间有或多或少有限的功能上的相似性,因为这个实验的设计显然不是为了揭露其结构细节.既然看到只是有功能上的相似,说计算机是人的一个模型或者是人的一个竞争者既失去了神秘性,也失去了吸引力;今天只有越来越小的一批疯子才相信这个论点的最粗浅的说法,但它仍保留在公众的意识中.

现在有人以一种更为细致巧妙的方式继续试图使得计算机系统能够较少依赖预先设定的详细的指令就能较好地解决问题,并且具有某些类似于人的独立性和智能.这种系统如果它们实现了的话,如果要问它是否已经有某种类似于人脑一样的结构,就好比问一个飞行器是否像鸟一样在扇动它的翅膀.这个人工智能的问题是明斯基(Marvin Minsky)(《科学美国人》,1966年9月号)所描写的思辩性的研究主题.一旦误用功能性相似的乌云被拨开,用计算机来模拟结构性的模型这个有现实性的前景仍然会存在.

数学进入语言学或心理学至今还相对地做得很少,虽然现在已有某些较为漂亮的语言学的

数学理论. 这些理论的范围一般被限制于句法(即研究一个句子中的字之间的顺序和形式关系). 因为它们建立在逻辑学和代数学的基础上,而不是建立在今日较为人熟知的微积分基础上. 这些理论至今还不太适合于数学家和自然科学家已经很习惯的符号计算. 在这种理论基础上的"计算",一般说来必须由计算机来完成. 实际上,这些理论中,有一些原来只是计算机程序;其余的则今天仍然是并且可能将来也继续是计算机程序. 在这种情形下程序语言就是科学语言;程序则是其原始的并且是仅有的文本,而不是从数学翻译过来的.

很早就有人断言计算机能翻译语言,其实这是被大大夸大了;甚至今天还没有一本完成的翻译本能够没有人的干预而仅由机器完成,虽然机器帮助翻译是技术上可行的. 然而,在应用计算机于处理语言,包括本国语言和程序语言,已经取得了相当的进展. 这个活动的理论背景是被称为短语结构语法和翻译语法的那类语法. 这些语法将句子描写如下:句子是从一个初始的符号(比如 S,代表句子)开始的,然后应用重写规则,接着再应用变换规则(假设此语法是一种变换语法)这样生成的. 举个例子,重写规则可以是 S→SuPr,其中 Su 可以想成是代表主语,而 Pr 代表谓语,当应用于初始符号 S 时得到一个符号串 SuPr. 再添上几个规则:Su→"约翰"和 Pr→"睡觉",我们可以将这个符号串变成句子"约翰睡觉". 然后,应用变换就可以例如将主动句子"约翰跟踪那姑娘"变成被动句子"那姑娘被约翰跟踪."

在苦诺(Susumu Kuno)和我本人的指导下在哈佛有一个研究小组已经在过去的几年中开发了一种技术,它可以将这个生成过程倒转来,从文本中出现的一个句子,得到它的结构的描写,或者等价地,得到它用语法规则产生的描写. 考虑这样一个简单的句子"Time flies like an arrow(时光飞逝如箭)". 为了找出这个句子的哪一部分是主语,哪一部分是谓语等等,一个典型的程序首先在一个字典中查出每个字. "flies"这个字查出来既可以一个复数名词,表示一种烦死人的家中的昆虫,中文叫做苍蝇,或者是一个动词(中文的"飞")的单数第三人称,即表示主语所代表的东西在穿过空气移动.

在一个特定的上下文中,一个字的特别功能只有检验这个字如何与这个句子中的其他字相关联,才能发现,因此严重的问题是:在许多可能的功能组合中,要确定哪些个确实合在一起,成为一个合理的句子结构. 这个问题基本上是这样解决的:试验所有的可能性,抛弃那些不适合的,虽然可以应用由理论和直觉启发出来的强有力的检验将整个一类可能性一举淘汰,使得这个过程可以进入实用领域.

如果有一种非常精确的语法自称能够描写英语,则它必须要能为"Time flies like an arrow"找到一个结构,它要能看出"time"(时间)是主语,"flies"是动词而"like an arrow"(如箭)是一个副词短语用来修饰动词. 然而,"time"也可以充当定语,如用在"time bomb(定时炸弹)"中,同时

"flies"当然能够充当一个名词.再将"like"解释为一个动词(喜欢),这样也可以得到一个结构,它将变得好懂.但只有当人们想起来有一类被称为"time flies"的飞蝇,才能懂得这个结构:它们(即称为 time flies 的那种飞蝇)正好喜欢(like)一支箭(an arrow),它们可能把箭当成一块肉了.另外"time"也可以作为一个动词的祁使语气即"开动(赛跑用的)停表","开始计时",同时"flies"作为一个名词,这样也得到一个结构,它的意思是作为对某人下命令,命令他掏出他的停表并且很快地或者像箭一样快地为飞蝇计时("快按停表计时,飞蝇来了".)

稍微想一想便能想出对这个语法作一些小的修改就足以排除这类怪句子.不幸的是这样一来,失去的又会太多.甚至可能达到这样的地步:结构都是合理的,而句子都是无意义的.归根结底,并没有一类飞蝇被称作"time flies",但这可能只是自然界的一件偶然的事,甚或是恰好偶然没有把一种飞蝇叫做 time flies.更糟的是,任何一种办法在排除并不存在的 time flies 的同时也可能排除"Fruit flies like a banana"(果蝇喜欢一支香蕉)的完全相同的然而却是合理的结构.

更使人感到糊涂的是,后面这个句子本身是由一个反常的结构给出的,这个结构在"Time flies…"(时光飞逝如箭)的情况下是有意思的,但用在这里则是无意义的,因为我们很清楚水果一般说不会飞,并且即使它会飞,也只会飞得像枫树种子随风飞,而不像香蕉.

仅仅用句法理论不会进一步有所帮助.要想从"Time flies like an arrow"的句法所许可的三种结构中选取出答案来,必须求助于语义学,这是讲的有关句子是什么意思的学问.可惜语义学本身就是一个太朦胧的观念.目前已知的技术都不能够有效地处理这种类型的语义学问题.这个领域的研究仍在继续,希望通过某种形式的人机联系既能够得到实际结果,又能对自然语言的深刻奥秘有进一步洞察.我们不知道人们是如何懂得语言的,而我们的机器过程仅仅用超乎寻常的笨重的方式做小孩子的事.

人造程序语言的前途则比较光明.因为这些东西几乎可以随心所欲地来定义,一般来说可能减少含糊性,并将语义学系统化到足以用于实际的目的,虽然仍然有大量挑战性的理论问题.计算机还在不断成长,它仍然承受着从早期的夸大的断言而今天还在流行着的,在理论中把功能与结构混为一谈之言.心理学和人工智能的研究都涉及到智能行为,但另一方面,它们并不是相联系的,最多也不过是那一个隐喻的力量来自计算机可以作为常规的语言数据处理的工具.语词索引现在很容易由机器完成,它们为人文学和社会科学的学者提供宗教的和世俗的教材的关键字的位置和段落用表来显示出来.

心理学家已经用了程序语言来写人类行为的各种各样的结构模型的文本.这些都不再比海王星的或者血红素的手稿更为神秘.心理学的模型区别于物质世界的模型只在于它们的主题和

它们的原始语言不同.有关这些模型正确性的令人信服的实验确证仍然缺乏,然而一个学科的领域可以激励另一个学科.

实际上今日企图用计算机为人类行为建模的有价值的产物是语言而不是文本手稿.有好几种语言,其中著名的麦卡锡(John McCarthy)的LISP,已经证实对于符号运算的一般研究是很有价值的工具.自然语言数据处理的研究,定理证明,代数运算和图形显示很大程度上都凭借这种语言.然而,计算机作为工具很快地在心理实验室里为自身找到了用武之地.它的各种常规应用有行政管理,在研究人类或者动物主观的认知和学习测试中的监测和评价.

科学事业在原则上和在实际中都不可避免地涉及教育事业,特别在大学的水平上是如此.虽然上面只就研究工作方面来把计算机描述为工具和作为操作者的,看来同样可应用于教学.因为联机分时系统仍是试验性的而且很昂贵,特别是带有图形显示设备,它们在教学中的应用在某种程度上落后于它们在研究中的应用.

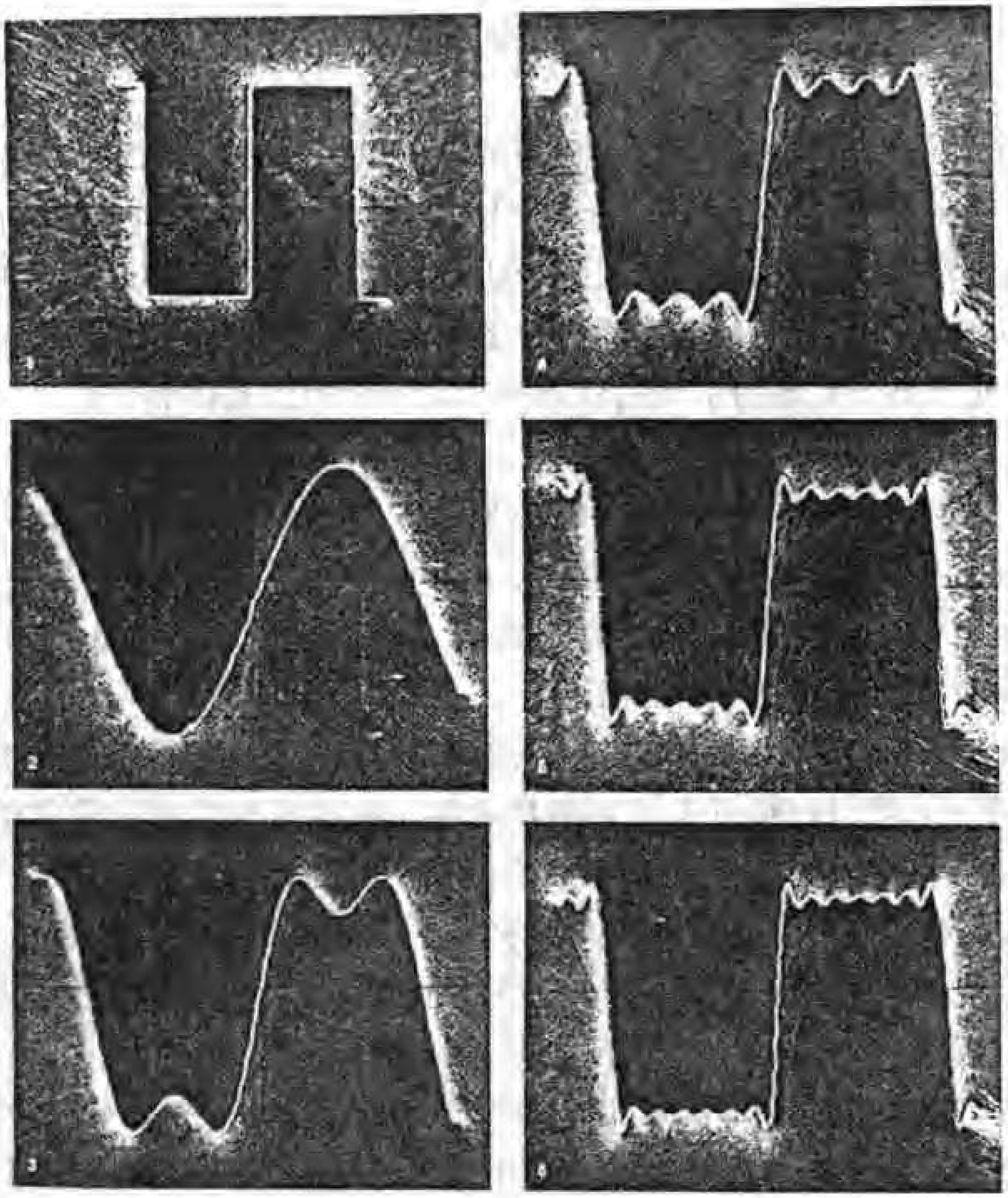
在苏帕斯(Patrick Surppes)的一篇文章中描述了计算机在小学和中学教育的前景(《科学美国人》,1966年9月号).我自己最近关于创造性思维中技术帮助之潜在价值的发现则着重于大学生或研究生,以及从在教室中学习向在职业实践中学习的转变.

为了将工作量限制在适当的范围,导致了学生在实验室里只做过于简化和肤浅的实验.其中各种重要现象的观测和聪明的解释是实验练习的首要目标,应用一台透明计算机将减少不必要的繁重劳作,甚至能够完成真实的实验的判断和解释.

透明计算机也可以充当一种动画黑板.这不等于说粉笔、影片和书本会要消失.计算机只是为教师的装备中增添了另一个有效力的和多才干的工具.事实上,当必须重复和琢磨时,计算机自身可以制作影片或者录像.我们都已看到,影片的放映是不能中断或改变的,而记录下来的计算机过程则容易在回答学生问题时停下来;于是讲课者能够选择或者比较随便地直接使用计算机,或者使用普通的黑板,而把预先录下的过程暂时停下来.

最好的是,现在再也没有必要区分教室里用的工具和学生做家庭作业时用的工具了,不必区分实验室里的计算以及个人的研究项目了.这样一来,从教室到生活的转变可以变得较为顺利些.因为计算机尚未成为如人们所希望那样既很方便又很便宜,从而仍面临着许多技术和财政的问题.在任何情况下,对教育的弊病是找不到万应灵药的,只能做到提供一个较大的选择范围.

我们以在哈佛的教室里使用一个由加州大学圣塔巴巴拉(Santa Babara)分校的卡勒(Glen Culler)开发的键盘显示系统的实验应用为例,既能说明前景也说明问题所在.由于静态的印刷的画面不能充分地描绘出动态的显示效果,问题可能比前景更加显明.所选取的主题是数学性



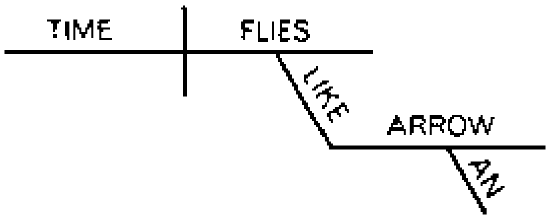
此图阐释了作者在哈佛大学教室中使用加州大学圣塔巴巴拉(Santa Babara)分校的卡勒(Glen Culler)发展的键盘显示系统所作的实验应用. 众所周知,任何周期函数(在此例为左上之方波)可用收敛于该函数的调和振动项的级数去逼近. 卡勒的装置能够快速而直观地揭露这个逼近的性质. 除左上之外其余的曲线显示级数的部分和当项数增加时的效果. 方波的角附近的尖突是由靠近间断点的不一致收敛性所引起.

质的*,而讲解这种问题采用目前的设备很适合. 传统做法是把这类主题丢给后续课程去讲,我们的目标是开发一种自然的和清晰的表示主题的方法,开发比通常的方法更深刻的方法,并且

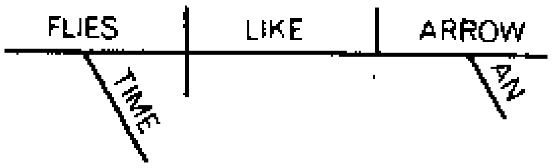
---

* 译注:这里指的是傅立叶级数的不一致收敛性问题. 在我国现在的数学系中,几乎是一律不讲这个问题.

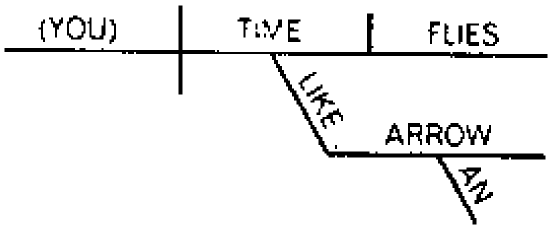
***** ANALYSIS NUMBER 1		SENTENCE NUMBER 000001			CORPUS NUMBER	
ENGLISH	SENTENCE STRUCTURE	SWC	SWC MNEMONIC	SYNTACTIC ROLE	RL NUM	PREDICTION POOL
TIME	1S	NOUS	NOUN 1	SUBJECT OF PREDICATE VERB	SENNNO	SE
FLIES	1V	V11S	COMPLETE VI	PREDICATE VERB	VIVI10	PD VSA
LIKE	1VPR	PRE	PREPOSITION	PREPOSITION	POPREO	PD
AN	1VPOA	ART	PRO-ADJECTIVE	OBJECT OF PREPOSITION	NQAAAO	PD NQG
ARROW	1VPO	NOUS	NOUN 1	OBJECT OF PREPOSITION	NSNNNO	PD NSG
.	1.	PRD	PERIOD	END OF SENTENCE	POPRDO	PD



***** ANALYSIS NUMBER 2		SENTENCE NUMBER 000001			CORPUS NUMBER	
ENGLISH	SENTENCE STRUCTURE	SWC	SWC MNEMONIC	SYNTACTIC ROLE	RL NUM	PREDICTION POOL
TIME	1SA	NOUS	NOUN 1	SUBJECT OF PREDICATE VERB	SENQUO	SE
FLIES	1S	NOUP	NOUN 1	SUBJECT OF PREDICATE VERB	7ANNNO	PD VZA7ZA
LIKE	1V	VT1P	NOUN-OBJECT VT	PREDICATE VERB	VVVT11	PD VPA
AN	1OA	ART	PRO-ADJECTIVE	OBJECT OF PREDICATE VERB	N2AAAO	PD N2A
ARROW	1O	NOUS	NOUN 1	OBJECT OF PREDICATE VERB	N5NNNO	PD N5A
.	1.	PRD	PERIOD	END OF SENTENCE	POPRDO	PD



***** ANALYSIS NUMBER 3		SENTENCE NUMBER 000001			CORPUS NUMBER	
ENGLISH	SENTENCE STRUCTURE	SWC	SWC MNEMONIC	SYNTACTIC ROLE	RL NUM	PREDICTION POOL
TIME	3V	IT1	INFINITE VT1	IMPERATIVE VERB	SEITIO	SE
FLIES	3O	NOUP	NOUN 1	OBJECT OF IMPERATIVE VERB	A2NNNO	PD N2B
LIKE	3OPR	PRE	PREPOSITION	PREPOSITION	POPREO	PD
AN	3OPOA	ART	PRO-ADJECTIVE	OBJECT OF PREPOSITION	NQAAAO	PD NQG
ARROW	3OPO	NOUS	NOUN 1	OBJECT OF PREPOSITION	NSNNNO	PD NSG
.	3.	PRD	PERIOD	END OF SENTENCE	POPRDO	PD



用计算机作句法分析，对句子“Time flies like an arrow”得到三种不同的结构解释，它们在这里由计算机印出呈示于左，同时用传统的句子结构分析的图示法呈示于右. 第一个结构其中“time”是动词“flies”的主语而“like an arrow”是一个副词短语修饰动词(分析 1, Analysis Number 1). 然而，“time”也能充当定语，如在“time bomb”中，同时“flies”当然也能作为一个名词. 连同将“like”解释为动词，这便得到另一个结构(分析 2, Analysis Number 2)，但是，只有当人们会设想有一类飞蝇，被称为“time flies”才能懂这句话，这种飞蝇正好喜欢一支箭，可能是把箭当作一顿饭吃. 此外，“time”作为一个祈使动词同时“flies”作为名词还能得到一个结构(分析 3, Analysis Number 3)，它的意思是命令某人掏出他的停表来很快地或像箭一样(迅如飞矢地)为飞蝇计时. 没有现成的计算机技术能够有效地处理这种类型的语义学问题，但是这个领域中的研究尚在继续.

激发学生在解决问题中的直觉和机智. 这个目标不是取消理论和严格性而只去作乏味的计算，而是恢复理论与计算之间的密切联系，它刻画了在 19 世纪后期严格性到来之前的数学的正道，但是后来偏离了它，而形成近来已成时髦的把纯粹与应用数学分裂开来的状态.

众所周知，任一周期函数能够用每项均为调和振动的收敛于该函数的级数逼近. 卡勒的仪

器可以快捷地直观地揭露这个逼近的本质. 例如，考虑第 606 页左上图中的方波. 相应的由计算机产生的曲线显示级数部分和当项数增加时之效果. 方波的角附近的尖突是由于在间断处的不一致收敛性所引起. 对于纯粹数学家，这里的证明可以激励他们对不一致收敛性作更严格的处理. * 对于工程师而言这个现象只需用显示逼近分量的办法就可以从直观上弄清楚为什么尖突会产生. 原则上教师或者一位有兴趣的学生都能独立地跟着做成这种示范表演，可以模拟一个线性电路元件，如一个电阻或者一个简单的放大器，对于一个方波上，对它的各个分量上或者对它们的和，起什么样的效果.

现在任何并存的形式代数运算都要用铅笔或者粉笔. 最新的有关机器协助代数运算的进展引起了令人兴奋的可能性，机器将最终会帮助既做符号的又做数值的运算，并且容易地在这两种状态表示之间转换. 同时在两种状态下工作或者以任何方式把严格性和直觉结合起来，将会深刻地同样影响着纯粹数学家和应用数学家的思想.

其他类型的教学实验能够用在计算机中构作一个适当的结构模型来处理. 你可以假设某种结构并且检验其行为，如同经常在管理对策中所做的那样，或者你可以仅仅处理可观测的行为，而把模型的决定留做为理论构建中的一个练习. 在某一领域中，当人们经过研究而开发出一种范式以后，这些范式就能够同样应用于那个领域的教学. 例如，实验教一门外国语将会使人感到兴趣，只要对于这个语言我在前面描述过的变换语法已经能在一台计算机上实现.

同样有兴趣的是推测在线计算机作为工具对学习和问题解答的心理学研究的应用. 在这个领域里作实验曾经是困难的，伤脑筋的并且是不现实的. 当交互作用计算机可以充当问题解答的工具时，它也很容易适用于记录解决问题的行为的信息. 这里问题仍然不在于数据的收集，而是设计合适的实验，因为在一台计算机的控制台上，一个小时的解答问题会议就能够汇集很大量的一堆数据.

简言之，正如望远镜和显微镜延伸了人类的视觉那样，计算机能够因延伸了人类的推理和直观而深刻地影响着科学. 我猜想这个延伸的最终影响将会像发明书写的影响一样的深远. 这种影响更终会得到真理或是得到谬误，更多地取决于使用者而非工具本身.

---

* 译注：这就是所谓吉布斯(Gibbs)现象. 早在 19 世纪末，发现光速不变的实验物理学家迈克尔孙就想制造一台仪器把方波分解为谐波的迭加，如 606 页插图那样(其实用示波器就可以做到)，但是他十分苦恼为什么方波的角上总有一个尖突. 1899 年著名统计物理学家吉布斯致信给他，说明这是一般的现象. 在详尽的数学分析教材中会讲到它. 现在则采用 Java 小程序(applet)可以作一个动画让学生去看. 这比买一台示波器便宜多了. 40 年前本文作者的预测在今天发达国家大学中学教室中已经实现!

47.

系统分析与编程

克里斯多弗·斯特拉切(Christopher Strachey),1966年9月号

"行成于思",这是一个大大错误的老生常谈.然而许多互相抄袭的书以及著名人物发表的讲演,却老是重复它.真实情况恰恰相反.文明的进步,正是由于我们能够"行"而不必"思"其后果的重要行动越来越多.思想的运用,好像一场战斗中骑兵的冲锋——数目很是有限,它们需要精力充沛的马匹,而且必须只在决定性的时刻才冲上去.

——怀特海(Alfred North Whitehead)

这篇文章讲的是怎样让一台计算机来做你想它做的事,以及为什么它花的时间几乎总是比你希望的长些.下面不是一个有关编程的现状的详细报告,而是企图展示如何着手写一个程序.写一个程序的过程主要是直觉的而不是形式的;因此我们将更多地涉及作为编程的基础的指导原则,而不去讲把程序交给机器时表示它所用的特殊语言.

我们将从一个编程问题的特别例子开始,它无疑是不平凡的但是也足够简单,所以不需要任何有关编程的预备知识即可理解.我选择了一个非正统的方法处理这个问题,这是一个对许多专业程序员来说看上去有些奇怪的方法.这种方法使我们能处理一个用其他方法太难说明的例子.

我们的问题是为计算机编玩国际象棋的程序.我们怎么来着手?这个问题有两个主要方面.为装备计算机使之确能处理这种博弈,我们必须找到一个办法把棋盘和棋局表示于其中,并且给计算机配备一个程序,以识别哪些走着合法并完成它们.这是一个编程问题.其次,我们必须提供机器一个方法来从允许的走着中挑选一个适当的走着.这主要是博弈问题.国际商业机

器公司(IBM)的萨缪尔(Arthur L. Samuel)曾经广泛地研究过博弈并取得重要成就(参见明斯基的“人工智能”,《科学美国人》,1966 年 9 月号). 不过这里因为我们讨论编程而不是博弈,我们将只限于一个简单的一般策略而不涉及大部分细节.

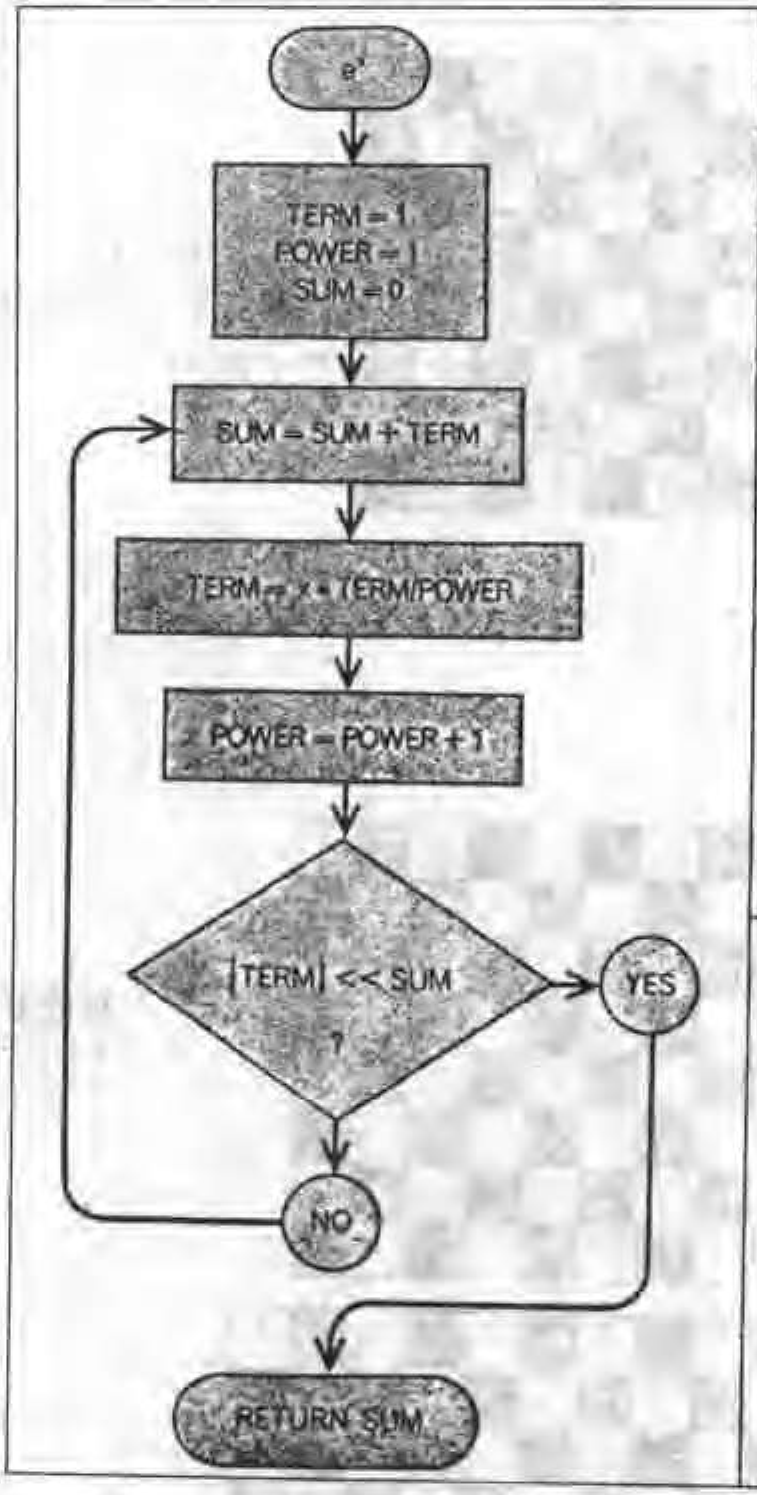
通常的编写程序的方法,特别对于一个复杂的问题,其过程分为两个步骤. 头一个步骤称为系统分析. 它包括分析任务以精确地决定需要去做什么,以及采纳一个全面计划. 一旦欲完成的工作的一般纲要已经决定,第二个步骤就是用对于计算机适用的方式写下所要求的操作. 这包括很大量的较为详细的决策(例如信息如何表示在机器中,以及其表示如何贮存). 程序的详细形式将依赖于所用的特定的计算机.

这两个步骤的命名曾发生混乱. 某些程序员把术语“编程”保留给第二步骤;而另外一些则称第一步骤为“编程”而称第二步骤为“编码”;还有一些对整个过程即第一第二两个步骤合称为“编程”. 我个人的意见认为系统分析和编程的区别不是很有用的. 如果系统分析已经用比现在用的稍微严格一点的语言做好,写成了程序纲要,则用机器语言来编写详细程序的全部余下的过程,应该能够移交给计算机自己来做.

让我们进到计算机同一个对手下象棋的编程问题. 我们将如何表示这个游戏的相关特点,以及哪一类的操作我们希望能够执行? 一个好的行事方法是先确定一些操作,让这些操作去决定你需要在机器中表示的是什么. 在这种情形我们显然要求先把棋局和走着以及与它们相关联的价值表示出来.

我们运用了一个功能性记号以达到计算机要求的那种精度,并且始终避免陷入不成熟的细节. 我们设 P 为一个棋局并约定还有 P 中不仅包括棋盘上的棋子数目和位置,而且还有许多其他的重要事实,诸如哪位棋手下一步走棋. 局面的价值可以表作一个函数 PositionValue(P). 任何一次走着(记作 M)的价值显然依赖于在走这一着时的棋局;因此我们必须标出棋局而写出函数 MoveValue(M,P). 接下来,为了能够看到前景和检验走着的后果,计算机需要第三个函数:MakeMove(M,P),其中 P 为下这一着时的棋局. 这个函数的结果是该走着产生的新棋局. 最后,程序需要第四个函数以求得从一个给定的棋局出发能够走的所有的合法的走着:Legal-MovesFrom(P). 这个函数的结果是一个走着表.

这四个函数连同两种对象(P 和 M)足以详细说明我们象棋程序的核心. 在一盘象棋对局中有两个棋手(在我们的情形就是机器及其对手),而若一个棋局对某一方是好的则对另一方是不好的. 因此我们必须把我们关于一个棋局的价值的观念弄得较为精确,我们规定 PositionValue(P)给出了该棋局 P 对于以后必须走下一着的棋手,棋局 P 的价值. 我们似乎可以假设棋局 P



a

CPL

```
let Exp [x] = value of
      § let t, r, s = 1, 1, 0
         t, r, s := xt/r, r+1, s+t
         repeat until t << s
         result is s §
```

b

ALGOL

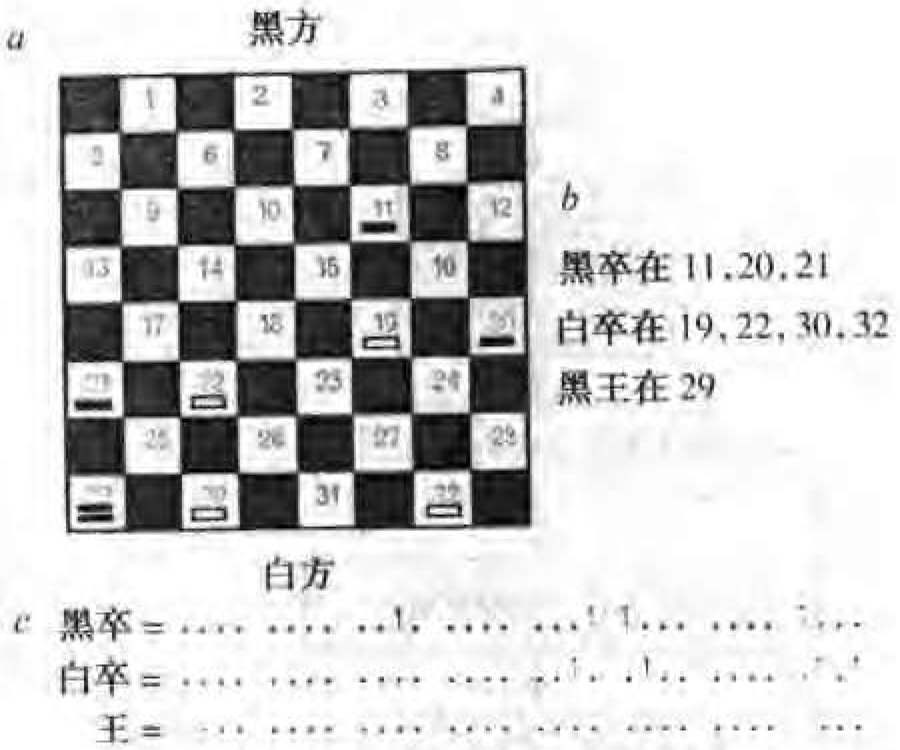
```
real procedure Exp (x);
value x; real x;
begin real term, power, sum, q;
   term: = power: = q: = 1;
   sum = 0;
   for sum = sum + term while q >₁₀ −12 do
      begin term: = x × term/power;
         power: = power + 1;
         q: = abs (term/sum) end;
   Exp: = sum;
end
```

c

FORTRAN IV

```
      FUNCTION  EXP (X)
      TERM = 1.
      POWER = 1.
      SUM = 0.
10    SUM = SUM + TERM
      TERM = X * TERM/POWER
      POWER = POWER + 1.
      IF (ABS (TERM/SUM) .GT. 10E − 12 GO TO 10
      EXP = SUM
      RETURN
      END
```

编写一个计算机程序的正统途径释明在上图中. 这个例子中的问题是比较简单的: 用级数 $1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots$ 的和来得函数 e^x 直到那些可忽略的项为止. 编写一个程序来解这样一个问题的过程通常分作两个步骤. 第一步骤, 有时称为系统分析, 包括分析该任务以确切决定需要完成什么以及采纳一个一揽子计划; 这一步骤被表示为左边的框图. 第二步骤, 有一些程序员称为编程, 而另一些程序员称为编码, 包括用适合于该计算机的形式, 编写那些需要的操作. 右图把所研究的问题用三种不同的编程语言表出. 框图的菱形块中存有一个"判定函数"; 在 TERM 这个字的前后两竖杠表示"其绝对值", 而且符号≪是说"|TERM|"与"SUM"比较可以忽略. 在 CPL(组合编程语言)中, 表示式"value of"控制着紧跟在后的那个语句; "repeat"控制着紧接在前的语句, 符号 § 和 § 充当一对语句括号. 在 CPL 和 ALGOL 两者中算子": ="代表赋值: 将算子右边的量取值并同时将此值赋给左边的变量. 在 FORTRAN 中, 符号 * 是一个乘法记号.



象棋盘上的棋局可在计算机中用两种不同办法表出. 为描写一个特定的棋局, 你可以或是指出在每一个方格中有什么(a), 或是指出那些还在走的棋子位于何处(b). c 中是一个等价的办法, 它只需用几个二进制数. 对每一个方格要指定三个二进制数: 一个表示黑卒或王在其中, 另一个表示白卒或王在其中, 而第三个任一种颜色的王在其中.

在一个棋盘上的走着可以用普通棋盘的数字方案表示(a), 但这不方便, 因为有两种方格(在不同的行上交错), 它们需要不同的规则. IBM 的萨缪尔想出一个巧妙的方法来避免这个困难. 他用不同的行与列来扩大棋盘并且将方格重新编号, 这样产生了一个方案, 其中可能的走着对实际用到的那部分棋盘中所有方格都类似(b). 上图中呈示的棋局用这个新的记号方案表出在 c 中. 原来的棋盘中所有空格均用 1 来表示.

的价值对于另一位棋手而言是这个值的负数;即是说,如果一个棋局面的价值对于一位棋手是v,其对另一位棋手之值将是−v.(这个假设用对策论的术语来说,国际象棋是一个零和对局).

其次,我们能够定义对于走了一着的棋手,该着的价值为所得棋局对于他的价值. 假设从棋局P走了着M的结果是棋局P′. 记住现在轮到他的对手从P′走着了,我们可以看出走着M对于走了该着的棋手的价值将是−PositionValue(P'). 因此用我们的记号我们可以定义一个走着的价值如下:MoveValue(M,P) = −PositionValue[MakeMove(M,P)]. 这个形式语句能够重述为下面的说法:你走的一着对于你自己的价值,等于所得棋局对于你的对手的价值的反号数.

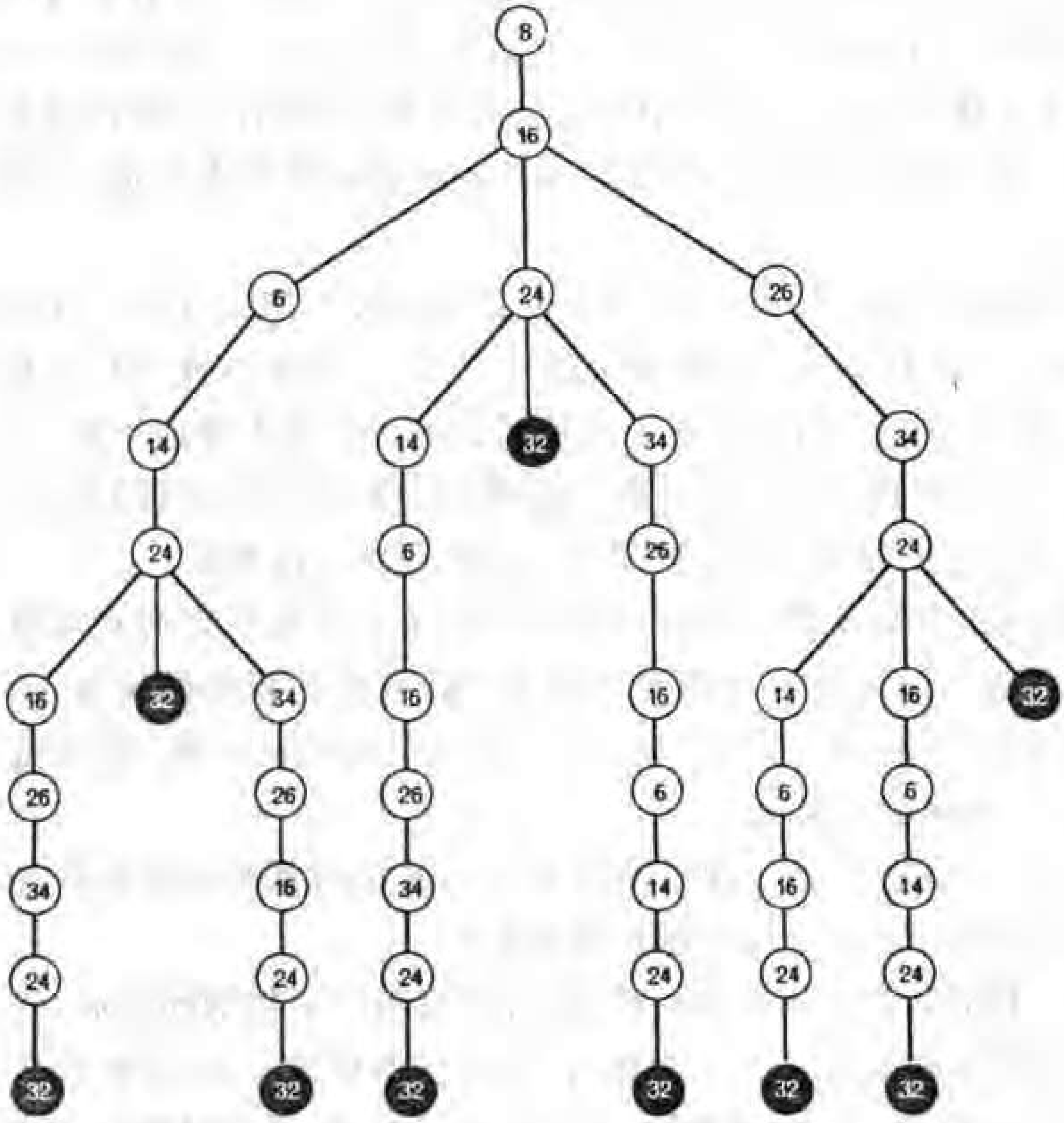
我们将如何求得一个棋局的价值? 对局的基本过程是探查出你的所有可能走着和对手的所有应着至某个深度,然后对所得各棋局赋以价值. 我们称这些为"最终"棋局并且说它们的价值由函数 TerminalValue(P)所产生. 这个函数对一个棋局做出直接的评估(可能用尚存棋子数,它们的机动性,对棋盘中央的支配以及其他等因素来表示)而不管任何进一步的前景. 我们现在能说,如果P是一个最终棋局,其价值就是 TerminalValue(P),但如果它不是一个最终棋局,它的价值是从它可能做出的最好的合理走着的价值. 注意一个棋局是否是最终棋局的问题可能不仅取决于棋局本身而且也依赖于已经看到的前景深度d如何. 为机器瞻望前景能有多远,设置一个限度是必要的.

我们已经写出的定义事实上是循环的(例如,PositionValue 的定义用到了 MoveValue 并且反过来也是),而这些函数都称为递归的,因为每一个都用其余的来定义. 这种循环性不是不利的;实际上,它使得可从事情的中间做起,构作一批函数,在一开始其目的只是被直观地理解,然后定义它们中的每一个时,用到其余的. 这个递归的或者分级的制作程序的方法是掌握复杂的运算最简单的方法,因为这个方法允许将它们分解为较小的单元而能够分别予以考虑.

我们现在已经构作了一个一般的博弈方案而既无需决定其策略细节也无需决定游戏本身之结构. 我们能够用决定棋局和走着的表示法以及定义四个函数来完成我们的程序的轮廓. 函数 LegalMovesFrom(P)和函数 MakeMove(M,P)连同P和M将确定该游戏的本质,而函数 Terminal(P,d)和 TerminalValue(P)一齐确定了策略.

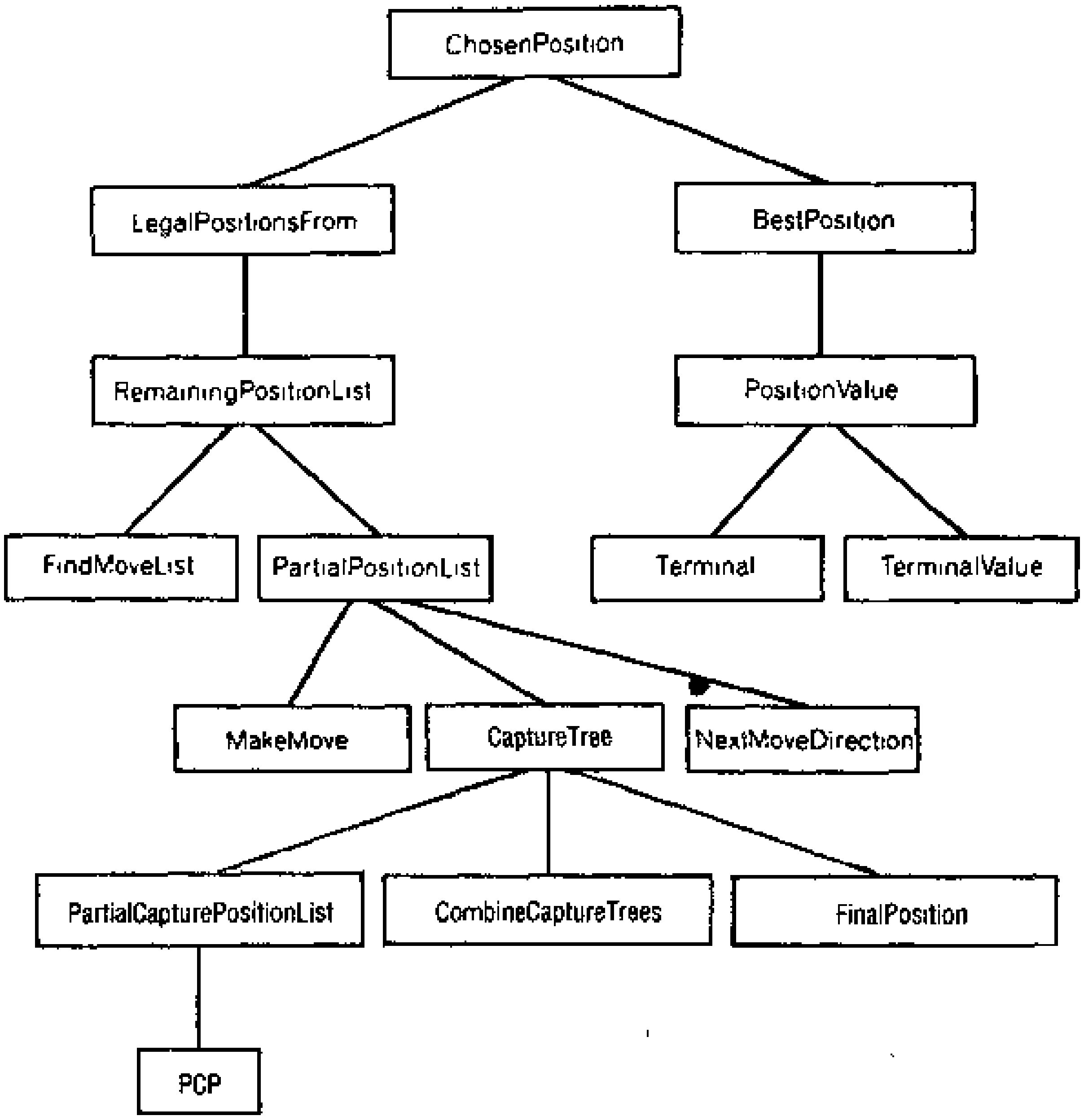
在计算机中选择表示对象的办法是一门艺术,而且我们几乎没有系统的方法来决定最好的办法. 主要的要求是该表示应当尽可能地简洁并且也尽可能地容易操作.

为表示在一个棋盘上不同的棋局,我们有两个不同的可能做法. 为描写一个特别的棋局,我们能够或者详细列举棋盘上32个合用的方格的每一个是否被占领,并且如果被占领,是被什么占领的,或者我们能够只给出仍然在走的棋子. 从寻找合理的走着的观点看,这两种中的第一种是较为方便的,因为它较易于发现哪些方格未被占领(见612页上图).



吃着树画出了是走一着棋可以吃的子. 设最初棋子在 8,而吃子的规则类似中国象棋中的"象"(不考虑塞眼),因此它可以吃 16 上的对方的子且占领 16. 以后则有三种走法,分别占领 6,24 与 26,一直到 32 就再没有吃的了,因为余下的只有回头路 24. 这时就说该着已走完了. 每一着最多只有 9 个最终的吃着,如图所示. "吃着"也和总的博弈一样可以用"递归函数"来定义,"递归函数"即用其他函数循环地定义的函数. 617 页上把这个情况与总的象棋程序合并起来了. *

* 译注:这个说明是译者改写的.



作者的象棋程序的等级结构的，这一点在这个图示中表达得很清楚.因为一个人心里能一次记住的问题的规模和复杂性是有限的，看来处理大规模和复杂问题的最好办法是将适当规模的操作作为分开的单元来处理，然后将它们分等级地组合起来.逻辑函数"ChosenPosition"可由两个另外的函数"LegalPositionFrom"和"BestPosition"来循环地定义.函数"LegalPositionFrom"是讲在对局中的给定着上在棋盘上寻求合法局面的问题；所有这些从"LegalPositionFrom"分支出来的函数处理这个问题的不同的方面.例如，讨论吃着的这个主要分支是用深色印的.函数"BestPosition"和从它分支出来的所有函数则讨论由"LegalPositionFrom"提供的表中选择最佳局面的问题.

当我们进而详细考虑走着的表示时，我们发现在普通的棋盘上方格的编号用起来不方便，因为有两类方格(在不同的行上交错)它们需要不同的规则.萨缪尔想出一个巧妙的方法以避免这个困难.在棋盘上增加不同的行和列并把方格重新编号，他产生一个方案，在其中可对于棋盘上实际用到的部分的所有方格，所有可能的走着都类似(见 612 页下图).

所有可能的走着(未被吃掉的子)分成四种类型，每一种都可表成一个字(由 45 比特组成)

它能标出其类型中任一走着.在我们已经用到的记号的框架的范围内,为表示吃着和小卒升级为上也是简单的事.

全面详细地讨论一个实用的象棋程序超出了本文的范围.然而,编写这样一个程序的过程的主要轮廓现在应当清楚了.第一步是得出有关如何解决这个问题的一个模糊观念.第二步是列举实现这个最初计划所需的操作,把这些操作在其上作用的对象命名,这样可以将它形式化.第三步是澄清这些对象的定义并对它们中的每一个都设置一个表示.这些表示应当首先由作用于这些对象上的操作所确定.一旦这些表示已经被决定,分支操作能够用它们更为精确地定义.于是你能够加细这个过程,改正可能在表示中显露的错误和缺陷,并且相应地校正这些操作.

在这个阶段,该程序的大部分要用的脑力工作看来都已完成了.我们已经精确地列举了我们希望计算机去做什么.剩下是将程序转变为计算机指令,这应当仅仅是常规的了.然而不幸,事情并不能这样进行下去,并且任何一位没有运用计算机经验的人,可能会很不高兴,令他感到惊奇的是仍然需要付出大量的时间和劳力.

首先,计算机不能直接接受相当复杂难懂的指令,而我们很愿意给它的又恰是如此.几乎可以肯定,我们将用到的操作对于任何一台计算机都是过多了.为了避免机器无能直接去做我们所希望它做的,我们可以把我们的程序用一个标准编程语言写出来,并且让该机器将这个程序翻译成它自己的简单得多的代码.这似乎是计算机的一个精彩用法,即让它为我们完成苦力活,但是很不幸,这仍不能摆脱烦重劳动.我们必须去做大量的显然无关联的,然而是为此目的而专门安排的工作,来迫使程序成为适合于现行的编程语言的形式.

现在已有相当一批这类编程语言:FORTRAN,ALGOL 和 MAD(主要用于科学问题);JOVIAL(军用);COBOL;SIMSC RIPT;LISP;PLI;CPL 等等.为指出语言的不同格式,我们给出三个样本:用 CPL,ALGOL 以及 FORTRAN 分别写出一个简单程序以求函数 e^x(见 611 页插图).

大约九年以前这种类型的编程语言的出现大大丰富了编程技艺.在那以前一个含有 5 000 条指令的程序就被认为是很大了,并且只有那些最有经验或者蛮干的程序员才会去尝试.今天一个人能够处理大约 10 倍大的程序;一队人的合作能够生产出再大五至十倍的程序.

新编程语言中最为重要的是 FORTRAN;直到最近,估计已经作出的科学和工程程序超过百分之九十是用它来写出的.在过去的几年逐渐弄清楚了,现有的编程语言没有完美无缺的,而 FORTRAN 的巨大成就在于它的相对的而不是绝对的优点.其他的编程语言诸如 ALGOL 和 LISP 已经显示出它们有比较容易的办法在计算机上处理某些问题.

```
ChosenPosition(P) = value of
      § let L = LegalPositionsFrom(P)
        if Null(L) then Resign
        let (p, v) = BestPosition(NIL, −∞, L, 0)
        result is p §

BestPosition(P, V, L, d) = Null(L) → (P, V), value of
      § let (p, l) = Next(L)
        let v = − PositionValue(p, d − 1)
        result is (v > V) → BestPosition(p, v, l, d),
                            BestPosition(P, V, l, d) §

PositionValue(P, d) = Terminal(P, d) → TerminalValue(P), value of
      § let L = LegalPositionsFrom(P)
        let (p, v) = BestPosition(NIL, −∞, L, d)
        result is v §

LegalPositionsFrom(P) = value of
      § let L = RemainingPositionList(P, Capture, 5)
        result is Null(L) → RemainingPositionList(P, NonCapture, 5), L §

RemainingPositionList(P, C, s) =
        PartialPositionList(P, C, s, FindMoveList(P, C, s))

PartialPositionList(P, C, s, L) =
        Null(L) → ((s = −5) → NIL,
                RemainingPositionList(P, C, NextMoveDirection(s))),
            value of
      § let φ = SingleDigitFrom(L)
        let Ip = MakeMove(P, C, s, φ)
        let l = (C = Capture) → CaptureTree(Ip),
                          FinalPosition(Ip)
        result is Join(l, PartialPositionList(P, C, s, L − φ)) §

NextMoveDirection(s) = (s = 5) → 4, ((s = 4) → −4, −5)

FindMoveList(P, C, s) = value of
      § let (X, Y, K, σ) = P
        let Empty = ~X ∧ ~Y ∧ Board
        let ψ = (C = Capture) → (Shift(Empty, σs) ∧ Y), Empty
        let φ = Shift(ψ, σs) ∧ X
        result is (s > 0) → φ, φ ∧ K §

MakeMove(P, C, s, φ) = value of
      § let (X, Y, K, σ) = P
        let ψ = (C = Capture) → Shift(φ, − σs), NIL
        let θ = (C = Capture) → Shift(ψ, − σs),
                                Shift(φ, − σs)
        let Xk = Null(φ ∧ K) → (θ ∧ LastRows), (θ − φ)
        result is ((X − φ + θ), (Y − ψ), (K − ψ ∧ K + Xk), σ, θ) §

FinalPosition(Ip) = value of
      § let (X, Y, K, σ, φ) = Ip
        result is (Y, X, K, − σ) §

CaptureTree(Ip) = value of
      § let L = PartialCapturePositionList(Ip)
        result is Null(L) → (FinalPosition(Ip)),
                            CombineCaptureTrees(L) §

PartialCapturePositionList(Ip) = value of
      § let (X, Y, K, σ, φ) = Ip
        let P = (X, Y, K, σ)
        result is (Null(φ ∧ K) → PCP(P, φ, 5), PCP(P, φ, 4)),
                            PCP(P, φ, [illegible] K − 4), PCP(P, φ, [illegible] K − 5)) §

PCP(P, φ, s) = value of
      § let (X, Y, K, σ) = P
        let ψ = Shift(φ, − σs) ∧ Y
        let Empty = ~X ∧ ~Y ∧ Board
        let θ = Shift(ψ, − σs) ∧ Empty
        let Xk = Null(φ ∧ K) → (θ ∧ LastRows), (θ − φ)
        result is Null(θ) → NIL,
                  ((X − φ + θ), (Y − ψ), (K − ψ ∧ K + Xk), σ, θ) §

CombineCaptureTrees(L) = Null(L) → NIL, value of
      § let (Ip, l) = Next(L)
        result is Join(CaptureTree(Ip), CombineCaptureTrees(l)) §
```

PRIMITIVE FUNCTIONS

a LIST FUNCTIONS

L	LIST
Null(L)	TRUE IF L IS THE EMPTY LIST (NIL) FALSE OTHERWISE
Head(L)	FIRST MEMBER OF L
Tail(L)	WHAT REMAINS OF L AFTER Head(L) IS REMOVED
Next(L)	LIST WHOSE MEMBERS ARE Head(L) AND Tail(L)
Join(L_1, L_2)	A SINGLE LIST FORMED FROM THE MEMBERS OF L_1 AND L_2
MinList(L_1, L_2 …)	A SINGLE LIST FORMED FROM THE MEMBERS OF SEVERAL LISTS. ALSO LEAVES OUT NULL LISTS AND REPETITIONS

b BIT-STRING FUNCTIONS

~	NOT
∧	AND
∨	INCLUSIVE OR
x + y	SAME AS x ∨ y
x − y	SAME AS x ∧ (~y)
SingleDigitFrom(x)	A BIT STRING OF THE SAME LENGTH AS x WITH A SINGLE 1 IN A POSITION CORRESPONDING TO ONE OF THE 1S IN BIT-STRING x
Shift(x, n)	THE BIT-STRING x SHIFTED n PLACES TO THE RIGHT IF n < 0, THE SHIFT WILL BE TO THE LEFT DIGITS THAT ARE SHIFTED OFF THE END OF THE BOARD ARE LOST DIGITS SHIFTED ONTO THE BOARD ARE 0S

c STRATEGY FUNCTIONS

Terminal(P, d)	TRUE IF P IS TERMINAL, FALSE OTHERWISE
TerminalValue(P)	VALUE OF P (COMPUTED WHEN LOOK-AHEAD BEYOND P IS UNDESIRABLE)

DATA STRUCTURES

a 45-BIT STRINGS

X	PLAYER'S MEN AND KINGS
Y	OPPONENT'S MEN AND KINGS
K	KINGS ON BOTH SIDES
φ	SQUARE MOVED FROM
ψ	CAPTURED PIECE (IF ANY)
θ	SQUARE MOVED TO
Board	1S ON BOARD SQUARES, 0S ELSEWHERE
LastRows	1S ON SQUARES NUMBERED 5, 6, 7, 8, 36, 37, 38, 39

b POSITIONS

σ	NEXT PLAY σ = +1, BLACK TO PLAY σ = −1, WHITE TO PLAY
P, p	ORDINARY POSITIONS WITH COMPONENTS X, Y, K, σ
Ip	INTERMEDIATE POSITIONS WITH COMPONENTS X, Y, K, σ, φ, WHERE φ INDICATES THE PIECE THAT CAN MOVE

c MISCELLANEOUS

C	CAPTURE OR NONCAPTURE
s	DIRECTION OF MOVE s = 5. FORWARD, LEFT s = 4. FORWARD, RIGHT s = −4. BACKWARD, LEFT s = −5. BACKWARD, RIGHT
V, v	POSITION VALUE
d	DEPTH OF LOOK AHEAD

上图的左列给出了完全的象棋程序. 程序中使用的语言是 CPL 的一个非正式而有某些扩展的版本. 列举在这个特殊程序中的逻辑函数的名称("ChosenPosition"及其他)的选取,是为了使它们控制的操作能看得出来. 在这个程序中用到的基本的或推广的函数以及特别的数据结构的一览表列在右栏中. 程序中略去的主要东西是输入和输出的安排,以及定义游戏策略的函数(Terminal(P, d)和 TerminalValue(P, d)). 这个程序尚未在一台机器上调试过,因此根据本文中的看法,它可能仍然包含着某些错误;有兴趣的读者可以去把它们找出来. 一般记号"Condition→A, B"是一个条件表示式,如果条件被满足,(即如果它正确)则其值是 A,否则是 B. 涉及吃着的部分用深色印出.

回到我们的象棋程序：我已经用CPL(它表示“组合编程语言”)的一个非正式而且有些扩展的版本写下了完整的程序(某些细节除外包括输入和输出的布置). 这个符号形式的程序连同用到的术语表和它们的定义，见上页. 这个程序决不是最终的形式；它还没在一个机器上运行过，因此根据下面所表示的观点，它可能包含着某些错误. 有兴趣的读者可以去把它们找出来.

在计算机编程的早期，就说十五年前吧，数学家习惯于认为只要充分小心他们就能写出正确的程序来. 后来使他们大为吃惊的和烦恼的是，情况并非如此，而程序极少例外都含着大量的错误. 发现有错误，找出错误的位置并且改正错误的过程是非常困难的，经常要花费比当初写程序长得多的时间并且还要耗用大量的机器时间.

虽然编程技术从早期至今已经有很大改进，发现和改正程序中的错误的过程——一个形象但不太文雅的说法是“捉虫”(debugging)——仍然是一个最困难，令人烦乱的并且使人不满意的工作. 遇上这种情况的主要影响是心理上的. 虽然我们都很喜欢说一个老生常谈：犯错误乃人之常情，但多数人都希望当我们自己去做的时候，也许运气会好些. 然而泄气的是机器开诚布公地并且无可争辩地显示，即使是我们去尝试，我们所犯的错误事实上正同其他人一样的多. 如果你不能从这个打击中恢复你的自尊，你就不能当一个程序员.

事实上，人的本性并非完美无缺的. 并且相信将来会完美无缺也是不现实的. 要使一个程序正确，唯一合理的办法看来是：先假设它包含着错误，然后一步一步来发现并纠正它们. 这个态度，任何一位接触过设计某个大规模操作的人都是熟习的，但是对大多数没干过的人来说则是完全生疏的.

我认为麻烦的是，大多教育过程投入了很高的费用，为的是第一次就能得出正确答案. 如果你对一个考试题给了错误答案，你丢了分而这就完蛋了. 如果你在写你的程序中犯了一个错误——同样，在教室外的实际生活中的其他情况下犯了一个错误——这无论如何不是一场灾难. 不过，你应当找出你的错误并改正它. 可能如果大学教学上也更多地采取这个态度，事情会更好些.

当我们开始掌握一台计算机并且试图实际运行一个程序，或者检验它，或者为获得某些有用的结果，我们的确开始会遇到挫折. 尽管机器的速度快得不得了，通常你还得花几小时有时要几天才能实际得到那怕是最短的程序的答案. 等待时间这样长，再加之计算机及其编程语言以及汇编语言常常没有什么用，从而经过一整天的等待结束，你得到的仅有信息可能就是：“你的程序还是错的”. 因此很容易理解为什么有那么多的人有这样一个印象：使用一台计算机或者一

个系统，与其说它是合作关系不如说是在和它打仗.

这种古怪情势产生的原因是每个人都希望尽可能长久地完全占有计算机，而它是一台非常昂贵的机器. 在计算机之外的常常雇了一大批操作人员的机构应当对几乎所有的“周转时间”以及相当大的一个比例的挫折负责. 分时系统的引进将会消除这种烦恼，但要付出代价；操作程序的规模和复杂性会大为增加（参见法诺（Fano）和柯尔巴托（Corbató）的“计算机上的分时”，《科学美国人》，1966 年 9 月号）.

为使一个程序可以实际运行，很大一部分工作能够由计算机本身来完成. 诸如将编程语言翻译成详细的机器代码，分配计算机内的存贮空间，保存记录以有助于诊断程序错误，组织来自不同的用户的简短任务的一个系列的安排和计算以及类似的种种操作都是一种高级文秘工作，而计算机能够掌握得很好，因此要求机器来完成它是很合理的.

使机器能实现这些操作的程序是极为重要的. 大多数计算机用户与它们的接触远多于与计算机本身的接触，由于这个缘故，操作程序被人们称为软件系统（相对于此计算机本身则人们称为硬件）. 实际上一个系统的实现依赖其软件的程度与其硬件一样，并且软件系统的设计和撰写正在迅速地成为计算机厂家们的一个主要问题. 整组的这种程序，称为软件包，厂家生产和调试它们的成本和生产机器本身很容易是一样的大. 结果就出现很强的压力：尽可能不让改变编程语言也不让改变操作系统，尽管它们在许多方面是严重地不适应的.

为什么从一个程序的构想到它由机器的实现的道路是如此之长和令人厌倦的？为什么今天操作系统——软件——是如此昂贵和令人不满意？难道可能我们正在接近人类编制复杂的程序的极限，而现在的软件危机，的确是由于企图挑战人类能力之外而产生的结果？任何经营大计算机系统的人今天都清楚，整个事情在其自身复杂性的重负之下是如何接近于崩溃.

无疑问的是在当前技术条件下我们已接近于到达我们编程的极限了. 然而难道我们不能改进技术吗？我们在本文中已经考虑过的象棋例子给出了强烈的暗示，编程语言的简化做法和改进将会使事情变得容易得多. 如果一个合适的编程语言已经存在，显然人应当可能用上面概述的办法来编写整个象棋程序，而将几乎所有其他步骤留给计算机去实现. 事实上，目前这已差不多能够完成了，并且构作一个可能的语言大概不太困难.

来着手做一个大而复杂的程序唯一合适的办法是用等级方法. 因为在一段时间里，我们的头脑能掌握的问题的规模和复杂程度是有限度的，看来扩展我们的能力的最好的办法是将相对大而且复杂的各个操作化为单个的单元来处理，然后把它们按等级组合起来. 现在的编程语言都只是口头上说说这个观念，而并不允许真正无限制地实现分等级——程序员必须同时考虑的仅有两三个水平的操作（诸如“局部”和“整体”）. 那些允许真正分等级处理一个问题的语言仅有

有限的能力来处理表示.

今日的计算机本身,对于使用是分等级地(或递归地)编写程序是一块绊脚石. 因为计算机不适应于这类编程,这样一个程序的运行比用通常办法编写和译码的程序慢得多. 然而,我相信这类编程的优点远远超过它可能需要更多的机器时间这一缺点. 优点是如此之大,我相信分等级方法终究会被广泛接受. 无论如何,任何机器的主要目的是减少人类的麻烦;因此,把人所做的工作更多地交给机器,我们不必为此不适当地过分不安. 此外,有很好的理由期望有可能设计出更加自然和有效地处理深度分等级的程序的计算机. 这些机器将可能比现在的稍微复杂些,但是成本上的差别会是很合算的.

作为本文的结束,我现在谈谈编程语言. 在我看来这是最困难的,然而也是最有兴趣的和非常值得的问题,这就是要为构作程序的分等级系统而奠立一个坚实的数学基础,并且发展一个算法来操作它们.

困难基本上来自这样一个事实:编程向我们提出某些新的问题,它们在任何其他数学分支中都没有出现过,或至少并不重要. 这个数学问题有两个方面. 头一个是如何显式地并且详细地处理复杂的结构(包括数据表示),同时要使该结构不仅作为一个整体而且其分支部分也必须是命了名的而且有着为它们指定之值. 困难的第二方面是为编程中应用祈使语气(即命令语气)引入一些变量,但是数学,一般来说,并不能识别在此意义下的变量的存在性,即是说,值在一段时间之内会变化的变量. 数学在其传统分支中只处理静止的状态. 甚至涉及极限方法的微积分用级数来处理课题时也只算到固定的项为止. 一般说来数学家称为变量的东西或者是其值尚不知道的常数,或者是不存在的量(诸如"无人"),引入它们是为了逻辑语法的需要. 另一方面,在编程中我们正是用到一个过程的性质来处理随时间变化的变量;一个程序的本质就是调度这些变化.

一位有经验的程序员读到本文时会对下述事实感到震惊,在讲象棋程序时我没有用到命令,特别是该程序不含有赋值语句(为名称和对象赋值的语句). 这样做的缘由是仅当不出现赋值语句时我们才知道如何去把递归地定义的函数组合成等级结构. 如果赋值语句也包括在内,则至今仍无满意的办法来完成同样的事情.

我上面讨论过的数学问题的研究现在已经开始了. 从一开始就很清楚,我们打算开发的这个领域几乎完全是新的,没有现成的方针,而在数学研究的大多数其他领域里则是有的. 同样明显的是,第一位的和最困难的任务是弄清楚在编程的上下文中用诸如"名称"和"价值"等术语究竟是什么意思. 主要的麻烦是赋值的引入(伴随着情况的改变值也要改变)使这些术语的意义,

从通常在数学中应用它们的观点看来，是含糊不清的，因此，似乎可能为了坚实地把握这种情形我们需要产生一些新的概念.

在编程语言领域中现在正在完成的许多理论工作是涉及语言语法的. 本质上这意味着这项研究涉及的不是这个语言在说什么而是它如何说. 这个途径似乎为新概念的形成设置了几乎不可克服的障碍——至少是在涉及语言的意义时是这样. 我相信，对于程序员来说，取得成功的道路是沿着研究意义而不是研究语法的道路而展现. 我们将主要是通过研究意义来发展建构等级系统所要求的概念.

48.

控制论

诺伯特·维纳(Norbert Wiener),1948 年 11 月号

控制论一词的发明是为了定义科学中的一个新领域.它在同一个条目下把两种研究组合起来,其一是以人类为背景而泛称之为思维,其二是在工程中所谓的控制与通讯.换言之,控制论努力寻求自动机与人类神经系统功能的共同点,并且建立一个包含机器与有生命的有机体中的控制与通讯这整个领域的理论.

大家都知道,人脑最复杂的活动和一个简单的加法机的运作,二者在一个很广阔的领域中是互相重叠的.比较精巧的现代计算机都能进行记忆,联想,选择还能进行脑的许多其他的功能.说实话,专家们已经使这类机器精巧到这样的地步,甚至可以说人脑的行为很像机器.越来越复杂的机制的建立已经使我们更接近于了解人脑本身是怎样运作的.

控制论即 cybernetic 一词借自希腊文 kybernetes,意为舵手.这字通过其在拉丁文中的衍生词 gubernator 变成为 govenor 一词,它在机械学中意为调速器等等,在很长一段时间里是指一种类型的控制机制,这是苏格兰物理学家麦克斯韦 80 年前一个卓越研究的标题.麦克斯韦和控制论研究者选用这个词打算描述的基本概念都是反馈机制,而它最好不过地可以用船的舵机为代表.下面的例子可以把它的意思说清楚.

假设我拾起一支铅笔,为此我要让某些肌肉运动.只有解剖专家才知道究竟是哪些肌肉,而甚至是他也很难做到自觉地按自己的意愿依次收缩每一条有关的肌肉.其实我们想要做的并非运动个别的肌肉,而是拾起铅笔.一旦我们决定了要做这件事,手臂和手的运动将是这样进行的,使得离开铅笔被我们拾起来的差距一步步缩小.这一部分动作并非完全自觉的.

要这样完成一个动作,必须向神经系统作报告,不论是自觉还是不自觉的,使它知道在每个

时刻离拾起铅笔还差多少. 这个报告可以是视觉的，至少部分的是，但它更一般地是运动感觉的，或者用流行的说法，是本体感受的. 如果没有本体感受的感觉，而又不能用视觉或别的什么来代替，我们就不能完成拾铅笔的动作，我们就处于一种称为运动失调的状态. 另一方面，过分的反馈可能也是同样严重的障碍. 这时，肌肉超过了标的，然后发生一种不能控制的颤动. 这种情况常与小脑受伤有关，称为目的震颤.

于是在这里神经系统的工作和某些机器的工作有明显的平行性. 反馈原理在神经生理学中引进了一个重要的新概念. 中枢神经系统不再只是一个自足的器官，它只是从感官收到讯号，再传递到肌肉. 相反地，它的某些最为特征的活动只能用一个环形的过程来解释，即由神经系统传到肌肉后，再通过感官传回神经系统. 在把对象作为一个整体的研究中，这个发现似乎标志了前进一大步.

控制论所代表的新方法——即一种统一的研究，既非严格生物学的，又非严格物理学的，而是二者的综合——已经有证据表明在解决工程和生理学的许多问题上，还很可能在精神病治疗上有用.

这个工作是作者和罗森布吕特(Arthuro Rosenblueth)(当时他在哈佛医学院，现在在墨西哥国立心脏病学研究所)几年合作的一项研究计划的成果. 罗森布吕特博士是一位生理学家；我则是一个数学家. 多年来罗森布吕特博士和我共有一个信念，科学的生长中最富有成果的领域就是在不同的已发展领域之间被人忽视的无人地带. 罗森布吕特博士常坚持，真正开发科学地图上这些空白地区只有依靠科学家的小组，其每个成员都专于一行，但对他的同伴们的领域要有彻底可靠的知识.

我们的合作始于一项战时的任务. 我和一位同伴比格罗(Julian H. Bigelow)受命研究一项高射炮用的火力控制装置，它要能跟踪飞机的曲线航程并预测其位置. 我们很快得出结论，这个问题的任何解决方案都大大依赖于反馈原理，因为它不仅是仪器问题，而且涉及大炮和飞机的操作人员. 我们带着一个关于神经系统中的震颤的具体问题来找罗森布吕特博士，他的回答中讲到目的震颤这个词，肯定了我们关于反馈在有意识活动中的重要性的假设.

这次讨论提示的一些思想引导我们共同做一些实验，其中之一是研究猫的肌肉的反馈. 我们研究的范围逐渐扩大，同时，来自极不相同领域中的科学家也参加进来了. 其中有数学家普林斯顿高等研究所的冯·诺依曼(John von Neumann)和 MIT 的匹兹(Walter Pitts)；生理学家宾夕法尼亚大学的麦卡洛(Warren McCulloch)和洛克菲勒研究所的德·诺(Lorente de No)；已故的心理学家 MIT 的莱文(Kurt Levin)；人类学家贝特逊(Gregory Bateson)和米德(Magaret Mead)；经济学家普林斯顿高等研究所的摩根斯特恩(Oskar Morgenstein)；还有来自心理学、社

会学、工程、解剖学、神经生理学、物理学等等领域的其他专家.

控制论的研究可能会在许多领域中都有富有成果的应用:从假肢的控制机械到工业的几乎完全的自动化.但在我们看来,它还会包含广阔得多的思想领域.如果说17世纪和18世纪前期是钟的时代,18世纪后期和19世纪是蒸汽机的时代,那么现代就是通讯和控制的时代.在电机工程中有一个分划,即把强电技术和弱电技术分开;正是这种划分把才过去的时代与我们生活于其中的时代分开了.通讯工程与动力工程的分别在于,前者主要注意的不是能量的节约而是讯号的准确复制.

从狄达洛斯*以来,在技术发展的各个阶段中,技师制造一个东西,它是能作一些事的有生命物体的模仿,这个想法一直困扰着人们.在巫术的时代就有高兰(Golem)这种奇特邪恶的想法:这是一个泥人.布拉格的犹太教士向它吹气,赋给它生命.在牛顿的时代,自动机就是上发条的八音盒.19世纪的自动机就是大名鼎鼎的蒸汽机,但它用的是可以燃烧的燃料,而不如人的肌肉用的是葡萄糖.我们时代的自动机则能用光电池开门,能把高射炮指向雷达波束找到敌机的地方,或者能算出微分方程的解.

在19世纪占统治地位的科学观的影响下,关于人体的工程自然地被看成是动力工程的分支.甚至今天,在具有经典观点的保守生理学家中这仍是统治的观点.但是现在我们逐步看到,人体远非一个保守系统,他的能力受到的限制远远少于过去我们所相信的.我们开始看到,如像神经元——我们的身体的神经复合体的单元——这样重要的元素,工作的条件与真空管的工作条件非常相像,它们所消耗的相对小的功率是由人体循环从外面供给的,为了描述它们的功能,最要紧的指标并不是耗能的多少.

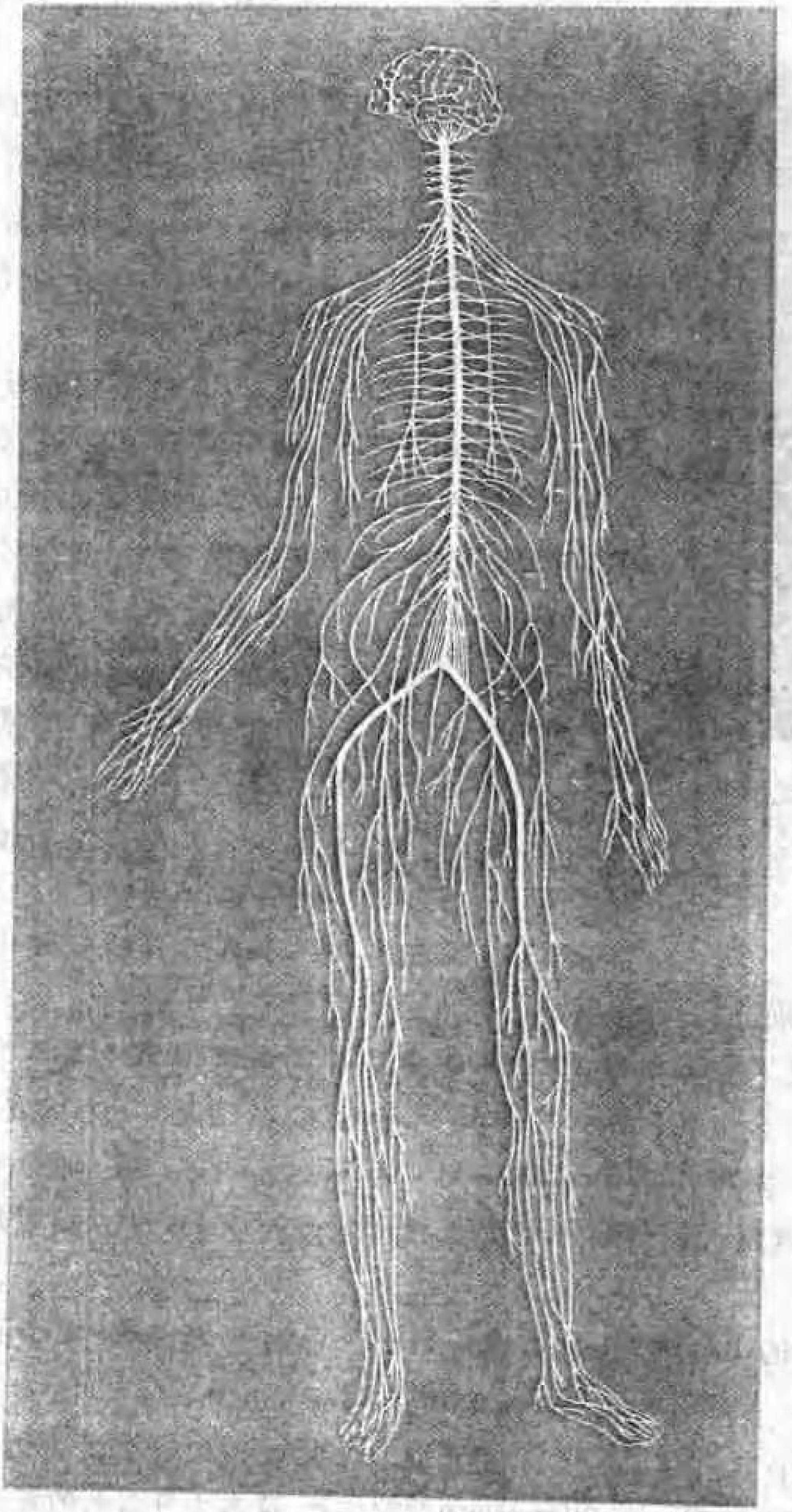
总之,关于自动机——不论是金属的还是血肉的——新研究是通讯工程的一部分,其主要的思想是信息,是干扰的量,即“噪声”(这是从电话工程中借用的),是需要传递的信息之量,还有编码技术等等.

这个观点显然会有影响许多科学分支的意义.现在考虑控制论对于心智的失调的应用.认识到人脑与计算机有许多共同之处会对精神病理学甚至精神病治疗提供新的可用的途径.

这项研究可以从似为最简单的问题开始,这问题就是:人脑怎样避免完全错乱,或由于脑的某些部分出问题而行动完全失调.关于计算机,类似的问题有实际的重要性,因为在这里一连串动作会延续几小时到几天,而每一个动作只有几分之一微秒.计算运算之链可以涉及几十亿个

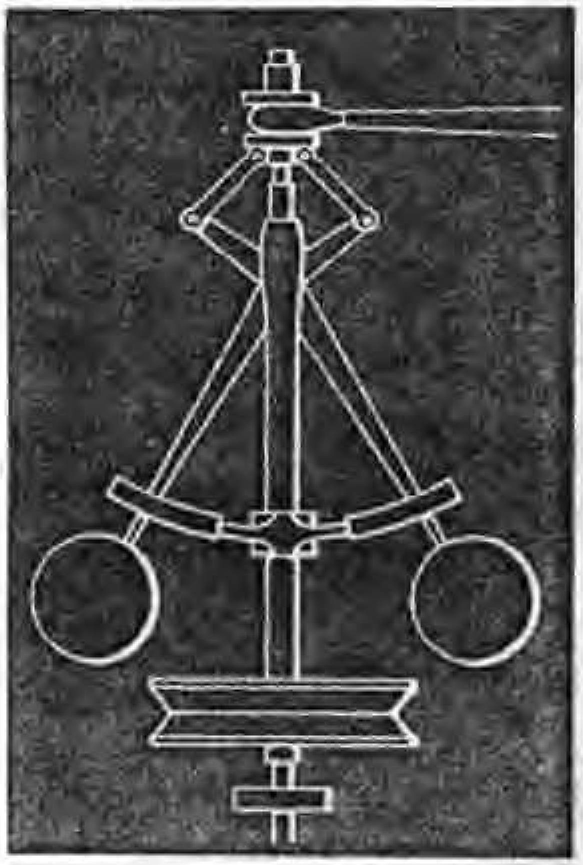
---

* 译注:狄达洛斯(Daedalus)是希腊神话中的巧匠,建筑师和雕刻家.他曾为克里特国王建了一个迷宫.



神经系统，从控制论角度看来，不只是一个接收和传递信号的自足的系统. 它是一个回路，当某些脉冲进入肌肉并且通过感觉器官再进入神经系统时，反馈原理就起作用.

单独的步骤.在这种情况下,决不可忽略至少一个运算会出错的机会,尽管现代电子仪器的可靠性已超过了最乐观的期望.



蒸汽机的调速器是反馈的一个例子,反馈是控制论最重要的基本概念之一.

用手或台式计算机作计算时,通常的作法是检查计算的每一步,一旦发现错误,就从第一次发现错误处向前倒推,这样来确定错误何在.如果要对于一个高速计算机这样作,检查之快必须与原机器的速度相一致,否则机器的有效速度的量级将下降到与较慢的检查过程相一致.

一个好得多的检查方法,也是现在实际上在用的方法,是把每一个运算同时交给两个或三个机制.如果使用了两个这样的机制,则所得的结果会自动地被互相详加比较:如有差异,就会把全部数据送入永久的存储器中,就会停机,并对操作者发出讯号说明出了问题.操作者就会比较计算的结果,并以之为引导找出有毛病的零部件,可能是一个真空管烧了而需要换一个.如果在每个阶段都使用三个分开的机制,则实际上,三个机制中总会有两个给出相同的结果,这个相同的结果就是解答.这时就会有一个登录的机制,接受多数机制所作的报告而不必停机.然而这时会有一个讯号说明在何处怎样有一个少数的报告与多数机制的报告不同.如果在一出现差异时就发出讯号,则它所指出的错误的位置可以是很精确的.

可以想像到,而且不是不可能的,这一过程在神经系统中至少有两个要点会出现.其一是很难设想,一个重要信息会全托付给一个神经元来传递;其二是,一个重要的动作会只交给一个神经机制去执行.人脑,大概也和计算机一样,是按照卡罗尔*在《捕猎蛇鲨》(The Hunting of Snark**)一书中详细解释过的著名原则的某种形式来行事的,这原则就是:"我告诉过你三次的,就是真的."

可用来传递信息的不同通道,其行程都是由一端通向另一端,而不互相交叉也不大可能.可

---

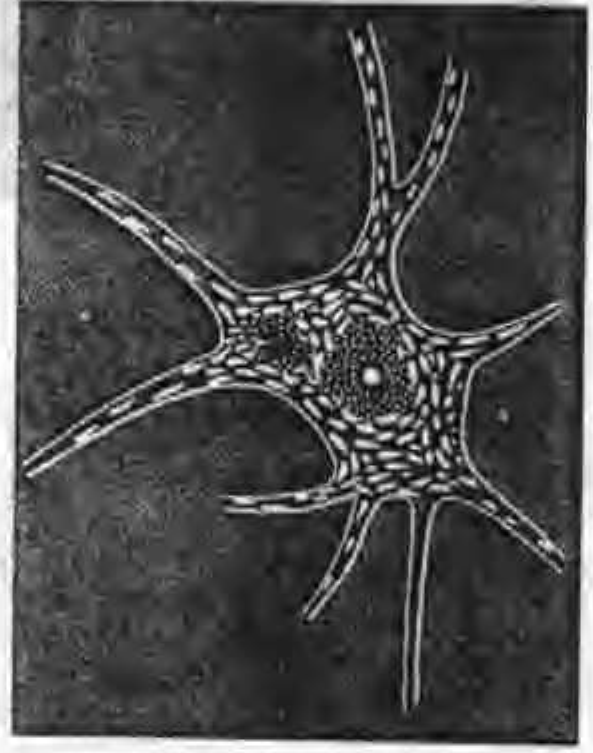
* 译注:刘易斯·卡罗尔(Lewis Carroll),即数学家和逻辑学家道奇森(Charles Lutwidge Dodgson),《阿丽斯漫游奇境记》(Alice in Wonderland)的作者.这本十分著名的童话书中充满了以文字游戏、语义双关等形式表现的逻辑上的道理.他的其他著作无不如此.卡罗尔是他写这种童话书时用的笔名.

** 译注:Snark是一种并不存在的鱼,大概是把snake(蛇)与shark(鲨鱼)合并成一个新字而成,因为刘易斯·卡罗尔很喜欢干这种事.

能得多的情况是：当一个信息到达神经系统的某一层次时，它从这一点再进到下一点，有好几个通道可供选择．神经系统有些部分，特别是脑的皮质，这种信息的交换很受限制，甚至没有．但是这个原理还是成立的，特别是在皮质的不太专业化的区域，即为联想和所谓高级精神功能服务的区域，这个原理最清楚不过地成立．

迄今为止，我们一直在考虑正常功能中的差错，它们只在广义意义下是病态的．现在我们来讨论更明显是病态的情况．精神病理学多少使医生们本能的唯物主义失望，他们抱有这样一种信念，即每一种症状都一定伴随着某个特定的有关组织的真实的损伤．确实的，特定的脑损伤，例如外伤，肿瘤，栓塞等等会伴随有精神方面的病症，而某些精神疾病，如不全麻痹，是一般躯体疾病的后遗症，并在脑组织上有病变，但是却没有办法从脑的病变来辨认出严格的克拉帕林(Kraepelin)型精神分裂症患者，或是躁郁狂精神病患者，或是妄想狂病患者，我们把这些疾病说成是功能性的．

考虑计算机能使我们对功能性疾病和器官性疾病的区别看得更清楚．并不是计算机的空无一物的物理结构相应于人脑——至少是成人的脑——与人脑相应的是计算机结构再加上在运算开始时给它的指令，以及原来就存储于其中的，和在运算过程中从外界获得的附加的信息．这种信息以某种物理形式——即以记忆的形式贮存起来．但其中一部分是以流动的记忆的形式贮存的，当机器关闭或人脑死亡，这种记忆的物理基础就消失了，另一部分则以长期记忆的形式贮存，其贮存方式我们现在只能猜想，但可能是这样一种形式：其物理基础在死亡时才消逝．

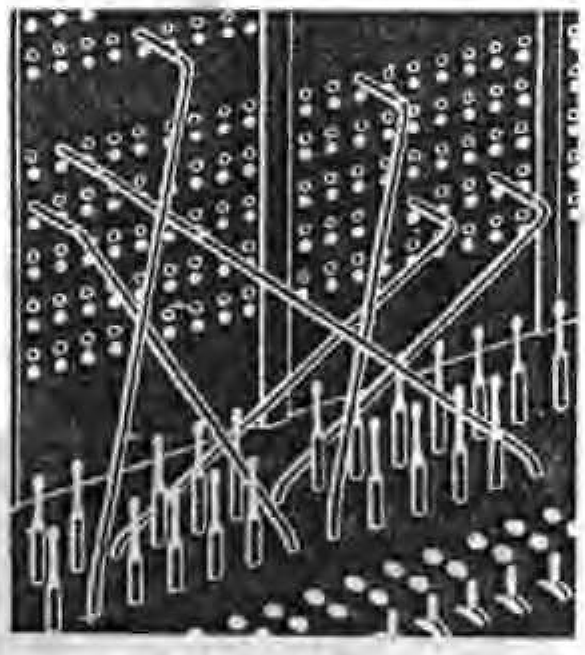


神经细胞是在与真空管十分相似的情况下实现其功能的，它由外部获取能量．

因此，把功能性的疾病基本上看作是脑在活动状态下保持的流动记忆的疾病，以及神经突触的长期的透过率的毛病，这没有什么可奇怪的．甚至如不全麻痹这种更严重的疾病，也主要不是由于有关的组织受到损伤和突触阈值的变化而产生其大部分后果，引起它们的更多是由于这种初级的损伤所必然引起的信息传递的次生的扰乱，余下的神经系统的过度负荷，以及信息的另寻通道．

在一个包含大量神经元的系统中，流动的过程很难长时间保持稳定，或者这种过程在进行中逐步消散终于消失，例如那种对似有实无的事情的记忆就是这样，或者这种过程会涉及这个系统中越来越多的神经元，以至在神经元库中占据的部分过大．这就是我们能够看到的，在焦虑性精神病中的恶性忧虑．这种情况可能简单地就是因为患病者缺少空间——即缺少充分的神经

元来进行正常的思维. 在这种情况下，脑中未受影响的神经元的活动比较少，所以它们更容易被逐渐扩张的过程所牵涉. 此外，长期记忆也越来越深地被卷进来，原来在流动记忆的水平上开始的病态过程，就会在长期记忆的水平上以更难对付的形式再现. 这样，原来比较微小偶然的稳定性的破坏，可能积累为对正常精神生活具有完全破坏性的过程.



电话总机如果负荷过大，就会垮掉，很像对于人所发生的情况.

在机械的和电子的计算机器中，与此多少相似的病态过程也是人们知道的. 一个齿轮的齿可能在这种情况下滑动了，而与之相啮合的别的齿不能再与它回到正常的啮合关系，高速电子计算机械也可能进入死循环而无法停机.

在机器的情况下怎样处理这种事故呢？我们首先就会设法把机器中的信息清洗掉，希望当它用别的数据重新启动时，这个困难不再出现. 如果这也失败了，清洗的机制达不到出现困难的地方，我们就会摇一下这个机器，而如果是用电的机械，则输进一个异常强的电脉冲，都是希望把这个达不到的地方震到这样一个位置上，使其活动的虚假的循环能被打断. 如果这个再不行，我们可以把机器的有毛病的部分拆掉，很可能留下的部分就已经够用了.

在脑的情况下，除了死亡以外，再没有别的正常的过程能够清洗掉其中一切过去的印象. 在非致命的正常过程中，睡眠最接近于对脑的清洗. 我们最经常不过地看到，睡眠是处理复制的忧郁与混乱的思维最好的方法！然而，睡眠并不能清除掉更深层的记忆，在恶性的忧虑状态下也不能有充足的睡眠.

这样，我们只有求助于更剧烈的干预记忆循环的手段了. 这些手段中最剧烈的就是对脑进行外科手术，而对患者留下永久性的破坏、伤残和能力的削弱，因为哺乳类的中枢神经系统似乎是没有再生能力的. 现在实用的主要的外科干预的手术叫做前额叶切除术，它就是把脑的皮质的前额叶切除或与其余部分隔绝开来. 这种手术现在相当流行，而与对患者比较容易护理不无关系.（我顺便说一句，把他们杀死，护理就更容易了）. 前额叶切除术对于恶性忧虑似乎确有效果，但这不是使患者更接近于真正解决问题，而是毁坏他能够忧虑的能力，用其他职业的说法，这就叫做良心. 它是对流动记忆——即把不复存在的状况保存在心中的能力——的损坏.

各种形式的休克疗法——用电，用胰岛素，用五甲烯四氮唑——是对付类似情况的不那么激烈的方法. 它们并不损伤脑组织，至少是不打算损害脑组织，但是它们对于记忆有肯定的破坏效果. 因为休克疗法只影响新近才出现毛病的记忆，而这种记忆保存的价值又不大，所以值得推

荐它来代替前额叶切除术，但有时，它也会对长期记忆和人格都产生有害的后果. 它现在仍然是用作一种剧烈的干预精神上的恶性循环的未能完全理解、完全控制的手段.

对于比较重的长期的精神病患者，长期记忆也和流动记忆同样受到严重损害. 我们似乎还没有药物的或外科手术的办法来有选择地干预长期记忆. 这里就是精神分析和其他精神疗法介入之处了.

不论精神分析是用于其正宗的弗洛依德(Freud)意义，还是用于后来的荣格(Jung)或阿德勒(Adler)意义，甚或完全不是严格的精神分析的精神疗法，这些治疗都是基于以下的原则，即意念中存贮的信息，达到它们的难易层次是不同的. 它的效果和能够达到贮存信息的层次，深受情绪方面的经验之制约，而不是总能够用内省来发掘的. 精神分析家的技巧就是一系列发掘并解释这种隐藏着的记忆的方法，并使病人相信就是有这样的记忆，然后，即使不能改变这种记忆的内容，至少也要改变它们所带有情绪的色调，使之较少危害.

15 世纪的自动机. 造一个模仿活体的能干活的假人这种尝试有许多，这只是其中之一.

所有这一切都是与控制论的观点完全一致的. 我们的理论或许也能说明，何以在有的场合应该联合使用休克疗法与精神疗法，对于神经系统的恶性的反响联合使用物理疗法与药物疗法，再对长期记忆的损坏用心理疗法，使休克疗法打断了的恶性循环重新回归自然.

我们已经讲到神经系统的传输问题. 许多著作都已注意到各种生物体的大小都有一定限度，超过了，它就不能发挥功能. 例如昆虫的大小决定于由通气孔把空气用直接扩散法送到呼吸器官的管道的长度，要求这种方法能起作用；陆上动物不能大得使自己的腿或着地的部分被自己的重量压垮，如此等等. 在工程结构中也能看到类似的情况. 摩天楼的大小受这样一件事的限制，当它超过一定高度时，高层用的电梯的空间就会占用下层截面过多. 如果跨度超过一个限度，最好的悬索桥也会因自重而坍塌. 与此相似，一个电话局的大小也是受到限制的.

在电话系统中，一个重要的限制因素是用户无法叫通电话的次数所占的比例. 如有 90% 的机会接通电话，对于一个企业能合理方便地进行经营，是够好的了. 75% 的成功率会使人烦恼，但是还能使一个企业马马虎虎办得下去；如果有一半电话打不通，用户就会要求把电话拆走. 但

是这只是整体的数字. 如果一个电话要经过几段转接,每一段失败的概率相等而互相独立. 要想在最终有高的成功概率,则每一段的成功概率必须高于最终的概率. 这样,在经过五段后还有75%的接通机会,则每一段成功的机会必须在95%左右. 段数越多,而每一次单独的接线失败率超过了一个临界水平,则这种电话服务就很快地变得极差,而如离这个临界的失败水平还颇差一点,电话服务就会极好. 这样,分成好多段,且设计得具有一定失败水平的电话转接服务,在传输信息的数量还未到临界点边缘以前,不会有任何失败的迹象,但到了这一点就会垮台,出现灾难性的信息堵塞.

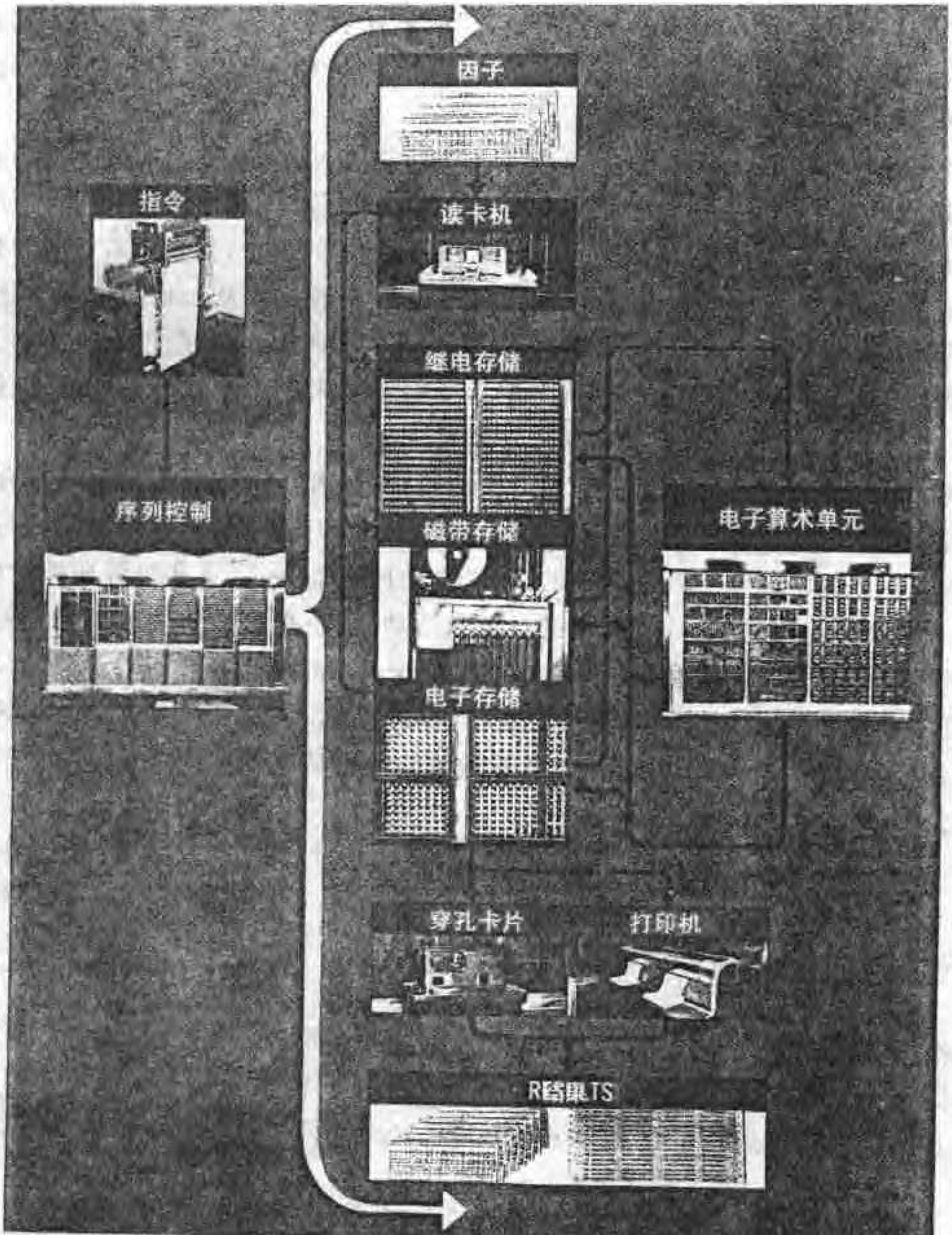
所以,在所有动物中,人具有发展得最好的神经系统,这系统所包含的有效运作的神经元链条可能最长,很可能人是在很接近于过度负荷的状态下有效地完成复杂类型的行为的. 一旦超负荷,他就会在严重的灾难性的状况下崩溃. 这种超负荷可能以几种不同方式发生:或者是需要传输的信息量过多,或者是传递的信道被物理地减少了,或者是不良的输送系统占用了过多的信道,这种不良的输送系统例如可以是过多的流动记忆积累到病态忧虑的程度. 在所有这些情况下,一旦达到某一点,当正常的传输分配不到足够的空间时——可能很突然地——就会有某种形式的精神错乱,以至疯狂.

这首先会影响涉及的神经元链条最长的机能和动作. 有相当多的各种证据表明,这恰好就是按我们通常的评价标准被认为是最高级的过程.

如果把人脑与低级哺乳动物的脑作比较,就会发现人脑褶皱得更多. 灰质的相对厚度很相近,但是分布在复杂得多的脑回和脑沟系统中. 其后果是使灰质的量增加而白质的量减少. 在一个脑回里,白质的减少主要是由于纤维的长度减少而不是数目减少,因为在一个折迭的相对着的两面之间,比之在同样面积的表面光滑的曲面上,距离要小. 另一方面,在不同折迭的联接线上,由于脑的折迭,必须经过的距离就增加了.

所以,人脑在使用近距离联接线的事情上似乎比较有效,而在使用远距离干线的事情况下就不那么有效了. 这表明,在发生信息堵塞时,涉及到脑的几个相距较远的区域的过程,会先受其害. 就是说,凡一过程涉及几个中枢,涉及许多不同运动过程,以及相当多个互相连接的区域,这个过程在发生精神错乱时就最不稳定. 这些过程正是我们通常分类为较高级的过程,这样就证实了我们的理论,而且经验也表明确是如此,在精神错乱时,高级过程最先恶化.

使用左手或右手以及脑半球优势的现象也给出一些有趣的思考. 众所周知,惯用右肢是与惯用左脑相关的,左肢则与右脑相关. 占优势的脑半球在高级大脑功能上占更多的份额. 对于成人,不占优势的脑半球受到广泛损伤的后果,比之优势脑半球受到类似损伤的后果要轻一些. 巴斯德(Louis Pasteur)曾患右侧脑溢血,使他有了中度的半身不遂. 他死后,检查他的脑,发现其右



IBM 所造的选择性序列电子计算机的框图，给出了另一个控制论的比较．机器的物理构造与脑并不相似．构造加上程序以及贮存的信息才与脑相似．这机器用电子线路和继电器线路作临时存储，而用穿孔卡片作永久存储．

侧损害是如此严重，所以人们说在他的脑溢血后“他只有半个脑子”. 然而，他的一些最好的工作却是在脑伤后完成的. 一个惯用右肢的人，如果左脑受到这样的损害，几乎必然是致命的；至少会使患者成为如同动物一样.

人在出生时的半年间，若其优势半脑球受到广泛损害，就会迫使通常为次级的脑半球起优势作用，所以比之长大以后再受到损害要更接近于正常人. 这与婴儿在初生的几周间其神经系统的巨大可塑性是相符合的. 若没有严重的损害，对很年幼的孩子，使用左右肢的习惯也可能有大的可塑性. 然而，在离入学还很远的年纪，他惯用某一侧肢体以及大脑的优势即已终生确定. 许多人确实通过教育的方法，改变了他们的孩子惯用某一侧肢体，但是当然改变不了脑半球优势的生理基础. 这些硬性改变了脑半球优势的孩子时常后来口吃，在语言和读写上还会出现其他缺陷.

我们现在看到了这种现象的至少一种可能的解释. 随着对于不惯用的手的教育，对于次级脑半球处理有技巧的活动如写字的那一部分也有部分的教育. 因为这些动作的运行与阅读，语言以及其他与优势脑半球密不可分的活动，有最密切的可能联系，这些过程所涉及的神经元链条，必然从一个半球通向另一半球，而在进行复杂活动时，还必须一而再地来来去去. 但是如人脑那样大的两个脑半球之间的直接的联结线数量极少，因而用处很小. 所以，两脑半球之间的传输必然是迂回地通过脑干连接. 对于这种通道我们几乎一无所知，但它们必然是很长的，只是勉强可用，且易受阻塞. 其结果是，与语言和书写相关的过程易遭到信息堵塞，而口吃的发生也就再自然不过了.

人脑似乎太大了，所以难以有效地用上所有存在的种种功能. 对于猫，优势脑半球损害的后果，比之人相对地较少. 无论如何，两个脑半球功能的划分，对于猫要更均匀一些. 对于人，脑的大小和复杂性带来的好处，部分地被这一事实抵消了：这一器官在同一时刻能有效地使用的部分也较小.

这样来思索一下是很有趣的：我们可能正面对着自然界的一个限制，器官的高度分工会减低效能的水平，而最终可以导致物种的灭绝. 人类的脑子可能沿着这条破坏性专门分工的道路已经走得这样远，正如最后一对 titanothere(一种已经灭绝只有化石的哺乳动物)的大鼻角一样.

49.

看作机器的人

约翰·G·肯麦尼(John G. Kemeny),1955 年 4 月号

人比机器更强吗？近年来常辩论这个问题,可是激情多于精确性.比之绝大多数的论争,这一次更加陷于定义的泥淖.什么是机器？什么叫"更强"？如果机器的定义足够广泛,什么东西都是机器;如果我们对"更强"的理解就是:"我们是人"就是更强,那么机器显然不如我们强.

本文中我们将把问题放在一个比较局限的范围里.我们要问:现在或者将来,机器在哪些事情上能做得和人一样好,甚至更好？我们不打算考虑机器能不能写十四行诗,会不会谈恋爱.我们也不会在一件明显的事实上浪费时间,就筋肉而言,机器远胜于人.我们要把人作为一个思维机器来讨论.不久以前,数学家,计算机的设计者,冯·诺依曼(John von Neumann)在普林斯顿大学作了一系列讲演,详细地比较了人脑和机械脑.下文很大部分是基于这个讨论.

人们常向我们提出种种乌托邦:所有繁重的工作都由机器来作,我们只需按一下按钮.这听来像天堂里的懒梦,但事实上人比这还懒.一向他提出这种乌托邦他马上就要问:"我不能造个机器代我按吗?"其实早在 18 世纪,他就开始造这种机器了.蒸汽机上的旋球调速器以及热电偶都是初等的思维机器.它们能控制钢铁筋肉的机器,而自己所耗的能量却小得可以不计,维纳(Norbert Wiener)曾把它们与人的神经系统来作比较.

想一下门的演进.它在最初必是滚来挡住洞穴入口的石头.它提供了极佳的保护,但又必然使得进出洞穴的行动颇为困难.慢慢地,人找到了更好的防卫自己的手段,他就把门做成更轻,更容易开关的门,时至今日开门名副其实地成了儿童游戏.但甚至这还不能满足我们.宾夕法尼亚铁路公司在它的纽约客站上安装了电眼,这可使成百万的铁路旅客高兴了.人只要遮断了联结两个光电"眼睛"的不可见的讯号,小小的思维机器马上就把门打开.这个控制装置只需要少

得可以不计的能量，却高度有效，比任何看门者都快得多.

电话局的中央控制台又是一个思维机器，特别是如果安装了拨号系统是如此. 信息被迅速有效地送到成百个终端，而只消耗很少的电力. 这只是那种思维机器之一，没有那种思维机器，现代生活大概就维持不下去了.

最后还有一种机器，凡是提到思维机器就会想到它：高速计算机. 电眼和电话交换机只能解除我们的体力劳动，而计算机可以取代好几个人的脑.

缓慢的脑

就节约能量而言，人脑仍远远领先于它的机械对手. 由几十亿个细胞构成的整个人脑的运行功率低于 100 瓦. 其至用当前最有效的脑细胞代替物　晶体管来做的机器，若它所含的细胞数与脑细胞数目相同，则需功率 1 亿瓦. 所以人脑至少领先百万倍. 但是冯・诺依曼曾经计算过，从理论上说，机械脑细胞在使用能量上可以比现在的实在的脑细胞效率高一百亿倍. 所以，没有任何技术上的理由说，机械脑就不能比它的人脑对手成为更有效率的耗能者. 说到底，就是最近才发明的晶体管，它只需要百分之一瓦，就已把机器的效率提高了一百倍；从这一点来看，一百万这个因子没有什么可怕.

虽然在耗能上，我们人还领先，在速度方面则远远落后. 使用神经每秒钟不能超过 100 次，而开关真空管每秒一百万次也很容易. 它还可以工作得更快，但在目前这对于加速机械脑没有什么贡献. 每个机器的速度不能快于它的最慢的部件，所以必须要估计机器的不同的部件.

计算机的设计者面临着四个不同的问题：实际的计算，"逻辑控制"，存储以及数据的输入和答案的输出. 计算的速度，本是机械计算机如台式计算机的瓶颈，已可由真空管来对付. 逻辑控制，即在计算的每一步告诉机器下一步做什么，这本是第二个瓶颈. 早期的 IBM 穿孔卡片机用中央控制板上的一种线路来指挥计算的顺序，这样把这个任务从人手中接过去了. 如果机器只需作一个类型的计算，这本来就完全没有问题了. 但如果顺序要经常变，则用控制板上的布线就太麻烦了. 机器必须有内部的逻辑控制才能提高速度. 这个问题上最大的一步，大概是由普林斯顿高等研究所制造的 MANIAC 跨出去的. 改变这个机器的指令可以像它计算一样快，所以它的运行可以快到真空管容许的程度.

留下的问题是加快存储和信息的输入和输出. 这两个问题是密切相关的. 存储越大，向机器输入信息的次数就可以越少，但是机器在接受指令之间需作大量计算，这个事实本身就会把它的存储塞满而使它变慢. 这是因为舍人误差的积累使得必须把所有数字都计算到许多位. 机械

在每一步计算都会舍入最后一位数；连续计算后，数字就越来越不精确. 计算再继续下去，倒数第二位就会受影响，如此等等. 可以证明，在 100 次计算后，最后一位数已经没有价值；在 10 000 次计算后，没有价值的是最后两位数；在 1 000 000 次计算后是最后三位数. 在新型大计算机中，答案动辄就是需要四位有效数字. 所以机器为了保持精确性就要对比实际有效数字更多的位数进行演算；在整个计算中对每个数都算到 8 至 12 位数是很常见的. 如果机器用二进制而不是十进制计算，情况还要更糟些，因为用二进制表示数，其位数比十进制要多三倍.

MANIAC 把数表为 40 位二进制数. 因为要对这么多位的数作运算，甚至 MANIAC 著名的存储也只能保存 1 000 个数. MANIAC 用磁带机和磁鼓作为“外存”，其中可以储存更多信息，但从磁带或磁鼓读出信息是比电子计算慢得多的运算.

尽管还受到目前的限制，机器就速度言比人脑至少快 10 000 倍，通常大大高于 10 000 倍. 在由天文学或弹道学提出的问题上，它们给人印象最深. 让 MANIAC 算出行星一百万年后的位置，简直是儿童游戏.

然而我们仍然感到有许多事我们能做而机器不能做. 人脑细胞数超过 100 亿，而机器只有几千个零件. 甚至用晶体管，尽管已能超越价格和机器大小的问题，制造上的困难使机器很难有超过一百万个的零件. 所以我们可以有把握地说，在相当一段未来时间里，人脑比最复杂的机器还要复杂一万倍. 众所周知，零件个数增加 10 倍，就有质的差别. 举例来说，如果我们用一个元件就能完成加法和乘法，把不多几件这样的元件用逻辑控制机制组合起来，就能作减法、除法、乘方、插值和许多别的与加法乘法定性地不同的运算.

复杂的记忆

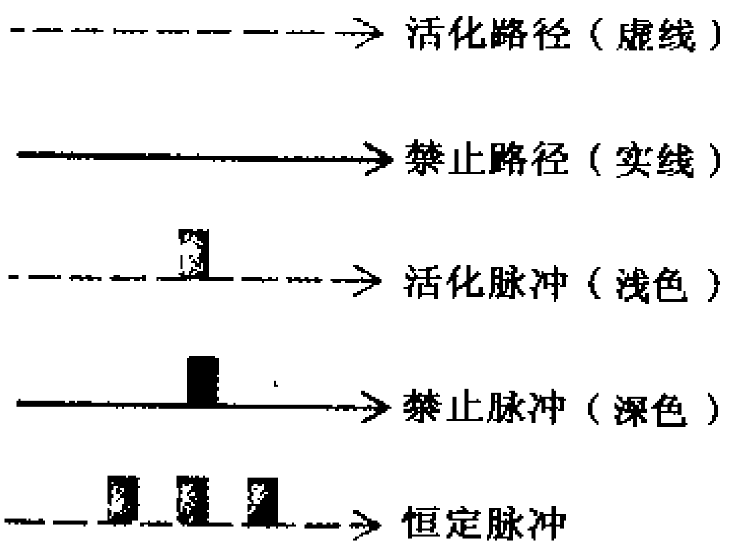
人的更高度的复杂性表现在他的引人注意的记忆. MANIAC 的存储和人的记忆相比又如何？为简单计，我们用“比特”(即一位二进制数)来度量存储的信息. 一个真空管可以存储一位二进制数(接通时为 1，断开时为 0). 乘法表用真空管的语言表述，要 1 500 比特. MANIAC 的存储有 40 000 比特，不是 40 000 个分开的真空管，而是 40 个特殊的图像管上的亮点(亮或暗)，每个图像管可存储 1 000 个亮点. 人的记忆有多大则估计各异. 但保守地说，脑至少可以记忆 1 000 个复杂如乘法表那样的东西(一百五十万比特)，一个合理的猜测是其容量接近 1 亿比特——如果每 20 秒提取 1 比特，则要人的一生才能取完. 所以我们的记忆超过 MANIAC 的存储至少 1 000 倍.

差别只在于复杂性吗？否，事实在于机器还没有模仿人脑贮存与恢复信息的方法. 举例来

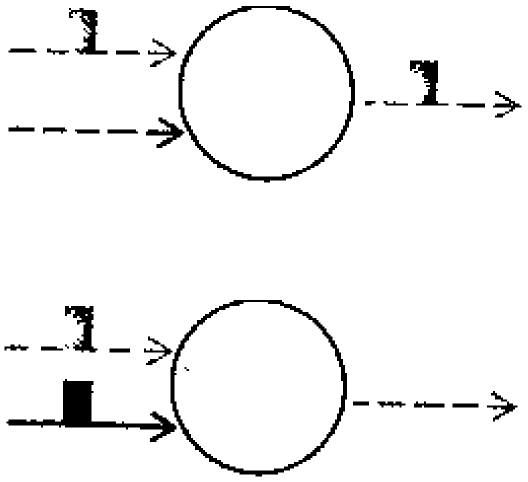
说，如果我们试图把 MANIAC 的存储增加一个相当的数量，很快就会发现几乎无法提取信息. 我们会需要一个复杂的编码系统使机器能找到某一个信息项目，编码又要进一步占用存储，并且使逻辑控制也更复杂. 只有在对人脑提取信息的惊人能力有更好的了解以后，才能除了有限的存储以外再多给机器一点什么.

逻辑机

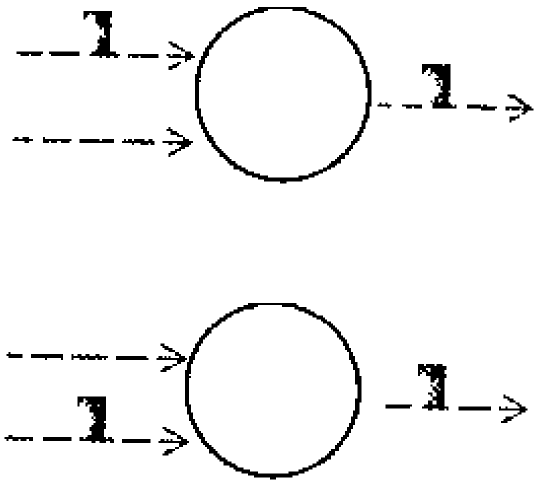
我们现在来考虑一个不可避免的问题：机器会“思想”吗？我们从 MIT 的匹兹（Walter Pitts）和麦卡洛（Warren S McCulloch）提出的神经系统的简单模型开始. 它的基本单元是神经元——即能够发出能量脉冲的细胞. 一个细胞的激活可以活化或禁止下一个细胞. 假设神经元的工作是循环的. 这符合我们现有的知识：一个神经元激活以后必有一段时间不活化. 为了简化模型，假设各个神经元的循环是同步的，即假设在某一时期中活化的神经元都同时激活. 想要一个神经元在某一循环中激活，它必须满足两个条件：即在前一循环中(1)被活化.(2)不被禁止. 例如设一个神经元连接着另外两个神经元，一个是活化的，另一个是禁止的，如果在一个循环中前一个激活了而后一个没有，则在下一循环中此神经元会被激活. 否则它在这一循环中就不会活化.



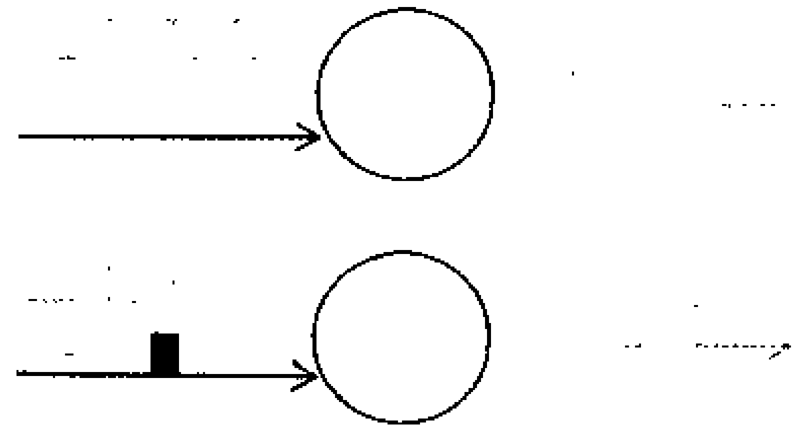
脑机器的简单线路将在这一串图解中给出. 活化脉冲和禁止脉冲是相同的，但各有不同的路径.



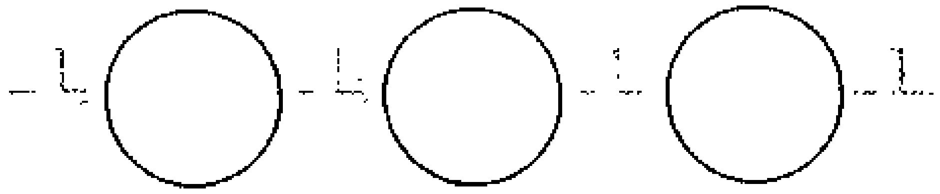
细胞（圆圈）在活化后将被激活（上图）. 但若同时被禁止（下图），则不会激活.



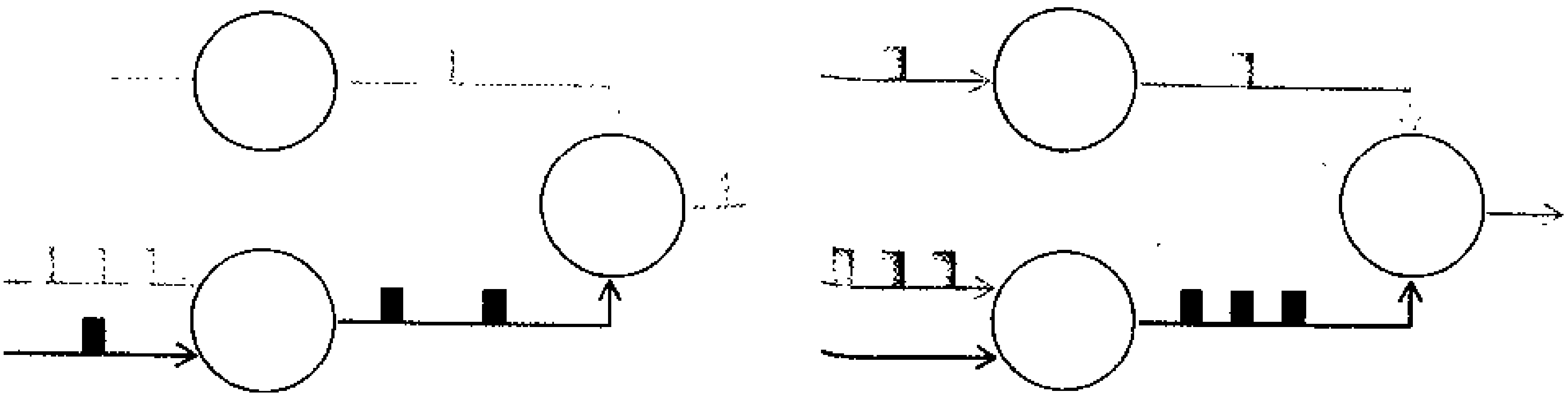
“或”线路需要两个路径. 若一脉冲从一个路径到达（上图），“或”由另一路径到达，此细脉均会激活.



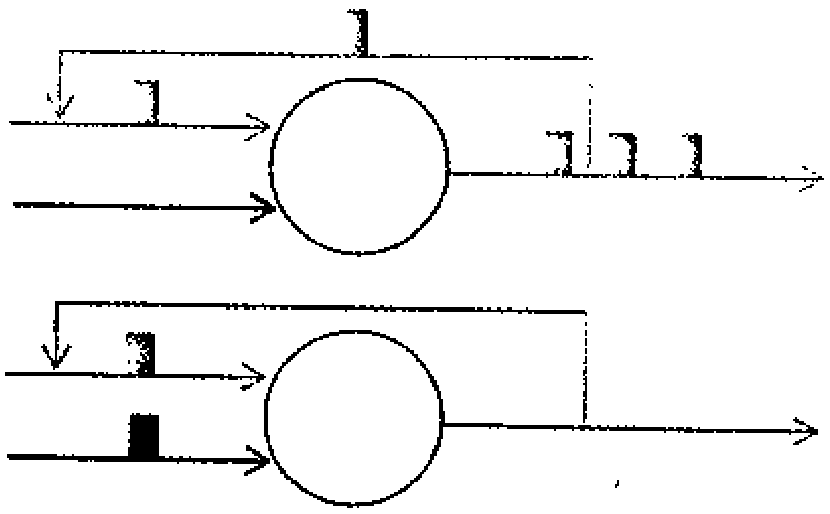
"非"线路把两个恒定的活化脉冲结合起来.这样,这个细胞总是激活的(上).当它被短暂地禁止(下图),就会发出"非"的信号.



延迟线路是基于这样一个事实,即基本的细胞在一个"循环"中接受到一个脉冲,则在下一个循环中激活.如图安排的三个基本的细胞中,脉冲被延迟三个循环.



"与"线路要用三个细胞.第一个(上左)只有活化脉冲.第二个(下左)恒有一个活化输入和一个禁止输入.第三个(右)是通常的基本细胞.图上第一个细胞接受的脉冲并不使第三个细胞激活.第三个细胞只有当第一个细胞"与"第二个细胞在同一循环中激活,才会激活(右方的图).



记忆线路把一个细胞的输出再馈入其输入中.这样,若一细胞受到活化,它就总是激活(上图).这样它"记得"自己被活化.若它在后来任一时刻被禁止,它就停止活化.

从这个基本的模式可以建立最复杂的逻辑机. 我们可以得出一个组合，当与之相联的神经元激活时它就不激活（表示“非”），或者做出一个组合，当与之相联的两个神经元至少有一个激活时它就激活（表示“或”），还有一种组合是当两个相联神经元都激活时才激活（表示“与”）. 把它们组合起来就能模拟脑的许多逻辑运算. 639 至 640 页上图示的简单安排（计数器线路）就能计数到 4，而且容易看到怎样推广这种技术.

我们也能造出很原始的记忆，即是一个系统，它“记得”自己曾经活化过，直到给它“忘记”的指令后，它才会忘记. 但若要它记得任何复杂的东西，所需要的神经元就多得不可想像——这个事实又一次表明人的记忆和机器的存储工作原理是不相同的.

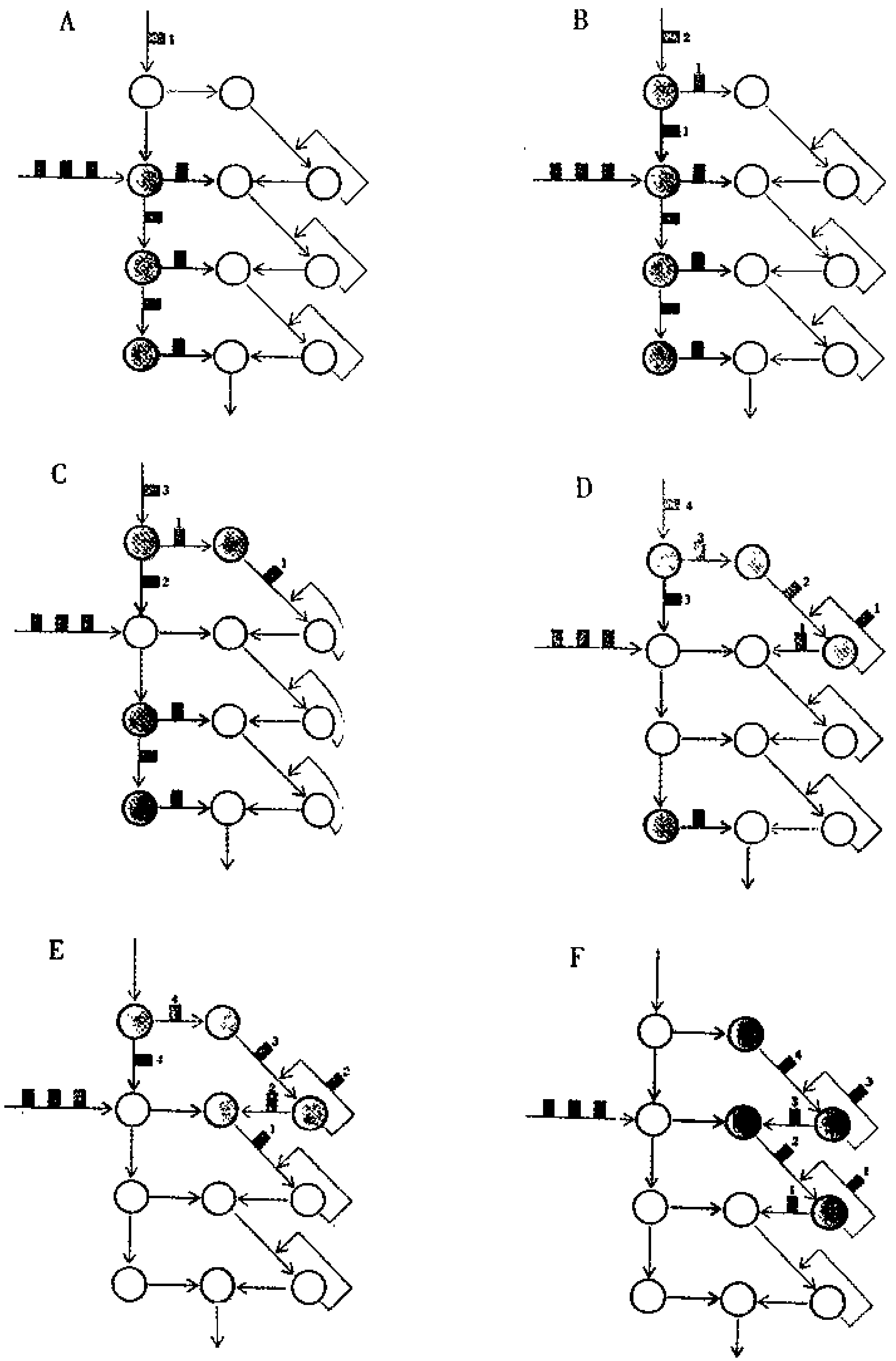
图灵机

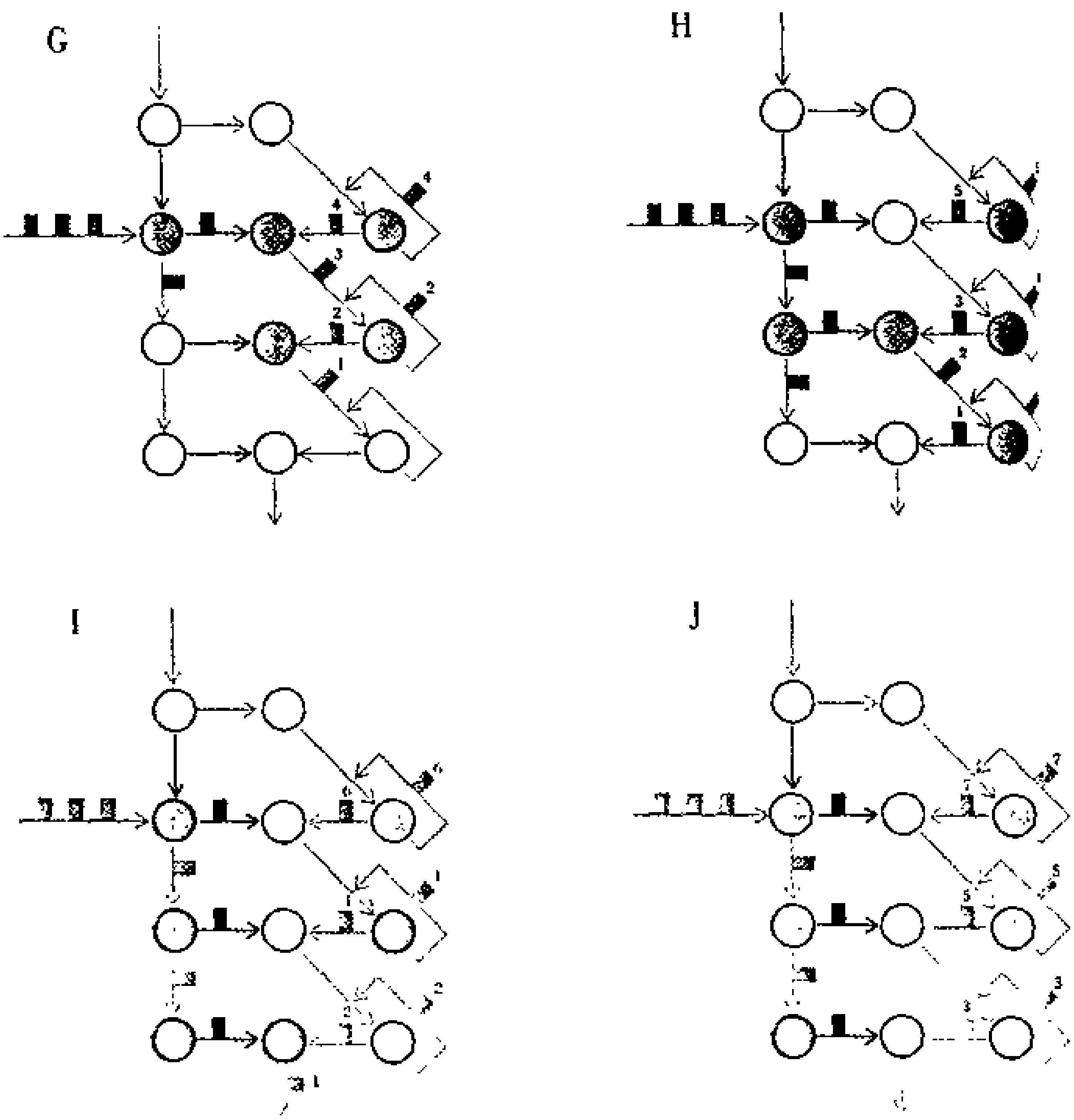
如果就此停步，我们可能断言，在存储和复杂性上的实际限制会永远地限制机器的巧妙与灵活. 但是我们还没有把全部可能性探究到底. 已故的英国图灵（A. M. Turing）用光辉的分析证明了，把极少几种简单运算组合起来并进行足够多次，就能完成惊人复杂的业绩. 图灵的机器可能笨拙而缓慢，但它对于机器能做些什么却给出了最清楚的图景.

图灵机可以想像为一个名副其实地用铅笔和纸工作的机械计算器. 它所用的纸是分成小方格的长条，而它依次在各个方格中工作. 当它遇到一个方格时，它可以做以下六件事之一：(1)写上一个 X；(2)写上一个 1；(3)如果方格中已有这样的记号就把它擦掉；(4)把纸带左移一格；(5)把纸带右移一格；(6)停机.

图灵机本质上是一个数字书写器. 它把数写成可能的最简单的形状，即写成一连串单位. 这甚至比二进制还简单. 例如 35 这个数在二进制中写成 100011，而在图灵机上则在 35 个相连的方格中写上 1. X 只是一个标点，表示一个数从哪里开始，到哪里为止.

这个机器有以下几个部分：一个书写或涂抹装置，一个扫描器，一个移动纸带用的电动机，一个号码盘和指针，还有一个作用与神经元类似的元件. 例如真空管做的逻辑控制器. 逻辑控制器按事先准备好的指令表运作，确定机器在确定的状态下应做些什么. 状态则包含两个元素：用扫描器来“看”，面前的方格里写的是什么，还有号码盘上的指针指的是什么. 例如，指令表可能说：若方格里是 X 而指针指着号码盘上的 1，则机器将 X 抹去，并把指针移向 2. 机器一步步运行时，逻辑控制器就向它发出这样的指令，每一步的指令既依靠号码盘上的位置还依靠扫描器在它面前的方格中看见的是什么. 注意，号码盘的作用就是一个原始的“记忆”，因为它在每一步的位置都是上一步扫描器在方程中看见的东西和指针在上一步的位置的后果. 所以它把机器的经

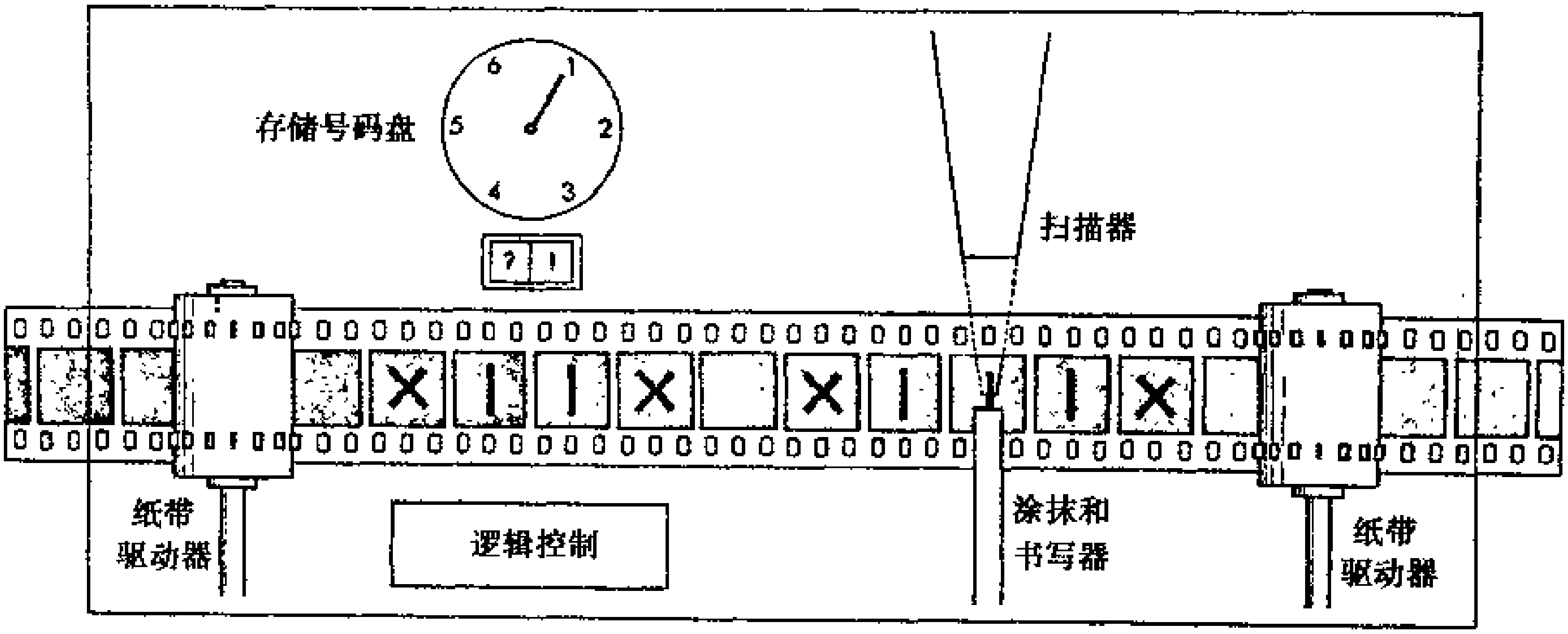

A
B
C
D
E
F



计数器线路可以“数”到四然后激活.关于这一系列图表的规定和636页上的图表相同,但有两个重要的例外.其一是,在前几页的图上都是画的在两个或更多的循环中的线路,而在本页中每一个线路都画的是一个循环.第二个例外则是,当一个细胞激活时,它就发光.每一个线路的输入是上方的活化通道.其输出则是下方的活化通道.此外,有一个细胞有固定不变的活化输入(左方).右方的三个细胞是记忆细胞(见637页最下方的图).这三个记忆细胞可以把邻接的左方三个细胞活化.而这三个细胞又可被其更左方的三个细胞禁止.在前四个循环(*A*,*B*,*C*,*D*)中各有四个脉冲输入到线路中来.这四个脉冲在相继的循环中的位置各用小的数字标出.线路在第九个循环(*I*)中,已“数”下了四个脉冲,就激活一次.在第十个循环中(*J*)中,线路回到了其原有的状态,但是脉冲仍然在记忆细胞中流动.实际的计数器线路中还要安装一个装置把这些记忆清除掉.

验从一步传到下一步.

这样,图灵机的组成就是:一条在方格中写了 X 或者 1 的纸带,一个有若干个位置的号码盘存储,一个逻辑控制器,它根据自己在方格中所见以及存储所说,来命令机器做什么事.下面的框图就是一个很简单的图灵机,号码盘上只有 6 个位置.因为扫描器在方格中看到的只能是三种东西之一:空白,X 或者 1,所以机器只有 18 种状态,逻辑控制器对这 18 种状态各准备了一条指令(见图右的表).这个机器是设计来做一件简单的事的:它可以把任意两个数相加.



图灵机如图是设计来把 2 和 3 相加的.这两个数记在纸带上;每一个数码各用一个 1 来表示. *X* 是一个信号,表示一个数的起始和结束.右方的表就是左图中的逻辑控制框.表中的横行表示存储号码盘上的位置(1,2,3,4,5 至 6),表中的竖行则表示纸带上的记号(空白,× 或 1).横竖行相交处则是对机器的指令. *E* 表示抹去带上的符号; × 表示在带上写上 ×; *D* 表示在带上写上数码 1; *R*,把带向右移一格; *L*,左移一格; *S*,停机; ? 发生错误; ! 动作完成; 1,2,3,4,5 或 6 表示把号码盘转到该位置.例如表的左上角 *D*6 就表示当号码盘位置于 1 而纸带上出现空格时的命令;这命令 *D*6 就是在该空格中写上 1 然后将号码盘转到位置 6.现在让机器从图上所显示的初始位置开始运行.第一步号码盘的位置是 1,而纸带上有 1.命令是 *R*1;右移一格号码盘仍停在 1 处.第二步的情况和作出的反应是一样的.第三步号码盘仍在 1,但带上出现了 × .命令为 *E*2:抹掉 × 并将号码盘转到 2.这样,机器将在第 36 步得出答案 5.第 37 步机器停机并给出一个信号! 表示计算完成.读者若有怀疑而且愿意下一点工夫,请自己追踪一下全过程.

	□	☒	1
1	D6	E2	R1
2	R2	E3	?2
3	R3	E4	E5
4	L4	?4	R6
5	L5	?5	R1
6	X6	!6	R3

设要把 2 和 3 相加. 这两个数各写成一串 1,尾上加一个 X. 设开始时号码盘的位置是 1,并从数 3 的第二位数开始(见上页的图). 表中的指令说在这一状态下应"将带向右移 1 格,号码盘位置仍是 1". 这个运算移到了左边一个方格,其中仍是一个 1. 指令仍然是"将带向右移 1 格、号码盘位置仍是"1". 现在扫描器看见了一个 X. 当指针仍在 1 时,指令是"抹去(X),号码盘转到 2". 机器现在见到一个空格,指令变成了:"将带向右移 1 格,号码盘位置仍在 2."这样,机器最终写出两个 1,其右方则是 3,最后的答案是 5——一串 5 个 1 后加一个 X. 运算结束后,用一个惊叹号表示停机. 建议读者用另外两个数按上面的方法试加一次.

这样作加法当然很繁冗. 但是把机器扩展起来使它能解决下面的问题:"将所看到的数乘以 2,若其左方第五个数小于 150,则把所得的数开立方",则给人更深刻的印象了. 增加号码盘上的位置的数目,并扩大指令表,这个机器就会得到实现最复杂任务的能力,虽然每一步运算都极简单. 图灵机就像人的神经系统,我们认为神经系统有一个位置极多的号码盘,并能把许多简单的动作组合起来,完成人所能做的为数极其巨大的工作.

图灵给他的机器以无限的存储. 当然,号码盘上的位置为数有限,但他允许机器有一条在两方都无限长的带子. 实际上带子不必是无限长的,只要足够长能完成工作就行了. 我们可以在紧急状态下允许再加长带子,如果有必要的话. 人的记忆也只是在这个意义下是无限的:我们总可以用更多的纸来作记录.

万能机

图灵关于万能机的思想更令我们吃惊,还不说许可有无限长的纸带已经令人吃惊了. 我们不但可以为每一种工作制造一个机器,还可以设计一个十分灵活的计算机,能够完成所有的工作! 我们必须想法弄懂怎样做到这一点,因为它是我们整个问题的关键.

万能机的秘密在于它能模仿. 设我们为一个困难任务造出了一个高度复杂的机器. 若我们对万能机描述了这个工作以及这个特殊的机器,它就会想怎样来完成这个任务. 它的办法很简单,它从对我们的机器的了解推算出我们的机器在每一步会怎样做. 当然这会使万能机大为变慢. 在任意两步之间,它都要作很长的论证来分析我们的机器会怎么做. 但是我们只关心它能否成功,而不问速度. 没有疑问的是:任何逻辑机能做的任何一件事,单是一个万能机都能够做.

关键问题是:怎样用一种语言描述一个复杂的机器使相当简单的机器也能懂? 答案是设计一种简单的,能描述任何机器的编码(至少是描述任何图灵机),你要这样设计万能机使它能懂得这种编码. 要理解一个图灵机只需要了解它的指令表,所以只要对指令表有一种简单的编码

就行了. 我们来简述一种可能的方法:把每一个可以想像到的指令表都用一个整数来表示. 当然,这种表为数无穷,但是整数也为数无穷——整数正是因此才在数学中有这么多用途.

一个指令表必有 P 个横行,每行有三条命令,相应于方格中是空白,X 还是 1. 第一步是把表中的字母除掉(再看一下 641 页的下右图中的表). 这很简单,只要把 E,X,D,L,R 和 S 分别用 1 到 6 表示即可. 于是我们举例的那部机器的指令表第一行的三个命令成了 3－6,1－2,5－1. 第二步:除去问号和惊叹号. 例如分别用 1 和 2 表示(因为它们都只与 S 一同出现,而 S 又写成 6,所以不怕误会与存储位置 1 和 2 相混). 所以表中的第二行成为 5－2,1－3,6－1. 第三步,把每一行用一个整数来表示. 有一个著名的简单方法做到这一点,即把这些数都看作素数幂的指数,再得出一个乘积即可完全表示这列数. 最后一步,把整个指令表用同样方法作出的整数来表示. 对我们这个表的编码就是 $2^{2991509440920}$ * 再乘以 3 的相应于第二行的整数幂,一直到六行乘完. 这是一个极大的数,但是它确实唯一地确定了我们的指令表. 于是设计一个能把这个大数解码而恢复原来指令表的机器,就只有一项一直往下做的机械的工作. 得到了指令表以后,万能机就知道它所模仿的机器在任一情况下应该做什么了.

万能机是极其像人的. 它开始时只有很有限的能力,然后通过模拟和从外界获取信息而学得越来越多. 我们觉得人脑的潜力是不可穷尽的. 但是若我们与外界隔绝还会是这样吗? 人若没有了五官就可比拟为一个只有一个固定带子的图灵机,但是一个正常的人就是一个万能机. 只要有足够时间,他什么都能学会做.

但是有的读者会觉得,我们屈服于图灵的有说服力的论据也太快了. 毕竟还需要一个人加入进来给万能机一个编码. 既然如此,何不一来就把问题的答案给机器呢? 图灵可以这样回答:万能机不需要人来为指令表编码;可以把万能机设计得自己会编码,正如它会自己解码一样.

我们这样就认可了这机器有万能的地位. 尽管它的逻辑控制只有少少几千条项目,似乎它基本上能完成一切我们会做的解题工作. 当然,一件我们一小时就能做完的事,它可能要做上十亿年,它能够向之学习的"外部世界"只能限于图灵机,比我们的外部世界要小得多. 但是难道不可能这些都只是程度之差吗? 我们作为有理性的存在物,真正在基本上有异于万能图灵吗?

对此,通常的答案是:不论机器能做什么,总得有人来造机器. 谁敢说,机器能复制自己而且造出别的机器来呢?

冯・诺依曼敢. 事实上他已经为这种机器绘制了蓝图.

---

* 译注:取相继的前六个素数 2,3,5,7,11,13,分别以 3,6,1,2,5,1 为指数相乘以后即得 $2^3 3^6 5^1 7^2 11^5 13 = 2\ 991\ 509\ 440\ 920$. 下面都是这个方法.

繁殖机

复制是什么意思？如果我们说繁殖就是从一无所有之中创造出与原来对象一模一样的东西，机器当然不能繁殖，但是人也做不到这一点. 如果繁殖不能违反能量守恒原理，就必须要有建造的材料. 生命的繁殖的特征就在于，生物能从它四周无生命的物质中创造出一个新生命.

如果我们都同意说机器是没有生命的，而如果我们又坚持创造生命是繁殖的本质特征，那我们就是在狡辩：机器必不能繁殖. 因此我们必须重述这个问题，使得机器的繁殖不会是逻辑上不可能的事. 必须要省去"生命"这个字眼. 我们要问，机器能不能用环境中本来就有的简单的零件，创造出和它一样的新机体.

人以食物为原料，这是相当高度组织的化学品. 所以我们甚至不能说从完全无序中创造出次序，而宁可说是变组织较简单的物质为更复杂的物质. 按照这样，我们必须假设周遭是许多块比机器任一零件都简单的小块物质. 假想的零件清单中包括一卷卷的纸带，铅笔，橡皮，真空管，号码盘，光电池，电动机，轴，电线，电池等等. 我们必须使机器有能力把这些东西变成为零件，再把零件组成一个新机器.

冯·诺依曼用一些合理的假设简化了问题. 他首先看到一定要让机器能走动这是非本质的. 他宁可要有一种机制送出一些脉冲，用遥控把周围的东西组织起来. 其次，他假设空间划分为小的立方体，而机器的每一个零件和每一小块原料都各占一个立方体. 第三，他假设这个过程不仅在空间上而且在时间上都是量子化的；即是说我们有一些循环，而一切动作都发生在一个循环之内. 甚至不需要有三维空间；二维的方格可以和三维的立方体一样起作用.

我们的空间是很大的（原则上是无限大的）一张，而分成小正方形. 机器占据了由很多小正方形组成的连通的区域，我们称之为一个方块. * 因为每一个正方形代表机器的一个零件，所以机器占据的正方形的个数就是它的复杂性的一种度量. 机器周围是它想要组织起来的无生气的单元. 机器想要做到这一点就必须是一个脑和一个筋肉的机器的组合，因为它不仅要把物质组织起来，还要变换它们. 据此，冯·诺依曼的机器要有三种零件. 它要有类似于我们讨论过的神经系统中的那种神经元. 这些神经元提供逻辑控制. 其次它有传递细胞，把信息从控制中心送出. 这些细胞要有一个人口，通过人口接受脉冲，还要有一个出口，把脉冲送到下一个循环. 一串适当联接的传递细胞构成一个信道以传送信息. 此外，机器要肌肉. 这种细胞能改变周围的单

---

* 译注：这句话是译者所加的. 否则下面讲到方块就不好懂了.

元，或者把它们从组织程度较低的单元变为更复杂的单元，或者打破它们. 它们带来的变化类似于在人体中由筋肉作用和化学作用引起的变化. 当然，它们主要的作用当然是把周围无生气的单元变成一个机器零件.

和在神经系统中一样，运作总是分步骤进行的；每个细胞现时的状态都是由上一个循环中它和它相邻的细胞的状态决定的. 神经元和传递细胞在受到适当的刺激时或者成为平静的，或者发出一个脉冲. 肌肉细胞接受神经元通过传递细胞送来的指令，它的反应或者是"杀掉"某些不需要的零件(即使之无生气)，或把环境中某些无生气的细胞变成一定种类的机器零件. 至此为止，机器的构造很像一个高级动物. 它的神经元形成中枢神经系统；传递细胞使它们与各器官连接；器官在接到指令后则完成特定的工作.

指令可能很长，所以必须在一定意义下是对外部的. 冯·诺依曼机器有一个"尾巴"，其中藏有它所要建造的机器的蓝图. 这条尾巴是很长的，装着已编码的指令. 机器，这个基本的方块，需完成两类功能：它服从来自尾巴的指令，并能复制尾巴. 假设尾巴中有关于基本方块的描述，并已编码. 然后这个方块就会按指令造一个和它一样的方块. 做好了以后，它就进一步复制自己的尾巴，并把它装到新方块上去. 这样它就复制了自己.

这机器的秘密就在于它并不打算复制自己. 冯·诺依曼设计了一种机器，它能按图样造出任意的机器来，所以也能造出和自己一样的机器. 然后它再复制那个大但是简单的，其中藏有指令的尾巴，并把它接到自己的后代上，这就很容易了. 此后，新机器就可以造出越来越多的机器，直到或者原料用尽，或者互相冲突为止——甚至这种冲突也还是模仿着设计它的人.

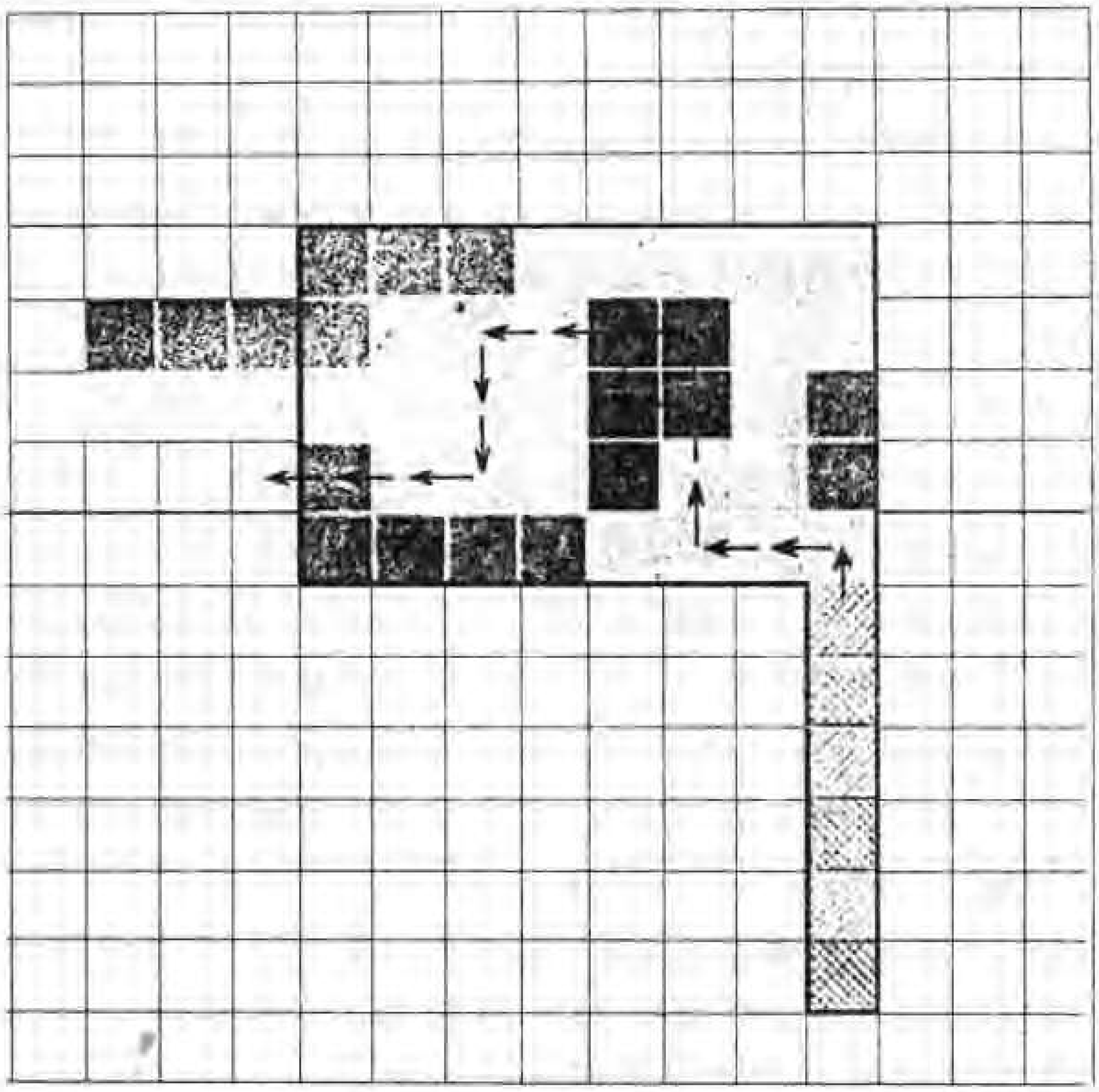
令人吃惊的是这种机器所需零件之少. 冯·诺依曼的蓝图中的基本的方块有 80×400 个小方格，再加一条长为 150 000 个小方格的尾巴. 基本的方块中有三种上面讲过的零件——神经元，传递细胞和肌肉细胞. 三类细胞的区别只在于其激发态和连接方式不同. 尾巴还更简单：它的细胞是"开"的或是"关"的，这样就有了编码. 这样我们就有近 20 万细胞，极大多数属于可能的最简单的那种，其中只有极小一部分能如逻辑控制神经元一样复杂. 不论怎样度量复杂性，它和人相比，不知简单到什么地步，然而这种机器能复制自己.

遗传的尾巴

把机器与人的机理的类比再推前一步，可以把尾巴与染色体作比较. 我们的机器总为新机器复制自己的尾巴，正如同母体内女儿的细胞复制了双亲的染色体一样. 值得注意的是染色体只占了身体极小一部分，但尾巴却比整个机器的基本方块更大. 这表明染色体对特质的编码惊

人的有效和紧凑. 但是我们要公正地指出,染色体的作用比尾巴小. 尾巴中有基本方块的完全的描述,而染色体的描述是不完全的;所以子女与父母只是相像而不是精确复本. 继续冯·诺依曼的开创性的工作,设计一个机器它能取一个不完全的描述,造出一个与自己相似到合理程度的机器,这是极为有趣的.

这种机器能不能经历一种进化过程? 可以设计这样一个尾巴,使得在每一个循环之中都发生几个随机变化(即把编码中的"开"变为"关","关"变为"开"). 这些就像是突变;如果机器还能生育后代,它也会把这些变化传递下去. 还可以进一步安排以限制原料的供应,于是机器将为生



冯·诺依曼的机器在理论上是能够复制自己的. 上面是它的概念上的单元的一个高度简化的图示. 最深色的方格是"脑"的"神经细胞". 最浅色的方格是"肌肉细胞". 次浅的是传递细胞,加上斜线的方格则是"尾巴",其上载有对机器的指令. 双斜线的方格中有信号"开",单斜线的则有信号"关". 空白方格则是环境单元,机器就在其中运作. 箭头表示指令是来自尾巴,"脑"则以这些指令为基础指示一个肌肉细胞作用于其环境. 机器向左方伸出了一个"感觉器".

存空间而竞争，直到彼此互相残杀.

当然，本文所讲的机器，就我所知，没有一个是真正造出来了的，但是它们都是可以制造的.我们已经系统地考虑了人能够做些什么，其中又有多少是机器可以仿照去做的.我们已经发现，人脑的优点在于它有更大的复杂性，人的记忆效率也更高.但是这是本质的区别呢，还是随技术的进步可以克服呢？本文打算说明，并没有决定性的证据可以证明在人和机器之间有根本的鸿沟.对于每一种人的活动，都能想像一种机器方面的对应活动.

我们自然还没有回答人是否比机器强这个问题.读者需要自己来回答这个问题.

作者介绍与参考文献

第一部分 数学的本性

1. 数学的创新

作者 哈尔莫斯(Paul R. Halmos),密歇根大学数学教授,生于布达佩斯,童年即移居芝加哥. 1934 年毕业于依利诺依大学,年 18. 第二年因考哲学硕士(M. A.)失败,被授予数学硕士(M. S.)学位,成了数学家. 后来他又在依利诺依得了数学的 Ph. D.;其后他在普林斯顿高等研究所任冯·诺依曼助教二年. 在 MIT 辐射实验室工作一年后,1946 年去芝加哥大学任教授,直到 1961 年回密歇根大学为止. 他得到的荣誉有古根汉奖学金(Guggenheim Fellowship)以及数学作品的 Chauvenet 奖.

参考文献

AN ESSAY ON THE PSYCHOLOGY OF INVENTION IN THE MATHEMATICAL FIELD. Jacques Hadamard. Princeton University Press, 1945.

WHAT IS MATHEMATICS? AN ELEMENTARY APPROACH TO IDEAS AND METHODS. Richard Courant and Herbert Robbins. Oxford University Press, 1941.

2. 数学的创造

作者 纽曼(James R. Newman)为庞加莱的论文"数学的创造"的编者,并写了引言,是《科学美国人》编辑部成员,后为其图书部编者,直至 1966 年去世为止. 他于 1929 年毕业于哥伦比亚大学法学院,后来对数学与科学有了爱好. 他执业于法律界,二战期间担任多项政府职务,战后为参议院原子能委员会顾问,并协助起草了原子能法案. 他于 1946 年和 1947 年得到古根汉奖学金. 他写的书包括"*Science and Sensibility*","*What is Science?*"以及"*World of Mathematics*".

3. 现代世界中的数学

作者 柯朗(Richard Courant),纽约大学数学荣誉教授. 柯朗于 1888 年生于波兰卢布林尼

茨(Lublinitz),受教于布累斯劳(Breslau)大学、苏黎世(Zurich)大学和哥庭根(Göttingen)大学,1910 年于最后一所大学获 Ph. D. 学位. 他任教于哥庭根大学和闵斯特(Münster)大学直至 1920 年,后任哥庭根大学数学教授和数学研究所所长. 1932 年他离开哥庭根并短期在加里福尼亚大学、普林斯顿大学和剑桥大学访问. 1934 年任纽约大学教授,并于 1936 年任该校数学系主任和数学科学研究所所长. 他担任这些职务共 25 年直到 1958 年退休为止. 他写了六本书,包括"*Methods of Mathematical Physics*"(与 D. Hilbert 合著)以及"*What is Mathematics?*"(与 H. Robbins 合著).

参考文献

ELEMENTARY MATHEMATICS FROM AN ADVANCED STANDPOINT. Felix Klein. The Macmillan Company, 1939.

THE ENJOYMENT OF MATHEMATICS: SELECTIONS FROM MATHEMATICS FOR THE AMATEUR. Hans Rademacher and Otto Toeplitz. Princeton University Press, 1957.

MATHEMATICS AND THE IMAGINATION. Edward Kasner and James R. Newman. Simon and Schuster, 1963.

MATHEMATICS IN WESTERN CULTURE. Morris Kline. Oxford University Press, 1953.

SCIENCE AND HYPOTHESIS. Henri Poincaré. Dover Publications, Inc., 1952.

SYMMETRY. Hermann Weyl. Princeton University Press, 1952.

第一部分　补充文献

Hardy, G. H. *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press, 1967.

Poincaré, Henri. *The Value of Science*. Dover Publications, 1958. [Reprint].

Poincaré, Henri. *Science and Method*. Dover Publications, 1952. [Reprint.]

Poincaré, Henri. *Last Thoughts*. Dover Publications, 1963. [Reprint.]

Polya, George. *Mathematical Discovery*, 2 vols. John Wiley and Sons, 1962—1965.

Polya, George. *Mathematics and Plausible Reasoning*, 2 vols. Princeton University Press, 1954.

第二部分 传 记

4. 笛卡儿

作者 克龙比(A. C. Crombie)在牛津大学教科学史和科学哲学. 他的书有"*Medieval and Early Modern Science*"以及"*Robert Grosseteste and the Origin of Experimental Science: 1100—1700*". 他写过多篇论文,原为"*British Journal for the Philosophy of Science*"编辑. 他是华盛顿大学访问教授以及普林斯顿大学 Shreve Fellow. 克龙比正在研究笛卡儿之作为一个科学思想家,特别是他对生理学和生物学理论发展的影响.

参考文献

CORRESPONDANCE: RENÉ DESCARTES. Edited by C. Adam and G. Milhaud. Presse Universitaire de France, 1936—1956.

DESCARTES' DISCOURSE ON METHOD. Leon Roth. The Clarendon Press, 1937.

EXPERIENCE AND THE NON-MATHEMATICAL IN THE CARTESIAN METHOD. Alan Gewirtz in *Journal of the History of Ideas*, Vol. Ⅱ, No. 2, pages 183—210; April, 1941.

NEW STUDIES IN THE PHILOSOPHY OF DESCARTES. Norman Kemp Smith. The Macmillan Co., 1952.

THE PHILOSOPHIC WORKS OF DESCARTES. Elizabeth S. Haldane and G. R. T. Ross. Cambridge University Press, 1934.

THE SCIENTIFIC WORK OF RENÉ DESCARTES (1596—1650). Joseph Frederick Scott. Taylor & Francis, 1952.

5. 牛顿

作者 柯恩(I. Bernard Cohen),哈佛大学科学史和一般教育教授. 1956 年得古根汉奖学金,1960—1961 年得美国国家科学基金(NSF)奖学金. 科恩曾任科学史杂志"Isis"编辑,写了好几本书,其中有"*Birth of a New Physics*"和"*Franklin and Newton*".

参考文献

ISAAC NEWTON. E. N. da C. Andrade. The Macmillan Company, 1954.

OPTICKS, OR A TREATISE ON THE REFLECTIONS, REFRACTIONS, INFLECTIONS & COLOURS OF LIGHT. Isaac Newton. Dover Publications, Inc., 1952.

THE ROYAL SOCIETY OF LONDON NEWTON TERCENTENARY CELEBRATIONS. Cambridge University Press, 1947.

SIR ISAAC NEWTON'S MATHEMATICAL PRINCIPLES OF NATURAL PHILOSOPHY AND HIS SYSTEM OF THE WORLD. Translated by Andrew Motte and edited by Florian Cajori. University of California Press, 1947.

6. 拉普拉斯

作者 纽曼(James R. Newman)《科学美国人》编辑部成员. 见 **2. 数学的创造作者介绍**

参考文献

MEN OF MATHEMATICS. Eric Temple Bell. Simon and Schuster, 1936.

L'OEUVRE SCIENTIFIQUE DE LAPLACE. H. Andoyer. Payot & Cie., 1922.

PIONEERS OF SCIENCE. Sir Oliver Lodge. The Macmillan Company, 1930.

7. 哈密尔顿

作者 惠塔克爵士(Sir Edmund Whittaker)的经历跨越英国科学的好几代人. 他是一个著名数学家,结识众多伟大的现代科学家. 他认识费兹吉拉德(Fitz Gerald);在剑桥随凯莱(Arthur Cayley)和斯托克斯(Sir George Stokes)学数学;作为三一学院 Fellow,他与怀特海德(A. N. Whitehead),罗素(Bertrand Russell),汤姆森(Sir J. J. Thomson),卢瑟福德勋爵(Lord Rutherfold)同事,他的学生中有哈代(G. H. Hardy),琴斯(Sir James Jeans),爱丁顿(Sir Arthur Eddington),顿布尔(H. W. Turnbull)以及泰勒(Sir Geoffrey Taylor). 1906 年惠塔克被任命为爱尔兰皇家天文学家,在都柏林担任了哈密尔顿担任过的同一教职. 1912 年惠塔克离开爱尔兰任爱丁堡大学数学教授. 在数学和物理之外,他的活动主要在哲学与宗教领域中.

参考文献

LIFE OF SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON. R. P. Graves. Hodges, Figgis and Company, Ltd., 1882—1889.

8. 巴贝奇奇特的一生

作者 P·莫里斯(Phillip Morrison)是《科学美国人》编辑部成员,图书部编辑. 他曾在 MIT

和康乃尔大学物理教授 E·莫里逊(Emily Morrison)是他的妻子.

参考文献

BABBAGE'S CALCULATING ENGINES. Edited by Henry P. Babbage. E. and F. N. Spon, London, 1889.

9. 克里福德

作者 见 2. 数学的创造作者介绍.

参考文献

THE COMMON SENSE OF THE EXACT SCIENCES. William Kingdon Clifford. Alfred A. Knopf, 1946.

LECTURES AND ESSAYS. Edited by L. Stephen and F. Pollock. The Macmillan Company, 2 vols., 1879.

10. 麦克斯韦

作者 见 2. 数学的创造作者介绍.

参考文献

THE LIFE OF JAMES CLERK MAXWELL. Lewis Campbell and William Garnett. Macmillan and Co., 1882.

THE SCIENTIFIC PAPERS OF JAMES CLERK MAXWELL. Edited by W. D. Niven. Dover Publications, Inc., 1953.

A TREATISE ON ELECTRICITY AND MAGNETISM. James Clerk Maxwell. Dover Publications, Inc., 1954.

11. 湿利尼吠萨·拉马努金

作者 见 2. 数学的创造作者介绍.

参考文献

RAMANUJAN. G. H. Hardy. Cambridge University Press, 1940.

COLLECTED PAPERS OF SRINIVASA RAMANUJAN. Edited by G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyer and B. M. Wilson. Cambridge University Press, 1947.

12. 尼古拉斯·布尔巴基

作者 见 1. 数学的创新作者介绍.

参考文献

A CONTRIBUTION TO THE MATHEMATICAL THEORY OF BIG GAME HUNTING. H. Pétard in *The American Mathematical Monthly*, Vol. 45, No. 7, pages 446—447; 1938.

ELÉMENTS DE MATHÉMATIQUE. N. Bourbaki. Hermann & Cie., 1939. FOUNDATIONS OF MATHEMATICS FOR THE WORKING MATHEMATICIAN. N. Bourbaki in *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 14, No. 1, pages 1—8; March, 1949.

第二部分 补充文献

Ball, W. W. Rouse. *A Short Account of the History of Mathematics*. Dover Publications, 1960. [Reprint.]

Bell, Eric T. *The Development of Mathematics*. 2nd ed., McGraw-Hill, 1945.

Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. Rev. ed., Holt, Rinehart and Winston, 1964.

Scott, J. F. *A History of Mathematics*. Taylor and Francis, Ltd., 1958.

第三部分 数学的若干章节

13. 数

作者 戴维斯(Phillip J. Davis)是布朗大学应用数学教授. 他于 1943 年和 1950 年在哈佛大学分别获数学学士和 Ph. D. 学位. 自 1952 年到 1963 年他在国家标准局应用数学部工作. 戴维斯因他的论文"Gamma 函数的历史剖析"而获美国数学协会(Mathematical Association of America)Chauvenet 奖. 他是三本书的作者:"*The Lore of Large Numbers*"(1961);"*Interpolation and Approximation*"(1963)和"*Mathematics of Matrices*"(1966). 现在他从事数值分析领域的研究,发展在高速计算机上求解方程的技巧.

参考文献

THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICS. Eric T. Bell. McGraw-Hill Book Company,

Inc., 1945.

EPISODES FROM THE EARLY HISTORY OF MATHEMATICS. Asger Aaboe. Random House, 1964.

HISTORY OF MATHEMATICS, VOL. Ⅱ: SPECIAL TOPICS OF ELEMENTARY MATHEMATICS. David Eugene Smith. Dover Publications, Inc., 1958.

THE LORE OF LARGE NUMBERS. Philip J. Davis. Random House, 1961.

MATHEMATICS AND THE PHYSICAL WORLD. Morris Kline. Thomas Y. Crowell Company, 1959.

NUMBER: THE LANGUAGE OF SCIENCE. Tobias Dantzig. The Macmillan Company, 1954.

PHILOSOPHY OF MATHEMATICS. Stephen F. Barker. Prentice-Hall, Inc., 1964.

14. 数论

作者　赫尔维茨(Paul S. Herwitz),北卡罗来纳大学数学 Ph. D. 他作为一个数学家参加了纽约 Armonk 的 IBM,以后担任编程和计算机系统计划的多种顾问和管理职务. 1965 年后是程序资源部主任.

参考文献

NUMBER THEORY AND ITS HISTORY. Oystein Ore. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1948.

FIRST COURSE IN THEORY OF NUMBERS. Harry N. Wright. John Wiley & Sons, Inc., 1939.

15. 代数

作者　梭耶尔(W. W. Sawyer)是多伦多大学数学教授. 梭耶尔 1911 年生于英国，毕业于剑桥大学，专长于量子理论与相对论的数学. 他曾于 1935 年到 1945 年在苏格兰丹第（Dundee）大学和曼彻斯特大学任教，后任 Leicester 工程学院数学系主任. 1948 年任加纳大学（当时称为黄金海岸大学学院）数学系主任. 自 1951 年至 1956 年他任新西兰 Christchurch 的 Canterbury 大学教授. 在美国依利诺依大学及 Wesleyan 大学任教后，去多伦多大学任教授. 梭耶尔写过几本通俗数学书籍，有："*A Concrete Approach to Abstract Algebra*","*Prelude to Mathematics*"及"*Mathematician's delight*".

参考文献

THE FUNDAMENTAL PROPOSITIONS OF ALGEBRA. Edward V. Huntington in *Monographs on Topics of Modern Mathematics*, edited by J. W. A. Young. Dover Publications, Inc., 1955.

INSIGHTS INTO MODERN MATHEMATICS: TWENTY-THIRD YEARBOOK. The National Council of Teachers of Mathematics, 1957.

MATHEMATICS: THE MAN-MADE UNIVERSE. Sherman K. Stein. W. H. Freeman and Company, 1963.

SOME LESSONS IN MATHEMATICS. Edited by T. J. Fletcher. Cambridge University Press, 1964.

16. 几何

作者 克莱因(Morris Kline),本书主编,纽约大学华盛顿广场中心数学教授,大学数学系主任,也是该校柯朗数学科学研究所电磁部主任. 1936 年在该校得 Ph. D. 学位后,在普林斯顿高等研究所做了两年研究工作. 自 1936 年至 1942 年任教于纽约大学. 其后参加美国陆军,为通信兵工程实验室的物理学家. 1945 年回纽约大学后为教授至今. 曾于 1958 年,1961 年与 1966 年为斯坦福大学访问教授. 1958—1959 学年度为德国亚琛高等工业学校 Fulbright 讲师并得到当年的 Fulbright Fellowship. 除大量专业文献外,克莱因还写了好几本通俗数学书籍,包括"*Mathematics in Western Culture*"(1953),"*Mathematics and the Physical World*"(1959),和"*Mathematics: A Cultural Approach*".

参考文献

GREAT IDEAS OF MODERN MATHEMATICS: THEIR NATURE AND USE. Jagjit Singh. Dover Publications, Inc., 1959.

A LONG WAY FROM EUCLID. Constance Reid. Thomas Y. Crowell Company, 1963.

PRELUDE TO MATHEMATICS. W. W. Sawyer. Penguin Books Inc., 1955.

WHAT IS MATHEMATICS? AN ELEMENTARY APPROACH TO IDEAS AND METHODS. Richard Courant and Herbert Robbins. Oxford University Press, 1941.

17. 射影几何

作者介绍 见上篇.

参考文献

ART AND GEOMETRY. William M. Ivins, Jr. Dover Publications, 1964. [Reprint.]

MATHEMATICS IN WESTERN CULTURE. Morris Kline. Oxford University Press, 1953.

PROJECTIVE GEOMETRY. John Wesley Young. The Open Court Publishing Company, 1930.

PROJECTIVE GEOMETRY. Oswald Veblen and John Wesley Young. Ginn and Company, 1910—1918.

18. 空间的曲率

作者 勒科尔白也(P. Le Corbeiller)哈佛大学一般教育与应用物理学教授. 生于巴黎,出身于法国巴黎高等工业学校,这是一所军事院校,法国许多第一流数学家均出于此. 1926 年在 Sorbonne(即老巴黎大学)得数学博士. 20 与 30 年代任法国政府职务的通讯工程师. 虽然处于这个在法国颇为常规的公务生涯之中,他却另有所求. 1938 年辞职并得到一个哲学 licence(法国硕士)学位. 三年后他来到长期向往的美国,并在法国政府的一次公差中认识了他的生于芝加哥的妻子. 1941 年任哈佛大学教授.

参考文献

THE FOURTH DIMENSION SIMPLY EXPLAINED: A COLLECTION OF ESSAYS SELECTED FROM THOSE SUBMITTED IN THE SCIENTIFIC AMERICAN PRIZE COMPETITION. Peter Smith, 1941.

GENERAL INVESTIGATION OF CURVED SURFACES OF 1827 AND 1825. Karl Friedrich Gauss. Princeton University Library, 1902.

ON THE HYPOTHESES WHICH LIE AT THE FOUNDATIONS OF GEOMETRY. Bernhard Riemann in *A Source Book in Mathematics*, edited by David Eugene Smith. Dover Publications, 1959. [Reprint.]

SPACE—TIME—MATTER. Hermann Weyl. Dover Publications, Inc., 1951.

19. 拓扑学

作者 塔克(Albert W. Tucker),1928 获多伦多大学学士,1932 获普林斯顿大学拓扑学 Ph. D. 1933 年起任教普林斯顿大学,现为数学教授,前系主任. 塔克对数学与教育均有显著贡献.

贝利(Herbert S. Bailey)在与塔克合写此文时是普林斯顿大学出版社科学编辑. 现任社长.

参考文献

MATHEMATICS AND THE IMAGINATION. E. Kasner and J. Newman. Simon and Schuster, Inc., 1940.

WHAT IS MATHEMATICS? R. Courant and H. Robbins. Oxford University Press, 1941.

20. 哥尼斯堡桥

作者 见 2. **数学的创造**. 他编辑了欧拉此文并写了介绍.

参考文献

MEN OF MATHEMATICS. Eric Temple Bell. Simon and Schuster, 1937.

21. 不动点定理

作者 辛布洛特(Marvin Shinbrot),西北大学数学与工程科学副教授. 1949 年在 Syracuse 大学得硕士学位(本科亦在该校)后曾在国家航空咨询委员会(即今 NASA)及洛克希德飞机公司任研究科学家数年. 1960 年在斯坦福大学获 Ph. D. 后开始教学生涯,先在芝加哥大学与柏克利加州大学任教,1965 年转到西北大学.

参考文献

GEOMETRY AND THE IMAGINATION. D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. Chelsea Publishing Company, 1952.

WHAT IS MATHEMATICS? AN ELEMENTARY APPROACH TO IDEAS AND METHODS. Richard Courant and Herbert Robbins. Oxford University Press, 1941.

22. 机会

作者 艾也尔(A. J. Ayer)牛津大学 Wykeham 逻辑教授. 自 1959 年即任此职. 在到牛津大学前,曾在伦敦大学任 Grote 心灵哲学与逻辑教授 13 年. 艾也尔毕业于伊登公学与牛津大学,1932 年起在牛津大学 Christ Church 学院任哲学讲师. 二战期间应征服役于威尔士卫队(Welsh Guard),同年获军官衔. 艾也尔写过的书有"*Language, Truth and Logic*","*The Foundation of Empirical Knowledge*","*The Problem of Knowledge*"及"*The Concept of a Person*".

参考文献

LOGICAL FOUNDATIONS OF PROBABILITY. Rudolf Carnap. The University of Chicago Press, 1962.

PRINCIPLES OF THE THEORY OF PROBABILITY. Ernest Nagel. The University of Chicago Press, 1939.

A TREATISE ON PROBABILITY. John Maynard Keynes. Harper & Row Publishers, 1962.

23. 概率论

作者 韦弗尔(Warren Weaver). 任斯洛恩基金会(Alfred P. Sloan Foundation)副主席直到1964年. 现任为该基金会董事与科学事务顾问. 韦弗尔曾是威斯康辛大学数学教授,并担任系主任四年. 1932年离开威斯康辛大学后,是洛克菲勒基金会自然科学部主任以及Sloan-Kettering研究所自然科学与医学副主席. 1959年参加斯洛恩基金会任自然科学主任.

参考文献

THE SCIENCE OF CHANCE. Horace C. Levinson. Rinehart and Company, Inc., 1950.

PROBABILITY AND ITS ENGINEERING USES. Thornton C. Fry. D. Van Nostrand Company, Inc., 1928.

AN INTRODUCTION TO PROBABILITY THEORY AND ITS APPLICATIONS. William Feller. John Wiley and Sons., Inc., 1950.

24. 概率论

作者 卡茨(Mark Kac)洛克菲勒大学数学教授. 1914年生于波兰Krzemieniec,就学于里沃夫John Casimir大学并在该校于1937年得Ph. D.学位. 1938年到美国在霍普金斯大学为Parnas Foundation Fellow,一年后任教于康乃尔大学. 在1951—1952学年度他在普林斯顿高等研究所一年. 1961年离康乃尔大学任现职至今. 1950年卡茨因他的论文"随机游动与布朗运动理论"一文被美国数学协会授予Chauvenet奖. 他的主要科学工作过去几年是在统计力学方面;他特别有兴趣于变相的数学模型.

参考文献

CHOICE AND CHANCE: WITH ONE THOUSAND EXERCISES. William Allen Whitworth. Hafner Publishing Co., 1951.

A HISTORY OF THE MATHEMATICAL THEORY OF PROBABILITY FROM THE TIME OF PASCAL TO THAT OF LAPLACE. I. Todhunter. Chelsea Publishing Company, 1949.

AN INTRODUCTION TO PROBABILITY THEORY AND ITS APPLICATIONS. William

Feller. John Wiley & Sons, Inc., 1957.
LADY LUCK. Warren Weaver. Doubleday & Company, Inc., 1963.
PROBABILITY, STATISTICS AND TRUTH. Richard von Mises. The Macmillan Company, 1957.

25. 统计学

作者 见 23. 概率论.

参考文献

ELEMENTARY STATISTICAL ANALYSIS. Samuel S. Wilks. Princeton University Press, 1948.

第三部分 补充文献

Aleksandrov, A. D., et al., eds. *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning*. 3 vols., The M. I. T. Press, 1964.

Blackett, Donald W. *Elementary Topology*. Academic Press, 1967.

Courant, R., and H. E. Robbins. *What is Mathematics?* Oxford University Press, 1941.

Eves, Howard. *A Survey of Geometry*. 2 vols., Allyn and Bacon, 1963—1965.

Kline, Morris. *Calculus, an Intuitive and Physical Approach*. 2 vols., John Wiley and Sons, 1967.

Moroney, M. J. *Facts from Figures*. Penguin Books, 1951.

Reichmann, W. J. *Use and Abuse of Statistics*. Oxford University Press, 1962.

von Mises, Richard. *Probability, Statistics and Truth*. 2nd ed., George Allen and Unwin, 1957.

Weaver, Warren. *Lady Luck*. Doubleday, 1963.

Wolfe, H. E. *Non-Euclidean Geometry*. Holt, Rinehart and Winston, 1945.

第四部分 数学基础

26. 几何与直觉

作者 哈恩(Hans Hahn),1934 年 55 岁时去世,是一个有才能的维也纳数学家、教师和研

究者.他强烈地倾向于逻辑与数学的哲学关系,本文是他最好的文章的一段即可为证.1902 年在维也纳得学位后,他与当时的一些数学巨匠一同写论文,组织讨论班.1905 年他接替了 Otto Stolz 在 Innsbruck 大学的教职.一战中他投于奥军,受过重伤,因勇敢而受勋,不久后又回到维也纳大学当教授.

参考文献

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL THINKING. Friedrich Waismann. Frederick Ungar Publishing Co., 1951.

PARADOXES OF THE INFINITE. Bernard Bolzano. Yale University Press, 1950.

27. 数学基础

作者 蒯因(Willard van Orman Quine),哈佛大学 Edgar Peairce 哲学教授.1930 年毕业于 Oberlin 学院,主修数学.两年后在哈佛得 Ph. D. 在怀特海德(Alfred North Whitehead)指导下完成了逻辑的学位论文.又在维也纳,布拉格和华沙大学非正式地读了一年书,1933 年被选入哈佛的 Society of Fellows. 1936 年起在哈佛任教,1948 年任哲学教授和 Society of Fellows 的 Senior Fellow. 以后又在牛津大学、普林斯顿高等研究所和加州 Palo Alto 的行为科学高等研究中心讲学、研究,1959 年夏在日本和澳大利亚讲学.他写的书有"*Set Theory and Its Logic*"(1963),"*Ways of Paradox and Other Essays*"(1966).

参考文献

AXIOMATIC SET THEORY. Paul Bernays and A. A. Fraenkel. North-Holland Publishing Company, 1958.

THE FOUNDATIONS OF ARITHMETIC: A LOGICO-MATHEMATICAL ENQUIRY INTO THE CONCEPT OF NUMBER. Dr. G. Frege. Basil Blackwell, 1953.

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL PHILOSOPHY. Bertrand Russell. George Allen & Unwin, Ltd., 1919.

SET THEORY AND ITS LOGIC. Willard Van Orman Quine. Harvard University Press, 1963.

28. 悖论

作者 见上篇.

参考文献

FROM A LOGICAL POINT OF VIEW. Willard Van Orman Quine. Harvard University

Press, 1953. See pages 80—139.

THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS. Evert W. Beth. North-Holland Publishing Company, 1959. See pages 481—518.

METHODS OF LOGIC. Willard Van Orman Quine. Holt, Rinehart & Winston, Inc., 1959. See pages 225—252.

RIDDLES IN MATHEMATICS: A BOOK OF PARADOXES. E. P. Northrop. D. Van Nostrand Co., Inc., 1944.

29. 非康托集论

作者 科恩(Paul J. Kohn)和赫尔希(Reuben Hersh)分别为斯坦福大学数学教授和新墨西哥大学数学教授. 科恩就学于 Brooklyn 学院,1958 年在芝加哥大学得 Ph. D. 学位,以后执教于 Rochester 大学,MIT 和哈佛大学. 现在普林斯顿高等研究所访问. 主要由于本文所讲的工作,他在 1966 年国际数学家大会上得 Fields 奖. 又曾与人分获一位美国科学家设立的 Research Corporation of American 的一万美元研究奖. 1963 年还曾得到美国数学会为分析数学中的杰出研究工作所设立的 Bôcher 奖. 赫尔希曾任教于纽约大学、Fairleigh Dickinson 大学与斯坦福大学. 他自称,在 1962 年于纽约大学获数学 Ph. D. 前,曾在哈佛得到美国文学的 B. A. magna cum laude 学位,在朝鲜占领军中服役,又在《科学美国人》任小职员和助理编辑,又在机械制造业当了四年车工和实验机械师.

参考文献

AN INTRODUCTION TO THE FOUNDATIONS AND FUNDAMENTAL CONCEPTS OF MATHEMATICS. Howard Eves and Carroll V. Newsom. Holt, Rinehart and Winston, 1965.

A PROOF OF THE INDEPENDENCE OF THE CONTINUUM HYPOTHESIS. Dana Scott in *Mathematical Systems Theory*, Vol. 1, No. 2, pages 89—111; May, 1967.

SET THEORY AND THE CONTINUUM HYPOTHESIS. Paul J. Cohen. W. A. Benjamin, Inc., 1966.

WHAT IS CANTOR'S CONTINUUM PROBLEM? Kurt Gödel in *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, edited by Paul Benacerraf and Hilary Putnam. Prentice-Hall, Inc., 1964.

30. 哥德尔证明

作者 内格尔(Ernest Nagel)和纽曼(James R. Newman)都是逻辑和科学哲学学者. 此外,

纽曼还是内格尔以前的学生. 内格尔是哥伦比亚大学的 John Dewey 哲学教授. 他的书有"*Logic without Metaphysics*"和"*Structure of Science: Problems in the Logic of Scientific Explanation*". 纽曼是《科学美国人》编辑部成员. 他们还合写了一本"*Gödel's Proof*", 1958 年出版.

参考文献

INTRODUCTION TO THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS. Raymond L. Wilder. John Wiley & Sons, Inc., 1952.

THE NATURE OF MATHEMATICS. Max Black. Harcourt, Brace and Company, Inc., 1934.

PRINCIPIA MATHEMATICA. Alfred North Whitehead and Bertrand Bussell. Cambridge University Press, 1925.

SYMBOLIC LOGIC. C. I. Lewis and C. H. Langford. D. Appleton-Century Company, Inc., 1932.

第四部分 补充文献

Benacerraf, Paul, and Hilary Putnam. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Prentice-Hall, 1964.

Beth, E. W. *The Foundations of Mathematics*. 2 vols., 2nd ed., Harper and Row, 1966.

Black, Max. *The Nature of Mathematics*. Routledge and Kegan Paul, 1953.

Fraenkel, A. A., and Y. Bar-Hillel. *Foundations of Set Theory*. North-Holland Publishing Company, 1958.

Goodstein, R. L. *Essays in the Philosophy of Mathematics*. Leicester University Press, 1965.

Körner, Stephan. *The Philosophy of Mathematics*. Hutchinson University Library, 1960.

Wilder, R. L. *Introduction to the Foundations of Mathematics*. 2nd ed., John Wiley and Sons, 1965.

第五部分 数学的意义

31. 物理学家的自然图像的进化

作者 狄拉克(Paul Adrien Maurice Dirac)剑桥大学 Lucas 数学教授. 1928 年狄拉克提出

了他的电子理论，使他三年后预言电子的反粒子必存在．这个反粒子即正电子是 1932 年由加州理工学院的安德森（C. D. Anderson）发现的．狄拉克因此获得 1933 年诺贝尔物理奖（另一获奖人是奥地利理论物理学家薛定谔（E. Schrödinger））．1930 年他被选为皇家学会会员．

参考文献

CAN QUANTUM-MECHANICAL DESCRIPTION OF PHYSICAL REALITY BE CONSIDERED COMPLETE? A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen in *The Physical Review*, Vol. 47, No. 10, pages 777—780; May 15, 1935.

ENTWURF EINER VERALLGEMEINERTEN RELATIVITÄTSTHEORIE UND EINER THEORIE DER GRAVITATION. Albert Einstein in *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Vol. 62; 1914.

ON THE CONSTITUTION OF ATOMS AND MOLECULES. N. Bohr in *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. Part 1: *Binding of Electrons by Positive Nuclei*, Series 6, Vol. 26, No. 151, pages 1—25; July, 1913. Part 2: *Systems Containing only Single Nucleus*, Series 6, Vol. 26, No. 153, pages 476—507; September, 1913.

QUANTISIERUNG ALS EIGENWERTPROBLEM. E. Schrödinger in *Annalen der Physik*. Part 1, Vol. 79, No. 4, pages 361—376; 1926. Part 2, Vol. 79, No. 6, pages 489—527; 1926.

SIR ISAAC NEWTON'S MATHEMATICAL PRINCIPLES OF NATURAL PHILOSOPHY AND HIS SYSTEM OF THE WORLD. Edited by Florian Cajori. University of California Press, 1947.

A TENTATIVE THEORY OF LIGHT QUANTA. Louis de Broglie in *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Series 6, Vol. 47, No. 278, pages 446—457; February, 1924.

ÜBER QUANTEN THEORETISCHE UMDEUTUNG KINEMATISCHER UND MECHANISCHER BEZIEHUNGEN. W. Heisenberg in *Zeitschrift für Physik*, Vol. 33, pages 879—893; 1925.

ZUR ELEKTRODYNAMIK BEWEGTER KÖRPER. A. Einstein in *Annalen der Physik*, Vol. 17, No. 10, pages 891—921; 1905.

ZUR THEORIE DES GESETZES DER ENERGIEVERTEILUNG IN NORMALSPECTRUM.

M. Planck in *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, Vol. 2, No. 17, pages 237—245; December, 1900.

32. 物理科学中的数学

作者　戴森(Freeman J. Dyson)普林斯顿高等研究所数学学院教授. 戴森生于英国,求学于剑桥大学 Winchester 学院. 大学本科学习因战时参加空军而中断,在军中他的数学才能用于研究夜间作战行动损失惨重的原因. 1945 年当他读到 Smyth 原子能报告后,决定回剑桥学物理,一年后用英联邦基金会的奖学金去美国,在康乃尔大学与贝特(Hans A. Bethe)和费曼(Richard Feynman)研究物理. 在康乃尔大学任物理教授两年后,于 1953 年进入高等研究所. 他的研究工作是在介于物理和数学之间的许多问题以及复杂系统的统计力学方面.

参考文献

THE SLEEPWALKERS. Arthur Koestler. Grosset & Dunlap, Inc., 1963.

STRONGLY INTERACTING PARTICLES. Geoffrey F. Chew, Murray Gell-Mann and Arthur H. Rosenfeld in *Scientific American*, Vol. 210, No. 2, pages 74—93; February, 1964.

THE UNREASONABLE EFFECTIVENESS OF MATHEMATICS IN THE NATURAL SCIENCES. Eugene P. Wigner in *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13, No. 1, pages 1—14; February, 1960.

33. 引力理论的推广

作者　20 世纪的物理学中无处没有爱因斯坦(Albert Einstein)天才的不可磨灭的印记. 他在 1905 年提出的"光电效应",为量子理论奠定了基础. 这个理论发展的好几个决定性的时刻都是由爱因斯坦提出的思想保证了它在今天的物理学中的统治的作用.

1905 同一年,爱因斯坦还发表了两篇文章在物理思想中引起了平行的革命——这是主要与他的名字相联系的. 其中第二篇提出了他的著名的质能相当的公式:$E=mc^2$. 到 1917 年,他已在他的"狭义相对论"的基础上建立了"广义相对论"的大厦,把宇宙大尺度的力学归入综合的时空几何学. 从那时起他又致力于一个崇高的目标,即把控制着微观领域的原子粒子的电磁规律纳入这个宏大的推广之内. 在这个征程上,他一生的后 40 年越来越孤独,因为物理学中的同时代人越来越倾向来自量子力学的哲学观点.

爱因斯坦在本文中试图向外行解释他最后的迄未成功的"引力理论的推广". 他本人就是他

的工作的最动人也最成功的普及者，但是他说本文"不太好懂". 尽管如此，本文使读者能最亲切最动人地洞察这位伟大的自然哲学家的动机与目的.

参考文献

THE MEANING OF RELATIVITY. Albert Einstein. Princeton University Press, 1950.

RELATIVITY. Albert Einstein. Peter Smith, 1931.

34. 引力

作者　伽莫夫(George Gamow)是 Colorado 大学物理教授. 1928 在国立列宁格勒大学获核物理博士学位后，他先在哥本哈根大学师从玻尔(Niels Bohr)后在剑桥大学师从卢瑟福(Ernest Rutherfold). 1934 年他到达美国，先在 George Washington 大学教物理，到 1956 年来 Colorado 大学. 伽莫夫作为多产的科学普及者，由于向外行人解释科学而于 1956 年获 Kalinga 奖. 他写了十几本书，以 23 种语言发行.

参考文献

SIR ISAAC NEWTON'S MATHEMATICAL PRINCIPLES OF NATURAL PHILOSOPHY AND HIS SYSTEM OF THE WORLD. Edited by Florian Cajori. University of California Press, 1947.

DIALOGUES CONCERNING TWO NEW SYSTEMS. Galieo Galilei. Dover Publications, Inc., 1953.

MEANING OF RELATIVITY. Albert Einstein. Princeton University Press, 1956.

35. 生物科学中的数学

作者　摩尔(Edward Moore)是 Wisconsin 大学计算机科学和数学教授. 毕业于 Virginia Polytechnic Institute，并于 1950 年在 Brown 大学获数学 Ph. D. 学位. 摩尔在国家标准局和伊利诺依大学研究数字计算机编程以后，1951 年他参加了 Bell 电话实验室，在交换机研究部门作一个数学家. 1961—1962 学年度，他同时任哈佛大学 Mckay 应用数学访问学者和 MIT 的电机工程访问教授. 从 1966 年后任 Wisconsin 大学教授. 摩尔研究过多种计算机，从下棋的计算机到设计开关线路的计算机. 他目前的主要兴趣在自动机的理论上的可能性和局限性.

参考文献

THE CONVERSE OF MOORE'S GARDEN-OF-EDEN THEOREM. John Myhill in *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 14, No. 4, pages 685—686; August,

1963.

THE GENERAL AND LOGICAL THEORY OF AUTOMATA. John von Neumann in *Cerebral Mechanisms in Behavior*, edited by Lloyd A. Jeffress. John Wiley & Sons, Inc., 1951.

MATHEMATICAL PROBLEMS IN THE BIOLOGICAL SCIENCES: PROCEEDINGS OF SYMPOSIA IN APPLIED MATHEMATICS, Vol. XIV, edited by R. E. Bellman. American Mathematical Society, 1962.

SIMULATION OF BIOLOGICAL CELLS BY SYSTEMS COMPOSED OF STRING-PROCESSING FINITE AUTOMATA. Walter R. Stahl, Robert W. Coffin and Harry E. Goheen in *AFIPS 1964 Spring Joint Computer Conference*. Spartan Books, Inc., 1964.

36. 社会科学中的数学

作者 理查・斯通(Richard Stone)是剑桥大学 Leake 金融与会计学教授. 1913 年生于伦敦,在剑桥 Gonville and Caius College 学法律和经济学. 二战期间,他为战时内阁作统计工作,也是凯因斯(John Maynard Keynes)在财政部的助手. 1945 年任剑桥应用经济系第一主任. 1955 年在剑桥获 Sc. D. 学位. 斯通过去的工作主要在社会会计及度量经济学方面. 目前他正致力于建立英国经济模型,设计这个模型来研究如何刺激经济增长. 他还从事于作经济模型的国际评述.

参考文献

AN ANATOMY OF KINSHIP: MATHEMATICAL MODELS FOR STRUCTURES OF CUMULATED ROLES. Harrison C. White. Prentice-Hall, Inc., 1963.

FINITE MATHEMATICS WITH BUSINESS APPLICATIONS. John G. Kemeny, Arthur Schleifer, Jr., J. Laurie Snell and Gerald L. Thompson. Prentice-Hall, Inc., 1962.

GAME THEORY AND RELATED APPROACHES TO SOCIAL BEHAVIOR. Edited by Martin Shubik. John Wiley & Sons, Inc., 1964.

INTRODUCTION TO DIFFERENCE EQUATIONS. Samuel Goldberg. John Wiley & Sons, Inc., 1958.

THE MODEL IN ITS ENVIRONMENT: A PROGRESS REPORT. Paper No. 5 in *A Programme for Growth*, general editor Richard Stone. Published for the Department of Applied Economics, University of Cambridge, by Chapman & Hall; July, 1964.

PROBABILITY AND STATISTICS FOR BUSINESS DECISIONS: AN INTRODUCTION TO MANAGERIAL ECONOMICS UNDER UNCERTAINTY. Robert Schlaifer. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.

37. 质量控制的实践

作者 道尔顿(A. G. Dalton)与工作中的统计质量控制的根源是很接近的. 作为西方电气公司质量控制总监,他负责该公司种类繁多的产品的连续质量检查. 许多质量控制原来的技术都来自此公司. 他生于英国,1919 来到美国. 在英国皇家工程信号部任中尉时出了一点小毛病后,在密西西比一家木材公司找到第一个工作. 他在那里非常努力于锯木的电气化,老板就建议他在电气设备领域可能更有前途. 在西方电气公司工作时,当他检查拨号系统中的次品时,对质量控制又有了兴趣. 这个兴趣使他在 1928 年来到 Bell Telephone Laboratory,那里有一群人研究基本的统计方法. 1943 年又回到西方电气.

参考文献

ECONOMIC CONTROL OF QUALITY OF MANUFACTURED PRODUCT. W. A. Shewhart. D. Van Nostrand Co., Inc., 1931.

STATISTICAL QUALITY CONTROL. Eugene L. Grant, McGraw-Hill Book Company, 1952.

38. 对策论

作者 摩根斯特恩(Oskar Morgenstern)生于德国 Gorlitz,是普林斯顿大学政治经济学教授和度量经济研究计划负责人. 1925 年—1928 年,他作为 Rockefeller 基金会的 Fellow 在哈佛大学以及伦敦、巴黎、罗马各大学作研究. 在维也纳大学教学十年后于 1938 年回到美国,在 Carnegie 大学任访问教授,同年任普林斯顿大学教授. 摩根斯特恩也是 Rand 公司顾问和原子能委员会成员.

参考文献

THE THEORY OF GAMES AND ECONOMIC BEHAVIOR. John von Neumann and Oskar Morgenstern. Princeton University Press, 1955.

39. 对策论的运用与滥用

作者 雷珀波尔特(Anatol Rapoport)是密歇根大学精神健康研究所的教授和高级研究数

学家.他出生于俄国,在芝加哥的公立学校受教育,在维也纳国立音乐学院受音乐训练,得到作曲、钢琴和指挥学位.以后四年中他在欧、美、墨西哥举行音乐会.1937 年 26 岁时入芝加哥大学为新生,并于 1941 年获数学 Ph. D. 二战期间,他在美国空军服役,于阿拉斯加担任与苏联空军的联络官,以后雷珀波尔特在 Illinois Institute of Technology 教数学,1947 年到 1954 年为芝加哥大学的研究助理,后为数学生物物理助理教授,在行为科学高等研究中心又呆了一年.1955 年去密歇根.

参考文献

THE COMPLEAT STRATEGYST: BEING A PRIMER ON THE THEORY OF GAMES OF STRATEGY. J. D. Williams. McGraw-Hill Book Co., Inc., 1954.

INTRODUCTION TO THE THEORY OF GAMES. J. C. C. McKinsey. The Rand Corporation. McGraw-Hill Book Co., Inc. 1952.

STRATEGY AND MARKET STRUCTURE: COMPETITION, OLIGOPOLY AND THE THEORY OF GAMES. Martin Shubik. John Wiley & Sons, Inc., 1959.

THE STRATEGY OF CONFLICT. Thomas C. Schelling. Harvard University Press, 1960.

THEORY OF GAMES AND STATISTICAL DECISIONS. David Blackwell and M. A. Girshick. John Wiley & Sons, Inc., 1954.

THEORY OF GAMES AS A TOOL FOR THE MORAL PHILOSOPHER. R. B. Braithwaite. Cambridge University Press, 1955.

40. 通讯的数学

作者 见 23. 概率论

参考文献

A MATHEMATICAL THEORY OF COMMUNICATION. C. E. Shannon in *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, pages 379—423; July, 1948. Pages 623—656; October, 1948.

41. 线性规划

作者 库柏(William W. Cooper)和查恩斯(Abraham Charnes)在合写本文时都在 Carnegie Institute of Technology 的工业管理研究生院,在那里,他们在教学与研究中把经济学与数学结合起来.库柏现为 Carnegie 的经济学教授.1954 年他为管理科学研究所主席,该所主要从事于在企业中应用科学分析.查恩斯现为西北大学应用数学和经济学教授.他在离开 Carnegie Insti-

tute of Technology 以后曾任 Purdue 大学的数学教授和研究系主任二年. 然后于 1957 年任西北大学教授. 和库柏一样, 他也在管理科学研究所工作, 1960 年起任主席.

参考文献

AN INTRODUCTION TO LINEAR PROGRAMMING. A. Charnes, W. W. Cooper and A. Henderson. John Wiley & Sons, Inc., 1953.

ACTIVITY ANALYSIS OF PRODUCTION AND ALLOCATION. Edited by T. C. Koopmans. John Wiley & Sons, Inc., 1951.

BLENDING AVIATION GASOLINES: A STUDY IN PROGRAMMING INTERDEPENDENT ACTIVITIES IN AN INTEGRATED OIL COMPANY. A. Charnes, W. W. Cooper and B. Mellon in *Econometrica*, Vol. 20, No. 2; April, 1952.

42. 运筹学

作者 莱文森(Horace C. Levinson)是科学作家和顾问. 自 1949 年到 1955 年任国家研究会议运筹研究委员会主席. 布朗(Arthur A. Brown)任职于 Arthur D. Little. Inc. 公司. 他曾任海军运筹评价组副主席.

参考文献

METHODS OF OPERATIONS RESEARCH. Philip M. Morse and George E. Kimball. The Technology Press of Massachusetts Institute of Technology and John Wiley & Sons, Inc., 1950.

43. 数学机器

作者 戴维斯(Harry M. Davis)曾为《科学美国人》写过几篇文章. 1949 年因游泳事故逝世于 Mississippi 州 Biloxi. 他是很少有的职业新闻人员之一: 其科学报导能使科学家也为之倾心.

参考文献

PUNCHED CARD METHODS IN SCIENTIFIC COMPUTATION. W. J. Eckert. The Thomas J. Watson Astronomical Computing Bureau, Columbia University, 1940.

PROCEEDINGS OF A SYMPOSIUM ON LARGE-SCALE DIGITAL CALCULATING MACHINERY. Harvard University Press, 1948.

44. 计算机

作者 乌拉姆(Stanislaw Ulam)是加州大学 Los Alamos 科学实验室研究顾问之一; 他生于

波兰 Lwow(现属乌克兰),于 1932 年,1933 年分别得到 Lwow 的 Polytechnic Institute 的 M. A. 和 D. Sc. 学位. 1936 年到美国为普林斯顿高等研究所访问学者,此前则在波兰与英法多个单位讲学. 不久后即为哈佛大学 Society of Fellows 的 Fellow. 1940 年离开哈佛任 Wisconsin 大学教授. 1943 年作为曼哈顿工程区 * 一员参与原子弹的工作. 乌拉姆曾在以下大学中短期工作过:南加州大学、哈佛、MIT、Colorado 大学和 San Diego 加州大学,在 Los Alamos,乌拉姆与泰勒(Edward Teller)合作研究氢弹. 他还发明了所谓 Monte-Carlo 方法,即一种用随机取样求解数学物理问题的方法. 由于高速计算机的发展,这个方法成为可实现的,它能解决某些正统方法无法对付的问题. 乌拉姆是"*Problems in Modern Mathematics*"一书(1964 年)的作者.

参考文献

AUTOMATIC DIGITAL COMPUTERS. M. V. Wilkes. John Wiley & Sons, Inc., 1956.

A COLLECTION OF MATHEMATICAL PROBLEMS. Stanislaw Ulam. John Wiley & Sons, Inc., 1960.

THE COMPUTER AND THE BRAIN. John von Neumann. Yale University Press, 1958.

SELF-ORGANIZING SYSTEMS: PROCEEDINGS OF AN INTERDISCIPLINARY CONFERENCE. Edited by Marshall C. Yovits and Scott Cameron. Pergamon Press, 1960.

TEACHING COMBINATORIAL TRICKS TO A COMPUTER. D. H. Lehmer in *Combinatorial Analysis; Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Vol. 10, American Mathematical Society, 1960.

45. 计算机的逻辑和存储

作者 伊文思(David C. Evans),Utah 大学电机工程教授,计算机科学主任. 他 1949 年毕业于该校,四年后又在该校获物理学 Ph. D. 学位. 然后又在柏克利加州大学当了教授和计算机系副主任三年,再回到 Utah 大学. 伊文思这样描述自己的主要兴趣:"人机系统:计算机辅助解题的交互式计算系统的发展."

参考文献

DESIGN OF TRANSISTORIZED CIRCUITS FOR DIGITAL COMPUTERS. Abraham I. Pressman. John F. Rider Publisher, Inc., 1959.

LOGICAL DESIGN OF DIGITAL COMPUTERS. Montgomery Phister. John Wiley & Sons,

---

* 译注:Manhattan Engineer District 是美国研制原子弹计划的代号,通称曼哈顿计划.

Inc., 1958.

SQUARE-LOOP FERRITE CIRCUITRY: STORAGE AND LOGIC TECHNIQUES. C. J. Quartly. Prentice-Hall, Inc., 1962.

SWITCHING CIRCUITS AND LOGICAL DESIGN. S. H. Caldwell. John Wiley & Sons, Inc., 1958.

THEORY AND DESIGN OF DIGITAL MACHINES. Thomas C. Bartee, Irwin L. Lebow and Irving S. Reed. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.

46. 计算机在科学中的应用

作者 厄廷格(Anthony G. Oettinger),哈佛大学语言学和应用数学教授. 从 1947 年以来一直在哈佛,只有 1951—1952 学年度在剑桥大学为 Henry Fellows,他在哈佛 1951 年得学士学位,1954 年得博士学位. 他现在的兴趣是计算机在教育中的应用的问题.

参考文献

AUTOMATIC PROCESSING OF NATURAL AND FORMAL LANGUAGES. A. G. Oettinger in *Proceedings of IFIPS Congress, 65: Vol. I*, edited by Wayne A. Kalenich. Spartan Books, 1965.

COMPUTER ANALYSIS OF NATURAL LANGUAGES. Susumo Kuno in *Mathematical Aspects of Computer Science*, edited by Jack Schwartz. American Mathematical Society, in press.

COMPUTER AUGMENTATION OF HUMAN REASONING. Edited by Margo A. Sass and William D. Wilkinson. Spartan Books, 1965.

COMPUTING PROBLEMS AND METHODS IN X-RAY CRYSTALLOGRAPHY. C. L. Coulter in *Advances in Computers*: Vol. V, edited by Franz L. Alt and M. Rubinoff. Academic Press Inc., 1964.

DATA COLLECTION AND REDUCTION FOR NUCLEAR PARTICLE TRACE DETECTORS. H. Gelernter in *Advances in Computers*: Vol. VI, edited by Franz L. Alt and M. Rubinoff. Academic Press Inc., 1965.

PLANS AND THE STRUCTURE OF BEHAVIOR. G. A. Miller, E. Galanter and K. H. Pribram. Holt, Rinehart & Winston, 1960.

A VISION OF TECHNOLOGY AND EDUCATION. A. G. Oettinger in *Communications of*

the ACM, Vol. 9, No. 7, pages 487—490; July, 1966.

47. 系统分析与编程

作者 斯特拉切(Christopher Strachey)是牛津大学计算实验室编程研究组领导人. 他 1939 年毕业于剑桥大学,战时作为物理学家,从事雷达用真空管的设计. 从 1944 年到 1951 年,他在预备学校教书;这以后就一直与计算机打交道. "我的主要兴趣",他写道,"是发展编程的数学基础,而如果可能就将它简化(特别是对大"软件"系统),使计算机的设计更合理."

参考文献

ADVANCES IN PROGRAMMING AND NON-NUMERICAL COMPUTATION. Edited by L. Fox. Pergamon Press, 1966.

A GUIDE TO FORTRAN PROGRAMMING. Daniel D. McCracken. John Wiley & Sons, Inc. , 1961.

INTRODUCTION TO ALGOL. R. Baumann, M. Feliciano, F. L. Bauer and K. Samelson. Prentice-Hall, Inc., 1964.

PROGRAMMING COMPUTERS TO PLAY GAMES. Arthur L. Samuel in *Advances in Computers*: Vol. I, edited by Franz L. Alt. Academic Press, Inc., 1960.

48. 控制论

作者 维纳(Norbert Wiener)在 1964 年去世前是 MIT 荣誉数学教授. 在哈佛大学获 Ph. D. 学位后,得到 Sheldon 旅行奖学金,任教于哈佛大学和 Maine 大学,并为"美国百科全书"(*Encyclopedia American*)写作. 自 1919 年起维纳一直担任 MIT 教授,其中只中断教学二次,一是 1926 年—1927 年,他得到 Guggenheim Fellowship;另一次是 1935 年—1936 年在中国清华大学任访问教授.

参考文献

A MATHEMATICAL THEORY OF COMMUNICATION. C. E. Shannon in *The Bell System Technical Journal*, Vol. 27, No. 3, pages 379—423; July, 1948.

CYBERNETICS. Norbert Wiener. John Wiley, 1948.

49. 看作机器的人

作者 肯麦尼(John G. Kemeny)是 Dartmouth College 数学教授和系主任. 他生于匈牙利

布达佩斯，13岁来美，进入纽约 George Washington 中学，以全班第一名毕业. 他然后进普林斯顿大学，但因美国陆军征兵入伍而中断. 军方让他在 Los Alamos 搞计算机. 他回到普林斯顿以后又以全班第一毕业，并继续攻读数学 Ph. D. 他当研究生的最后一年是爱因斯坦的助手. 他本人的研究绝大部分在形式逻辑中.

参考文献

SOLVABLE AND UNSOLVABLE PROBLEMS. A. M. Turing in *Science News*, No. 31, pages 7—23. Penguin Books, 1954.

全书补充文献

Ahrendt, Myrl H. *The Mathematics of Space Exploration*. Holt, Rinehart and Winston, 1965.

Bailey, Norman T. J. *The Mathematical Approach to Biology and Medicine*. John Wiley and Sons, 1967.

Boas, Mary L. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. John Wiley and Sons, 1966.

Born, Max. *Einstein's Theory of Relativity*. Rev. ed., Dover Publications, 1962.

Dorn, William S., and Herbert Greenberg. *Mathematics and Computing*. John Wiley and Sons, 1967.

Fink, Donald G. *Computers and the Human Mind*. Double-day, 1966.

Friedman, Bernard. *Principles and Techniques of Applied Mathematics*. John Wiley and Sons, 1956.

Friedrichs, Kurt O. *From Pythagoras to Einstein*. Random House, 1965.

Ryabov, Y. *An Elementary Survey of Celestial Mechanics*. Dover Publications, 1961.

Singh, Jagit. *Great Ideas in Information Theory, Language and Cybernetics*. Dover Publications, 1966.

Stibitz, G. R. *Mathematics in Medicine and the Life Sciences*. Year Book Medical Publishers, 1966.

Sutton, O. G. *Mathematics in Action*. G. Bell, 1957.

Wilf, Herbert S. *Mathematics for the Physical Sciences*. John Wiley and Sons, 1962.

译后记

这本书是一本文集，由 M·克莱因主编. 他在《科学美国人》杂志上从 1940 年代末到 1960 年代中发表的有关数学的论文中，选集而成本书. 全书分五个部分，每一部分均由克莱因作了引言，全书又加上他的序言. 这些引言与序言反映了主编的观点，与各文作者的观点不一定相同.

几十篇文章作者各异，既有一个时代的大师，也有在某一方面有相当成就，在某一领域中起了很大作用的科学家，还有科普作家和新闻记者. 体例也不同：有科学家对自己工作的总结与前瞻，有对某一分支的通俗介绍，也有轶闻趣事. 也因此，水平自然不同. 特别是这几十年来数学科学突飞猛进，二三十年前的研究今天看来，有的过时了，有的后来得到了重大发展，也有的经过几十年科学发展的检验，证明当初的某些估计与期望是过高了的. 因此，这本书有些篇章会向读者介绍一些数学知识而至今仍有用处，有些会向读者提出深刻的思想与问题，有的则只有历史的兴趣了. 但确有不少材料对教学会十分有用. 翻译时略去了一篇，是讲数理逻辑的. 这是因为如果也译了这一篇势必加上过多的说明，不一定符合原作者的意图了.

由于一本文集不可能有一致的观点，特别是请不要认为主编的观点一定就是能得公认的，这就需要读者自己去思考判断. 如果这本文集会有用处，可能主要在于引起读者进一步钻研的兴趣. 但是这本文集不可能作为专门著作或教材来用. 由于数学的特点，其绝大部分不用一定的“公式”、“符号”是没有办法讲的. 所以这几十年来数学——还不用更广泛的说法：数理科学——的许多伟大的进步在这里完全没有办法讲. 通俗作品要做到“通”而不“俗”，当是极致. 中国人，外国人想登上这样的高度都是同样困难的. 所以应该提醒一下读者，千万不要以为读了几篇文章就“懂”了什么. 如果文集能引起读者，特别是青年读者，想“懂”一点什么的愿望，译者也只敢这样要求了. 但是，对有心人说来，这本文集仍然是有用的.

由于篇幅太大，译时分工进行如下：

1—4 章　刘小力；

5—12，31—35，37，40—42，44，48，49 章　齐民友；

13—25，43，45—47 章　千丹岩；

26—30 章　康宏逵；

36，38，39 章　史树中.

译者不一定同意原作者的看法，因此原文不代表译者的观点，除了有必要，我们一般也不加说明. 所加的译注，也只代表加注的同志个人的观点，因为我们从事翻译的人也各有自己的看法，没有必要取得一致. 特别是这篇译后记，只能由我负责.

齐民友

1999.3.12.植树节

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝现代世界中的数学
作者＝
页数＝６７５
ＳＳ号＝１１４００７５２
出版日期＝

封面页
书名页
版权页
前言
目录
正文